Chapter 1

Kontinuumstheorie

1.1 Felder

1.1.1 Skalarfelder

Temperaturfeld $T(\mathbf{x}, t)$

Dichte $\rho(\mathbf{r}, t)$, Masse $m = \int_V d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}, t)$

Druckfeld $p(\mathbf{x}, t)$

1.1.2 Vektorfelder

Kraftfeld

Geschwindigkeitsfeld

Massenstrom

$$\Delta M = \delta t \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \tag{1.2}$$

Verschiebungsfeld

1.1.3 Tensorfelder

Dehnungstensor

Drehtensor

Spannungstensor

1.2 Der Spannungstensor

1.2.1 Kontinuumstheoretisches Modell eines elastischen Körpers, einer Flüssigkeit

Kraftfelder
I. Volumenkräfte

$$\mathbf{F} = \int_V d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{f}(\mathbf{r},t) \tag{1.3}$$

Beispiel: Gravitationskraft

$$\mathbf{f}(\mathbf{r},t) = -g\mathbf{e}_z \tag{1.4}$$

II. Oberflächenkräfte, Spannungen

$$\mathbf{F} = \int_{\delta V(t)} \sigma(\mathbf{r},t) \cdot d\mathbf{A} \tag{1.5}$$

Der Druck:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}(\mathbf{r},t) \tag{1.6}$$

Es gilt:

$$\sum_i \sigma'_{ii} = 0 \tag{1.7}$$

1.3 Dynamik elastischer Körper

Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F} \tag{1.8}$$

Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Volumen: (**s** bezeichnet das Verschiebungsfeld)

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r},t)\frac{ds(\mathbf{r},t)}{dt} = \int_{V(t)} d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{f}(\mathbf{r},t) + \int_{\delta V(t)} \sigma(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{A} \tag{1.9}$$

Gaussscher Satz:

$$\int_{\delta V(t)} d\mathbf{A}\cdot\sigma(\mathbf{r},t) = \int_{V(t)} d^3\mathbf{r}\nabla\cdot\sigma(\mathbf{r},t) \tag{1.10}$$

Also:

$$\rho(\mathbf{r},t)\frac{d^2s(\mathbf{r},t)}{dt^2} = \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{f}(\mathbf{r},t) + \nabla\cdot\sigma(\mathbf{r},t) \tag{1.11}$$

1.4 Massenerhaltung und Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dt}m = \frac{d}{dt}\int_{V(t)} d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r},t) = 0 \tag{1.12}$$

Ortsfest: Massenstrom

$$\Delta m = \Delta t dA \rho u_n \tag{1.13}$$

$$\Delta m = \Delta t \rho \mathbf{u}\cdot d\mathbf{A} \tag{1.14}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t')} d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r},t) + \int_{\delta V(t)} d\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{1.15}$$

Gaussscher Satz:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) + \nabla\cdot\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{1.16}$$

1.5 Substantielle Ableitung

Verständlich:

$$(\frac{d}{dt})_{sub} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot nabla \tag{1.17}$$

Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$\rho(\frac{d}{dt})_{sub}\mathbf{u} = \rho\mathbf{f} + \nabla \cdot \sigma \tag{1.18}$$

$$A(t) = \int_V (t) d^3\mathbf{r} a(\mathbf{r}, t) \tag{1.19}$$

Zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A(t) = \frac{A(t+\tau) - A(t)}{\tau} &= \frac{1}{\tau}\{\int_{V(t+\tau)} d^3\mathbf{r} a(\mathbf{r}, t+\tau) - \int_V (t) a(\mathbf{r}, t+\tau) \\ &+ \int_V (t) a(\mathbf{r}, t+\tau) - \int_V (t) a(\underline{\mathrm{r}}, t)\} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Bestimmung von

$$\int_{V(t+\tau)} d^3\mathbf{r} a(\mathbf{r}, t+\tau) = \int DetJ d^3\mathbf{r} a(\mathbf{r} + \mathbf{u}\tau, t+\tau) \tag{1.21}$$

A) $V(t+\tau) = V'$
Koordinatentransformation

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\tau + O(\tau^2) \tag{1.22}$$

Jacobi-Matrix

$$d\mathbf{x}' = E + d\mathbf{x} \cdot \nabla_x \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\tau + O(\tau^2) \tag{1.23}$$

Transformation des Volumenelementes

$$dV = Det[E + d\mathbf{x} \cdot \nabla_x \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\tau + O(\tau^2)] = 1 + \nabla_x \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\tau + O(\tau^2) \tag{1.24}$$

1.6 Flüssigkeitsdynamik

Newtonsche Gleichung

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int_{V(t)} d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) + \int_{\delta V(t)} \sigma(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} \tag{1.25}$$

Also:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{u}(\mathbf{r},t) + \nabla_r \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{f}(\mathbf{r},t) + \nabla_x\sigma(\mathbf{r},t) \quad (1.26)$$

Also:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{u}(\mathbf{r},t) + \nabla_r \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{f}(\mathbf{r},t) + \nabla\cdot\sigma(\mathbf{r},t) \quad (1.27)$$

Bzw. mit der Kontinuitätsgleichung:

$$\rho(\mathbf{r},t)[\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{u}(\mathbf{r},t) + \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\nabla_x]\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{f}(\mathbf{r},t) + \nabla\cdot\sigma(\mathbf{r},t) \quad (1.28)$$

1.7 Die Eulersche Gleichung

Ansatz für die Spannungen:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_j}\sigma_{ij} = -\frac{\partial}{\partial r_i}p(\mathbf{r},t) \quad (1.30)$$

Vollständige Beschreibung:

$$\rho(\mathbf{r},t)[\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{u}(\mathbf{r},t) + \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\nabla_r]\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{f}(\mathbf{r},t) - \nabla p(\mathbf{r},t) \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) + \nabla_r \cdot \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = 0 \quad (1.32)$$

Materialgleichung:

$$p = p(\rho) \quad (1.33)$$

Randbedingungen: Strömung senkrecht zur Wand muss verschwinden

1.7.1 Einteilung der Strömungen

Stromlinien:

$$\frac{d}{ds}\mathbf{R}(s) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(s),t) \quad (1.34)$$

Für stationäre Strömungen sind die Stomlinien gleich der Bahnkurve der Flüssigkeitsteilchen.

Wirbelstärke

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \nabla_r \times \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \tag{1.35}$$

Zirkulation

$$\Gamma = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \tag{1.36}$$

Inkompressible Strömungen

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{1.37}$$

Wirbelfreie Strömungen

$$\omega(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{1.38}$$

Potentialströmungen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla_r \Phi(\mathbf{r}, t) \tag{1.39}$$

inkompressible Potentialströmungen

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{1.40}$$

1.7.2 Energiebilanz

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \nabla \cdot [\mathbf{u}(\rho\frac{\mathbf{u}^2}{2} + p)] = 0 \tag{1.41}$$

Herleitung aus Eulerscher Geschwindigkeitsgleichung.

Ideale Flüssigkeit: Kein Reibungsverlust

1.7.3 Hydrostatik

$$\nabla p = -\rho g \mathbf{e}_z \tag{1.42}$$

Lösung:

$$p = p_0 + \rho g(h - z) \tag{1.43}$$

Bei variabler Dichte:

$$p = p_0 - \int_0^z dz' \rho(z', t) \tag{1.44}$$

1.7.4 Die Druckgleichung

Voraussetzungen

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{r},t) &= \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r},t) = 0 \\ \mathbf{F} &= -\nabla U \end{aligned} \tag{1.45}$$

Es folgt:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \nabla\Phi \tag{1.46}$$

Weiter gilt:

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = \nabla\frac{\mathbf{u}^2}{2} - \mathbf{u}\times\omega \tag{1.47}$$

Eulersche Gleichung

$$\nabla[\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + U + p] = 0 \tag{1.48}$$

Das heisst also:

1.7.5 Die Bernoullische Gleichung

Eulersche Gleichung:

$$\rho(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{r},t) + \nabla\frac{\mathbf{u}(\mathbf{r},t)^2}{2} - \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\times\omega(\mathbf{r},t)) = -\nabla p(\mathbf{r},t) - \rho\nabla U(\mathbf{r}) \tag{1.49}$$