Exakte Lösung des zweidimensionalen Ising-Modells

Vortrag von Björn Vogt

13. November 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Casimir, der aufgrund der Verwicklungen des Zweiten Weltkriegs von den aktuellen Entwicklungen der Physik der 40er Jahre abgeschnitten war, fragte bei Pauli an, was denn in der Theorie geschehen sei. Pauli antwortete:

> Nicht so viel Interessantes...außer Onsagers exakter Lösung des zweidimensionalen Ising-Modells.

Dieser Kommentar soll verdeutlichen, welche Bedeutung dieser Lösung in der Historie der Theoretischen Physik zukommt. Schließlich handelt es sich bei dem Ising-Modell um das einzige nicht-triviale statistische Modell, das analytisch lösbar ist und einen Phasenübergang aufweist. In allen anderen Fällen ist man auf entsprechende Näherungsmethoden angewiesen. Die Existenz einer exakten, analytischen Methode versetzt einen nun in die Lage, die Verläßlichkeit dieser Näherungsmethoden zu überprüfen. Davon abgesehen ist aber diese Existenz alleine bemerkenswert, da nunmehr gezeigt ist, daß die Theorie Phasenübergänge beinhaltet.

2 Das eindimensionale Ising-Modell

2.1 Entstehung der Modell-Idee

Um 1920 versuchte Wilhelm Lenz in Hamburg ein mikroskopisches Modell des Ferromagnetismus zu entwerfen. Sein Student Ernst Ising bekam als Thema seiner Dissertationsschrift die Aufgabe, dieses Modell in einer Dimension zu lösen.
Bei dem eindimensionalen Ising-Modell handelt es sich um eine Kette von n Spins mit folgenden Eigenschaften:

- Jeder Kettenpunkt besitzt einen Spin mit zwei Einstellmöglichkeiten. Dies kann durch eine klassische Spinvariable $s_i = \pm 1$ ausgedrückt werden.
- Es besteht eine Nächste-Nachbar-Wechselwirkung, die die Parallelstellung benachbarter Spins bevorzugt.
- Die Spins können sich zusätzlich in einem äußeren Magnetfeld ausrichten. Dieser Punkt wird im Folgenden aber keine Beachtung finden, da das zweidimensionale Ising-Modell nur für ein verschwindendes äußeres Feld lösbar ist.

2.2 Lösung des eindimensionalen Modells mittels Transfermatrixmethode

Unter der Annahme einer homogenen und isotropen Wechselwirkung ergibt sich für die Energie der Kette:

$$H = -\epsilon \sum_{k=1}^{n} s_k s_{k+1} \tag{1}$$

Hierbei stellt ϵ die Kopplungskonstante dar. In (1) wurden periodische Randbedingungen angenommen, d.h. $s_{n+1} = s_1$. Topologisch gesehen wird dadurch die Kette zu einem Kreis geschlossen.
Mit (1) läßt sich nun die kanonische Zustandssumme aufstellen:

$$\begin{aligned} Z = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2} \ldots \sum_{s_n} \exp\left(-\beta H\right) &= \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2} \ldots \sum_{s_n} \exp\left(\beta\epsilon \sum_{k=1}^{n} s_k s_{k+1}\right) \\ &= \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2} \ldots \sum_{s_n} \left(\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\beta\epsilon s_k s_{k+1}\right)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Zustandssumme soll nun ausgerechnet werden mit Hilfe der *Transfermatrix*, mit der Onsager das zweidimensionale Modell lösen konnte. Wir werden gleich sehen, daß dieser Formalismus die Lösung des eindimensionalen Modells sehr einfach erscheinen läßt.
Die Elemente der Transfermatrix $\mathcal{P}$ seien folgendermaßen definiert:

$$\langle s_1 | \mathcal{P} | s_2 \rangle = \exp\left(\beta\epsilon s_1 s_2\right) \tag{3}$$

Dementsprechend hat die Transfermatrix $\mathcal{P}$ folgende Form:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} e^{+\beta\epsilon} & e^{-\beta\epsilon} \\ e^{-\beta\epsilon} & e^{+\beta\epsilon} \end{pmatrix}$$

Es handelt sich um eine 2×2-Matrix, da jeder Spin genau zwei Einstellmöglichkeiten hat.
Mit Hilfe von (3) läßt sich die Zustandssumme (2) schreiben als

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2} \ldots \sum_{s_n} \langle s_1|\mathcal{P}|s_2\rangle \langle s_2|\mathcal{P}|s_3\rangle \ldots \langle s_n|\mathcal{P}|s_1\rangle \\ &= \sum_{s_1=\pm 1} \langle s_1|\mathcal{P}^n|s_1\rangle \\ &= \mathrm{Sp}\,(\mathcal{P}^n)\ . \end{aligned} \tag{4}$$

Dabei wurde Gebrauch gemacht von den periodischen Randbedingungen und der Vollständigkeit der Spinzustände.
Da die Spur basisunabhängig ist, wählen wir zweckmäßigerweise die Diagonalbasis, in der $\mathcal{P}$ folgendes Aussehen hat:

$$\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \tag{5}$$

Die Diagonalisierung der Transfermatrix $\mathcal{P}$ stellt hierbei kein Problem dar.
Setzt man (5) in (4) ein, erhält man:

$$Z = (\lambda_+)^n \, + \, (\lambda_-)^n$$

2.3 Physikalische Ergebnisse

1925 gelang es Ernst Ising, das eindimensionale Modell (auf andere Weise) zu lösen. In zwei Dimensionen hatte er jedoch keinen Erfolg. Insofern mußte sich auch die physikalische Diskussion mit dem eindimensionalen Fall begnügen.
Die physikalischen Ergebnisse für diesen ließen aber zu Wünschen übrig: Es gab keinen Hinweis auf einen Phasenübergang. Insbesondere trat bei keiner Temperatur Spontane Magnetisierung auf, wie es von einem Ferromagneten zu erwarten wäre. Dementsprechend geriet dieses Modell zunächst in Vergessenheit. Es sollte seinen Siegeszug erst später antreten.

3 Das zweidimensionale Ising-Modell

3.1 Historische Entwicklung

Wiederbelebt wurde das Modell durch Peierls 1936. Er konnte prinzipiell zeigen, daß es in zwei Dimensionen einen Phasenübergang geben sollte. Seine Arbeit „On Ising's Model of Ferromagnetism“ war zugleich Namensgebung.
1941 gelang es Kramers und Wannier, den kritischen Punkt theoretisch zu bestimmen.
Der endgültige Durchbruch kam durch *Lars Onsager* 1944. Mit Hilfe der Transfermatrix gelang ihm eine analytische Berechnung der Zustandssumme für verschwindendes äußeres Feld. Trotz des Erfolges, nun eine analytische Lösung in der Hand zu haben, ging mit Onsagers Darstellung der Ruch des Obskuren einher: Die sehr lange Rechnung war schwer nachvollziehbar, die Vorgehensweise blieb oft unmotiviert (ohne Onsagers Leistung schmälern zu wollen).
Dies änderte sich, als *Bruria Kaufman* 1949 eine *wesentlich einfachere Darstellung der Onsager-Lösung* vorstellte. *Sie wird im Folgenden dargelegt.*

3.2 Aufstellung des Problems

Gegeben sei ein zweidimensionales Ising-Gitter mit m Zeilen und n Spalten.
Zunächst führen wir eine Zeilenvariable μ_α ein, die die Spinkonfiguration der α-ten Zeile beschreiben soll:

$$\mu_\alpha = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

Die Spinkonfiguration des gesamten Gitters ist dann durch $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$ gegeben.
Auch im zweidimensionalen Fall wollen wir von *periodischen Randbedingungen* Gebrauch machen. Die Periodizität bezieht sich dabei auf Spalten *und* Zeilen. D.h.

$$\mu_{m+1} = \mu_1 \qquad s_{n+1} = s_1. \tag{6}$$

Topologisch bedeutet dies, daß das flache zweidimensionale Gitter zu einem Torus verdreht wird. Aus diesem Grund nennt man (6) *toroidale Randbedingungen.*

Zur Aufstellung der Energie müssen die *Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen* berücksichtigt werden:

- Wechselwirkung innerhalb einer Zeile:

$$H(\mu_\alpha) = -\epsilon \sum_{k=1}^{n} s_k s_{k+1} \qquad \text{für die } \alpha\text{-te Zeile} \tag{7}$$

  Dies ist dieselbe Gleichung wie für eine eindimensionale Kette.

- Wechselwirkung benachbarter Zeilen:
  Für die Zeilen μ_α und $\mu_{\alpha+1}$ ergibt sich

$$H(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}) = -\epsilon \sum_{k=1}^{n} s_k^{(\alpha)} \, s_k^{(\alpha+1)} \;, \tag{8}$$

  wenn $s_k^{(\alpha)}$ für die Spinvariable in der k-ten Spalte und α-ten Zeile steht.

Die *Gesamtenergie* H ergibt sich dann aus (7) und (8) , indem über alle Zeilen summiert wird:

$$H = \sum_{\alpha=1}^{m} \{H(\mu_\alpha) + H(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1})\} \tag{9}$$

Mit (9) lautet die Zustandssumme

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\mu_1} \cdots \sum_{\mu_m} e^{-\beta H} \\ &= \sum_{\mu_1} \cdots \sum_{\mu_m} e^{-\beta \sum_{\alpha=1}^{m} \{H(\mu_\alpha) + H(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1})\}} \\ &= \sum_{\mu_1} \cdots \sum_{\mu_m} \left(\prod_{\alpha=1}^{m} e^{-\beta\{H(\mu_\alpha) + H(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1})\}} \right) \quad . \end{aligned} \tag{10}$$

Das folgende Vorgehen ist nun dem im Eindimensionalen sehr ähnlich.
Zuerst definieren wir uns die Elemente der *Transfermatrix* $\mathcal{P}$ als

$$\langle \mu_\alpha | \mathcal{P} | \mu_{\alpha+1} \rangle \quad = \quad e^{-\beta\{H(\mu_\alpha) + H(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1})\}} \quad . \tag{11}$$

Es handelt sich um eine $2^n \times 2^n$-Matrix, da jede Zeile 2^n verschiedene Spinkonfigurationen aufweist.
Mittels (11) läßt sich die Zustandssumme (10) schreiben als

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\mu_1} \ldots \sum_{\mu_m} \langle \mu_1 | \mathcal{P} | \mu_2 \rangle \langle \mu_2 | \mathcal{P} | \mu_3 \rangle \ldots \langle \mu_m | \mathcal{P} | \mu_1 \rangle \\ &= \sum_{\mu_1} \langle \mu_1 | \mathcal{P}^m | \mu_1 \rangle \\ &= \mathrm{Sp}\,(\mathcal{P}^m) \quad , \end{aligned} \tag{12}$$

wobei Gebrauch gemacht wurde von der Vollständigkeit der Zustände und den periodischen Randbedingungen (6).
Die Spur wird zweckmäßigerweise in der Diagonalbasis berechnet, in der $\mathcal{P}$ folgende Form hat:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_{2^n} \end{pmatrix}$$

Damit lautet nun die Zustandssumme (12):

$$\boxed{Z = \sum_{\alpha=1}^{2^n} (\lambda_\alpha)^m}$$

Wie im eindimensionalen Fall haben wir die Berechnung der Zustandssumme zurückgeführt auf die Diagonalisierung der Transfermatrix.
Im Gegensatz zum Eindimensionalen stellt die Diagonalisierung der Transfermatrix jedoch ein Problem dar, was uns im nächsten, längeren Abschnitt beschäftigen wird.

3.3 Diagonalisierung der Transfermatrix $\mathcal{P}$

3.3.1 Aufspaltung von $\mathcal{P}$ in V_2 und V_1'

Die Transfermatrixelemente zwischen zwei benachbarten Zeilen μ und μ' lauten gemäß (11)

$$\langle \mu | \mathcal{P} | \mu' \rangle = e^{-\beta \left\{ H(\mu) + H\left(\mu, \mu'\right) \right\}} \; .$$

Ausgeschrieben heißt dies, wenn man (7) und (8) einsetzt:

$$\begin{aligned} \langle s_1, \ldots, s_n | \mathcal{P} | s_1', \ldots, s_n' \rangle &= e^{\beta\epsilon \sum_{k=1}^n s_k s_{k+1} + \beta\epsilon \sum_{k=1}^n s_k s_k'} \\ &= \prod_{k=1}^n e^{\beta\epsilon s_k s_{k+1}} \; e^{\beta\epsilon s_k s_k'} \end{aligned}$$

Wir spalten nun $\mathcal{P}$ auf in ein Produkt der beiden $2^n \times 2^n$- Matrizen V_2 und V_1' :

$$\boxed{\mathcal{P} = V_2 \, V_1'}$$

Dies gelingt durch

$$\begin{aligned} \langle s_1, \ldots, s_n | V_2 | s_1', \ldots, s_n' \rangle &= \delta_{s_1 s_1'} \ldots \delta_{s_n s_n'} \prod_{k=1}^n e^{\beta\epsilon s_k s_{k+1}} \\ \langle s_1, \ldots, s_n | V_1' | s_1', \ldots, s_n' \rangle &= \prod_{k=1}^n e^{\beta\epsilon s_k s_k'} \; , \end{aligned} \tag{13}$$

was man durch einfaches Nachrechnen der Matrixelemente zeigen kann.

3.3.2 Direktes Matrizenprodukt

A und B seien $l \times l$- Matrizen mit den Matrixelementen $\langle i\,|A|\,j\rangle$ und $\langle i\,|B|\,j\rangle$.
Definition: $A \times B$ heißt *Direktes Produkt*, falls

$$\langle ii'\,|A \times B|\,jj'\rangle = \langle i\,|A|\,j\rangle\,\langle i'\,|B|\,j'\rangle \ . \tag{14}$$

$A \times B$ ist damit eine $l^2 \times l^2$- Matrix. (14) ist so zu verstehen, daß die Matrixelemente von A in der Basis $|i\rangle$ und die Matrixelemente von B in einer anderen Basis $|i'\rangle$ berechnet werden.
Dies läßt sich in der Matrixschreibweise veranschaulichen: Es sei $A^{2\times2}$ eine 2×2-Matrix. Dann ist

$$A^{4\times4} = A^{2\times2} \times \underline{\underline{1}}^{2\times2} = \begin{pmatrix} A^{2\times2} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{1}}^{2\times2} \end{pmatrix} \ ,$$

wenn man die beiden zweikomponentigen (Spalten-) Basisvektoren untereinander schreibt als neuen vierkomponentigen Gesamtbasisvektor.

$$B^{4\times4} = \underline{\underline{1}}^{2\times2} \times B^{2\times2} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{1}}^{2\times2} & 0 \\ 0 & B^{2\times2} \end{pmatrix} \ ,$$

Es gilt wegen (14)

$$A^{2\times2} \times B^{2\times2} = A^{4\times4} \cdot B^{4\times4} \ , \tag{15}$$

wie man durch Nachrechnen der Matrixelemente zeigen kann.
Damit folgt:

$$A^{2\times2} \times B^{2\times2} = \begin{pmatrix} A^{2\times2} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{1}}^{2\times2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{1}}^{2\times2} & 0 \\ 0 & B^{2\times2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{2\times2} & 0 \\ 0 & B^{2\times2} \end{pmatrix}$$

Jetzt ist klar, daß A nur mit den oberen beiden Komponenten des vierkomponentigen Basisvektors, d.h. nur mit einer Basis in Berührung kommt, genauso wie daß B nur mit den unteren beiden Komponenten des vierkomponentigen Basisvektors, d.h. nur mit der anderen Basis in Berührung kommt.

Die Verallgemeinerung von (14) für mehrere Matrizen lautet:

$$\langle ii' \ldots i''\,|A \times B \times \ldots \times C|\,jj' \ldots j''\rangle = \langle i\,|A|\,j\rangle\,\langle i'\,|B|\,j'\rangle \ldots \langle i''\,|C|\,j''\rangle \tag{16}$$

3.3.3 Darstellung von V_2 und V_1' als Direkte Produkte

Behauptung:

$$V_1' = a \times a \times \ldots \times a \tag{17}$$

V_1' ist n-faches direktes Produkt einer 2×2-Matrix a mit sich selbst, wobei

$$\langle s\,|a|\,s'\rangle = e^{\beta\epsilon s s'} \tag{18}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle s_1, \ldots, s_n\,|V_1'|\,s_1', \ldots, s_n'\rangle &= \langle s_1, \ldots, s_n\,|a \times a \times \ldots \times a|\,s_1', \ldots, s_n'\rangle \\ &\overset{(16)}{=} \langle s_1\,|a|\,s_1'\rangle\,\langle s_2\,|a|\,s_2'\rangle \ldots \langle s_n\,|a|\,s_n'\rangle \\ &\overset{(18)}{=} e^{\beta\epsilon s_1 s_1'} \cdot e^{\beta\epsilon s_2 s_2'} \cdot \ldots \cdot e^{\beta\epsilon s_n s_n'} \\ &= \prod_{k=1}^{n} e^{\beta\epsilon s_k s_k'} \end{aligned}$$

Dies ist gerade (13).
Desweiteren läßt sich durch Nachrechnen zeigen, daß sich a durch eine Paulimatrix ausdrücken läßt:

$$a = \sqrt{2\sinh(2\beta\epsilon)} \cdot e^{\theta X} \tag{19}$$

$$\text{mit} \quad \tanh\theta = e^{-2\beta\epsilon} \quad \text{und} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit (19) hat (17) folgende Form:

$$V_1' = [2\sinh(2\beta\epsilon)]^{\frac{n}{2}} \; e^{\theta X} \times e^{\theta X} \times \ldots \times e^{\theta X} \tag{20}$$

Für spätere Zwecke bringen wir V_1' noch in eine andere Form. Dazu zunächst folgende *Definition:*

$$X_\alpha = \underline{\underline{1}} \times \underline{\underline{1}} \times X \times \ldots \times \underline{\underline{1}}$$

X_α ist ein n-faches direktes Produkt, wobei X an α-ter Stelle auftritt.
Aus der Definition des Direkten Matrizenproduktes (16) folgt folgende Relation:

$$e^{\theta X} \times e^{\theta X} \times \ldots \times e^{\theta X} \quad = \quad e^{\theta X_1} \cdot e^{\theta X_2} \cdot \ldots \cdot e^{\theta X_n} \tag{21}$$

(Man vergleiche mit (15).) Mit Relation (21) schreibt sich V_1' in (20) nun:

$$V_1' = [2\sinh(2\beta\epsilon)]^{\frac{n}{2}} \cdot \prod_{\alpha=1}^{n} e^{\theta X_\alpha}$$

Der Zweckmäßigkeit dienlich ist die Definition

$$\boxed{V_1 = \prod_{\alpha=1}^{n} e^{\theta X_\alpha}} \qquad \text{(ohne Strich)}\ , \tag{22}$$

so daß

$$V_1' = [2\sinh(2\beta\epsilon)]^{\frac{n}{2}} \cdot V_1 \ .$$

Eine analoge Vorgehensweise ergibt für V_2 :

$$\boxed{V_2 = \prod_{\alpha=1}^{n} e^{\beta\epsilon Z_\alpha Z_{\alpha+1}}} \tag{23}$$

$$\text{mit} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z_{n+1} = Z_1 \text{ wegen (6)}$$

Unser Augenmerk wird sich im Folgenden auf (22) und (23) richten.
Für den nächsten Schritt benötigen wir allerdings Kenntnis von Drehungen und deren Spindarstellungen. Das davon Benötigte soll im folgenden Exkurs bereitgestellt werden.

3.3.4 Exkurs: Drehungen und deren Spindarstellungen

Sei $\{\Gamma_\mu\}_{\mu=1,\dots,2n}$ ein System von $2n$ Matrizen und jedes Γ_μ eine $2^n \times 2^n$-Matrix mit folgender Eigenschaft:

$$\Gamma_\mu \, \Gamma_\nu \; + \; \Gamma_\nu \, \Gamma_\mu \; = \; 2 \, \delta_{\mu\nu} \; , \tag{24}$$

d.h. *antikommutierend.* Diese Matrizen mit der Eigenschaft (24) sind allgemein untersucht worden in einer grundlegenden Arbeit von Brauer und Weyl aus dem Jahre 1935. Als Spezialfälle ergeben sich für $n = 1$ die Paulischen Spinmatrizen und für $n = 2$ die Dirac-Matrizen.
Wir fassen zunächst die $\{\Gamma_\mu\}_{\mu=1,\dots,2n}$ in einem $2n$-komponentigen Spaltenvektor zusammen:

$$(\Gamma_\alpha) \quad = \quad \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{2n} \end{pmatrix}$$

Eine gewöhnliche Drehung dieses Vektors in der 2-dimensionalen $\mu\nu$-Ebene um den (komplexen) Winkel θ erreicht man mittels einer ordinären Drehmatrix $\omega(\mu\nu|\theta)$:

$$(\Gamma'_\alpha) = \omega(\mu\nu|\theta) \; (\Gamma_\alpha) \tag{25}$$

$$\text{mit} \;\; \omega(\mu\nu|\theta) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & -\sin\theta & \cdots & \cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} ,$$

wobei die Winkelfunktionen in der μ-ten und ν-ten Spalte bzw. Zeile auftauchen.
Die folgenden beiden Sätze werden uns bei der Diagonalisierung der Transfermatrix $\mathcal{P}$ von enormen Nutzen sein. Sie werden ohne Beweis angegeben.

Satz 1: Falls $(\Gamma'_\alpha) \; = \; \omega(\mu\nu|\theta) \; (\Gamma_\alpha)$,
dann $\Gamma'_\alpha \; = \; S\,(\omega) \cdot \Gamma_\alpha \; \cdot S^{-1}\,(\omega)$ (26)
mit $S\,(\omega) = S_{\mu\nu}\,(\theta) = e^{-\frac{\theta}{2}\Gamma_\mu\Gamma_\nu}$

Während (25) eine Transformation des gesamten Vektors durchführt, bezieht sich (26) auf eine einzelne Komponente dieses Vektors.
Da ω einen $2n$-komponentigen Vektor transformiert, hat ω die Dimension $2n \times 2n$. $S(\omega)$ hingegen transformiert eine Komponente dieses Vektors, die ihrerseits eine $2^n \times 2^n$-Matrix darstellt. Aus diesem Grund hat $S(\omega)$ die Dimension $2^n \times 2^n$.

Man nennt ω Drehung und $S(\omega)$ Spindarstellung der Drehung ω.
Gemäß Satz 1 können wir also jeder Drehung eine Spindarstellung zuordnen und umgekehrt. Wir werden dies später explizit ausnutzen.

Satz 2: Falls $\omega = \omega\,(\alpha\beta|\theta_1) \cdot \omega\,(\gamma\delta|\theta_2) \cdot \ldots \cdot \omega\,(\mu\nu|\theta_n)$, (27)
dann $S(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\theta_1\Gamma_\alpha\Gamma_\beta} \cdot e^{-\frac{1}{2}\theta_2\Gamma_\gamma\Gamma_\delta} \cdot \ldots \cdot e^{-\frac{1}{2}\theta_n\Gamma_\mu\Gamma_\nu}$ (28)

Falls ω die $2n$ Eigenwerte $e^{\pm i\theta_1}, e^{\pm i\theta_2}, \dots, e^{\pm i\theta_n}$ hat , (29)
dann hat $S(\omega)$ die 2^n Eigenwerte $e^{\frac{i}{2}(\pm\theta_1\pm\theta_2\pm\ldots\pm\theta_n)}$. (30)

In (30) sind sämtliche $\pm$ unabhängig zu wählen. (29) sind die gewohnten Eigenwerte von Drehmatrizen. Satz 2 enthält also folgende Aussage: *Kennen wir die Eigenwerte der Drehung ω , so kennen wir damit auch die Eigenwerte der zugehörigen Spindarstellung $S(\omega)$ (und umgekehrt).*

Aus Satz 1 und Satz 2 folgt nun: *Zur Diagonalisierung der Spindarstellung einer Drehung ist es lediglich nötig, die Drehung zu diagonalisieren.*
Damit ist unser kleiner Exkurs beendet. Er wird sogleich Früchte tragen.

3.3.5 Formulierung von V_2 und V_1 als Spindarstellungen

Die $\{\Gamma_\mu\}_{\mu=1,\dots,2n}$ aus dem vorigen Unterabschnitt lassen sich durch Paulimatrizen darstellen. Aus einer speziellen Wahl folgt:

$$-i\Gamma_{2\alpha}\Gamma_{2\alpha-1} = X_\alpha$$

Damit lautet (22):

$$\boxed{V_1 = \prod_{\alpha=1}^{n} e^{\theta X_\alpha} = \prod_{\alpha=1}^{n} e^{-i\,\theta\,\Gamma_{2\alpha}\Gamma_{2\alpha-1}}} \tag{31}$$

Vergleicht man diese Form mit (28), so erkennt man: V_1 *ist die Spindarstellung einer Drehung.*

Analog erhält man für V_2 in (23):

$$\boxed{V_2 = e^{\,i\,\phi\,U\,\Gamma_1\Gamma_{2n}} \cdot \prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{-i\,\phi\,\Gamma_{2\alpha+1}\Gamma_{2\alpha}}} \tag{32}$$

$$\text{mit} \quad \phi = \beta\epsilon \quad \text{und} \quad U = X \times X \times \ldots \times X$$

Bis auf den ersten Faktor $e^{\,i\,\phi\,U\,\Gamma_1\Gamma_{2n}}$ ist V_2 damit ebenfalls die Spindarstellung einer Drehung.
Der Faktor $e^{\,i\,\phi\,U\,\Gamma_1\Gamma_{2n}}$ stammt dabei von den toroidalen Randbedingungen (6), da $Z_{n+1}Z_1$ nicht so einfach durch Γ-Matrizen dargestellt werden kann wie in den anderen Termen.

3.3.6 Aufspaltung von V in V^+ und V^- durch toroidale RB

Der Zweckmäßigkeit wegen definieren wir uns $V = V_2 V_1$, d.h. ausgeschrieben mit (31) und (32):

$$V = V_2\,V_1 = e^{\,i\,\phi\,U\,\Gamma_1\Gamma_{2n}} \cdot \prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{-i\,\phi\,\Gamma_{2\alpha+1}\Gamma_{2\alpha}} \cdot \prod_{\lambda=1}^{n} e^{-i\,\theta\,\Gamma_{2\lambda}\Gamma_{2\lambda-1}} \tag{33}$$

Aus den Eigenschaften von U folgt nun für den Faktor aus der toroidalen Randbedingung:

$$e^{\,i\,\phi\,U\,\Gamma_1\Gamma_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{1}} + U\right) e^{+i\,\phi\,\Gamma_1\Gamma_{2n}} + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{1}} - U\right) e^{-i\,\phi\,\Gamma_1\Gamma_{2n}} \tag{34}$$

Mit (34) lautet nun V aus (33):

$$\boxed{V = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{1}} + U\right)\, V^+ + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{1}} - U\right)\, V^-}$$

$$\text{mit} \quad \boxed{V^{\pm} = e^{\pm i\,\phi\,\Gamma_1\Gamma_{2n}} \cdot \prod_{\alpha=1}^{n-1} e^{-i\,\phi\,\Gamma_{2\alpha+1}\Gamma_{2\alpha}} \cdot \prod_{\lambda=1}^{n} e^{-i\,\theta\,\Gamma_{2\lambda}\Gamma_{2\lambda-1}}} \tag{35}$$

$V^{\pm}$ in (35) sind nun ohne Einschränkung Spindarstellungen von Drehungen.
Wir können nun unser im Exkurs bereitgestelltes Wissen zur Diagonalisierung anwenden.

3.3.7 Die Eigenwerte von V^+ und V^-

Wie wir uns im Exkurs erarbeitet haben, brauchen wir zur Diagonalisierung der $2^n \times 2^n$-dimensionalen Spindarstellungen $V^{\pm}$ lediglich die zugehörigen $2n \times 2n$-dimensionalen Drehungen, die wir $\Omega^{\pm}$ nennen wollen, zu diagonalisieren.
Nach Satz 2 können wir der Spindarstellung (28) die Drehung (27) zuordnen. Dementsprechend können wir den $V^{\pm}$ in (35) folgende Drehungen $\Omega^{\pm}$ zuordnen:

$$\Omega^{\pm} = \omega\,(1, 2n| \mp 2i\phi) \prod_{\alpha=1}^{n-1} \omega\,(2\alpha+1, 2\alpha| + 2i\phi) \prod_{\lambda=1}^{n} \omega\,(2\lambda, 2\lambda-1| + 2i\theta)$$

Die Diagonalisierung von $\Omega^{\pm}$ erfolgt in einer längeren Rechnung, die aber keine prinzipiellen Hürden mehr in den Weg stellt.
Als Eigenwerte ergeben sich:

$$\begin{aligned} &\text{EW zu } \Omega^+ : \quad e^{\pm\gamma_1}, e^{\pm\gamma_3}, e^{\pm\gamma_5}, \ldots, e^{\pm\gamma_{2n-1}} \\ &\text{EW zu } \Omega^- : \quad e^{\pm\gamma_0}, e^{\pm\gamma_2}, e^{\pm\gamma_4}, \ldots, e^{\pm\gamma_{2n-2}} \\ \text{mit } \cosh(\gamma_k) \;&=\; \cosh(2\phi)\cosh(2\theta) - \cos(\pi k/n)\sinh(2\phi)\sinh(2\theta) \end{aligned} \tag{36}$$

Nach Satz 2 haben die zugeordneten Spindarstellungen V^+ und V^- dann folgende Eigenwerte:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{EW zu } V^+ : & e^{\frac{1}{2}(\pm\gamma_1\pm\gamma_3\pm\gamma_5\ldots\pm\gamma_{2n-1})} \\ \text{EW zu } V^- : & e^{\frac{1}{2}(\pm\gamma_0\pm\gamma_2\pm\gamma_4\ldots\pm\gamma_{2n-2})} \end{array}} \tag{37}$$

Dies sind jeweils 2^n Eigenwerte für V^+ und V^-.

3.3.8 Die Eigenwerte von V

Wir wählen eine spezielle Diagonalisierung für U:

$$U \longrightarrow \tilde{U} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{1}} & 0 \\ 0 & -\underline{\underline{1}} \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{1}}$ ist dabei $2^{n-1} \times 2^{n-1}$- dimensional.

Daraus und aus der Tatsache, daß U, V^+ und V^- vertauschen, folgt:

$$\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{1}} + \tilde{U}\right)\tilde{V}^+ = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{1}} - \tilde{U}\right)\tilde{V}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}^- \end{pmatrix} \tag{38}$$

Dabei sind $\mathcal{A}^+$ und $\mathcal{B}^-$ (nicht-diagonal) jeweils $2^{n-1} \times 2^{n-1}$- dimensional und haben dementsprechend 2^{n-1} Eigenwerte.

Wir können also nach (38) mit einer unabhängigen Diagonalisierung von $\frac{1}{2}(\underline{\underline{1}}+\tilde{U})\,\tilde{V}^+$

und $\frac{1}{2}(\underline{\underline{1}} - \tilde{U})\,\tilde{V}^-$ fortfahren und anschließend deren beiden Eigenwertsätze zusammen als Eigenwertsatz für V identifizieren.

Letztgenannte Diagonalisierung führt lediglich zu einer Zusatzbedingung für die Eigenwerte (37), die gerade die Hälfte von ihnen aussortiert:

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} \text{EW zu } \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{1}} + \tilde{U}\right)\ \tilde{V}^+ :\ \ e^{\frac{1}{2}(\pm\gamma_1\pm\gamma_3\pm\gamma_5\ldots\pm\gamma_{2n-1})} \\ \text{EW zu } \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{1}} - \tilde{U}\right)\ \tilde{V}^- :\ \ e^{\frac{1}{2}(\pm\gamma_0\pm\gamma_2\pm\gamma_4\ldots\pm\gamma_{2n-2})} \end{array}}\right\}\ \begin{array}{l}\text{jeweils mit gerader Anzahl}\\ \text{an Minuszeichen}\end{array} \tag{39}$$

Dies sind in der Tat jeweils 2^{n-1} Eigenwerte, die zusammen die 2^n Eigenwerte für V ergeben. Der Eigenwertsatz von V setzt sich somit zusammen aus je der Hälfte der Eigenwerte von V^+ und V^-.

Die Eigenwerte von $\mathcal{P}$ und V unterscheiden sich lediglich um den Vorfaktor $[2\sinh(2\beta\epsilon)]^{\frac{n}{2}}$. *Damit haben wir die Diagonalisierung der Transfermatrix $\mathcal{P}$ abgeschlossen.*

3.3.9 Zusammenfassung

Zur Diagonalisierung der Transfermatrix $\mathcal{P}$ haben wir folgende Schritte unternommen:
Wir haben $\mathcal{P}$ aufgespalten in $\mathcal{P} = V_2V_1' = [2\sinh(2\beta\epsilon)]^{\frac{n}{2}}\,V_2V_1$, was später wegen $V = V_1V_2$ zu $\mathcal{P} = [2\sinh(2\beta\epsilon)]^{\frac{n}{2}}\,V$ wurde. V_2 und V_1 konnten als direkte Produkte, die Pauli-Matrizen enthielten, formuliert werden. Nach einem kleinen Exkurs über Spindarstellungen von Drehungen konnten wir feststellen, daß es sich bei V_1 um eine solche handelte. V_2 war eine eben solche, allerdings nur bis auf einen ersten Faktor, der seinen Ursprung in den toroidalen Randbedingungen hatte. Dieser bewirkte nun eine Aufspaltung $V = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{1}} + U\right)\ V^+ + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{1}} - U\right)\ V^-$. V^+ und V^- waren nun ohne Einschränkung Spindarstellungen. Daher waren wir in der Lage, diesen Drehungen $\Omega^\pm$ zuzuordnen. Deren Diagonalisierung war unproblematisch. Aus den Eigenwerten der Drehungen $\Omega^\pm$ konnten wir nun aber die Eigenwerte der Spindarstellungen $V^\pm$ direkt ableiten. Die Begründung hierzu hatten wir im Exkurs geliefert. Die Eigenwerte von V ließen sich dann den Eigenwerten von $V^\pm$ entnehmen. Der Eigenwertsatz von V setzte sich zusammen aus je der Hälfte der Eigenwerte von V^+ und V^-. Damit hatten wir V und $\mathcal{P} = [2\sinh(2\beta\epsilon)]^{\frac{n}{2}}\,V$ diagonalisiert.

3.4 Zustandssumme

Es waren $\mathcal{P} = [2\sinh(2\beta\epsilon)]^{\frac{n}{2}}\,V$ und $Z = \mathrm{Sp}(\mathcal{P}^m)$. D.h. es ist

$$Z = [2\sinh(2\beta\epsilon)]^{\frac{n\cdot m}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{2^n} (\lambda_i)^m \quad ,$$

wenn λ_i die Eigenwerte (39) von V bezeichnet.
Einsetzen von (39) liefert:

$$\begin{aligned} Z \ &= \ [2\sinh(2\beta\epsilon)]^{\frac{n\cdot m}{2}} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{\{gerade-\}} e^{\frac{m}{2}(\pm\gamma_1\pm\gamma_3\pm\gamma_5\ldots\pm\gamma_{2n-1})} + \sum_{\{gerade-\}} e^{\frac{m}{2}(\pm\gamma_0\pm\gamma_2\pm\gamma_4\ldots\pm\gamma_{2n-2})} \right\} \end{aligned}$$

Damit können wir das zweidimensionale Ising-Modell als prinzipiell gelöst ansehen.

3.5 Physikalische Diskussion

Im thermodynamischen Limes $m, n \longrightarrow \infty$ trägt nur der größte Eigenwert in (39) zur Zustandssumme bei. Eine Untersuchung von (36) ergibt, daß
$e^{\frac{1}{2}(+\gamma_1+\gamma_3+\gamma_5+\ldots+\gamma_{2n-1})}$ der größte Eigenwert in (39) ist.
Damit lautet die Zustandssumme im thermodynamischen Limes:

$$Z = [2\sinh(2\beta\epsilon)]^{\frac{n \cdot m}{2}} \cdot e^{\frac{m}{2}(+\gamma_1+\gamma_3+\gamma_5+\ldots+\gamma_{2n-1})}$$

Es läßt sich zeigen, daß dieser Limes auch existiert.
Dessen explizite Berechnung führt zu folgenden physikalischen Resultaten:

- Die Spezifische Wärme weist eine logarithmische Divergenz auf.
- Es existiert eine Spontane Magnetisierung $\neq 0$ unterhalb einer kritischen Temperatur T_c.

Diese Ergebnisse sind eindeutige Belege für einen Phasenübergang 2. Ordnung. Das bedeutet, daß über die nächste-Nachbar-Wechselwirkung langreichweitige Korrelationen zwischen den Ising-Spins entstehen. Der Wunsch benachbarter Spins nach paralleler Ausrichtung führt zur Ausbildung ganzer Cluster, in denen alle Spins in eine Richtung zeigen. Oberhalb der kritischen Temperatur zerstört die thermische Unordnung die Korrelationen und verhindert damit das Einfrieren der Parallelstellung. Die Spinrichtungen sind nun unabhängig voneinander und es bilden sich keine Cluster aus. Die magnetischen Momente der Spins heben sich im Mittel auf und makroskopisch bleibt keine Spontane Magnetisierung übrig.
Das Ising-Modell beschreibt damit den Phasenübergang zwischen einem Ferro- und Paramagneten. Genau dies wollten Ising und Lenz erreichen.