institut für
theoretische physik

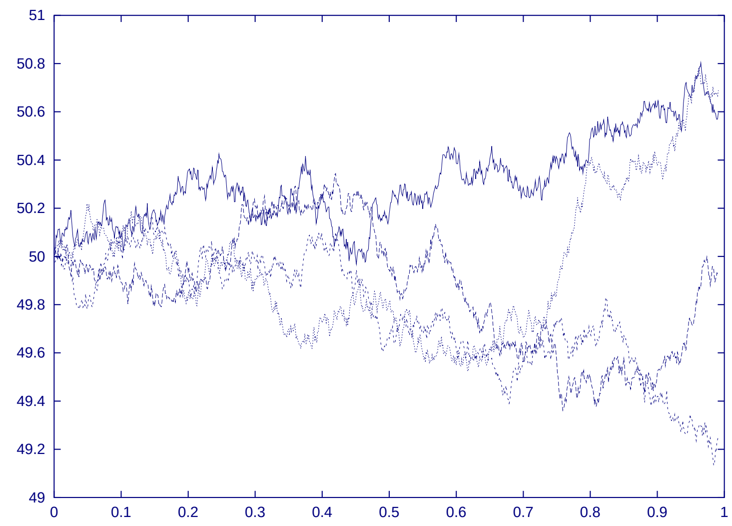
Optionspreistheorie

18. Juni 2002

Vortragende: André Ewering (ewering@uni-muenster.de)
Sönke Wissel (wissels@uni-muenster.de)

Begriffe

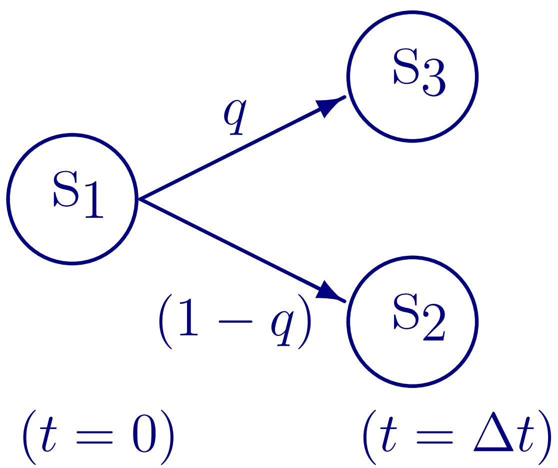
- Bond
- Stock
- Forward, Future
- Optionsscheine
  (europäische, amerikanische)
  - Call-Option
  - Put-Option
- Claim
- Derivat
- Portfolio



Binomialmodell für einen Zweig

Modellierung des „realen“ Finanzmarktes durch zwei Dinge:

- Aktie („symbolisiert“ Wert eines Unternehmens)
- Bond (Verzinsung, Inflation)



$$\underset{(t=0)}{B_0} \longrightarrow \underset{(t=\Delta t)}{B_0 \cdot \exp\{r \cdot \Delta t\}}$$

Europäischer O-Schein (Call)

Vereinbarung eines Handels, der folgendes sicherstellt:

- Kaufmöglichkeit der Aktie
- gehandelte Aktie
- Handelspreis E (Basispreis)
- Datum des Handels

$\Longrightarrow$ Wie sichern die Herausgeber von O-Scheinen sich gegen Verluste ab?

Risikoabsicherung

Je nach Kursentwicklung der Aktie ergibt sich:

- $V(3) = max(s_3 - E, 0)$ (Kurs steigt)
- $V(2) = max(s_2 - E, 0)$ (Kurs fällt)

Absicherung der Verluste durch Zusammenstellung eines Portfolios (Δ, ψ):

- Aktie Δ
- Bond ψ

$\Longrightarrow$ Portfolio: $\Delta s_1 + \psi B_0$ (zur Zeit $t = 0$)

Je nach Kursentwicklung ergibt sich für das Portfolio nach Δt:

- $\Delta s_3 + \psi B_0 \cdot \exp\{r \cdot \Delta t\}$ (Kurs steigt)
- $\Delta s_2 + \psi B_0 \cdot \exp\{r \cdot \Delta t\}$ (Kurs fällt)

Portfolio soll den O-Schein absichern $\Longrightarrow$ konstruiere Nullsummenspiel:

- $V(3) = \Delta s_3 + \psi B_0 \cdot \exp\{r \cdot \Delta t\}$ (Kurs steigt)
- $V(2) = \Delta s_2 + \psi B_0 \cdot \exp\{r \cdot \Delta t\}$ (Kurs fällt)

Nach etwas Rechnung ist für $s_2 \neq s_3$:

$$\Delta = \frac{V(3) - V(2)}{s_3 - s_2} \qquad \psi = B_0^{-1} \exp\{-r \cdot \Delta t\} \left\{ \frac{s_3 V(2) - s_2 V(3)}{s_3 - s_2} \right\}$$

No-Arbitrage und Hedging

Das „No-Arbitrage“ -Prinzip verbietet:

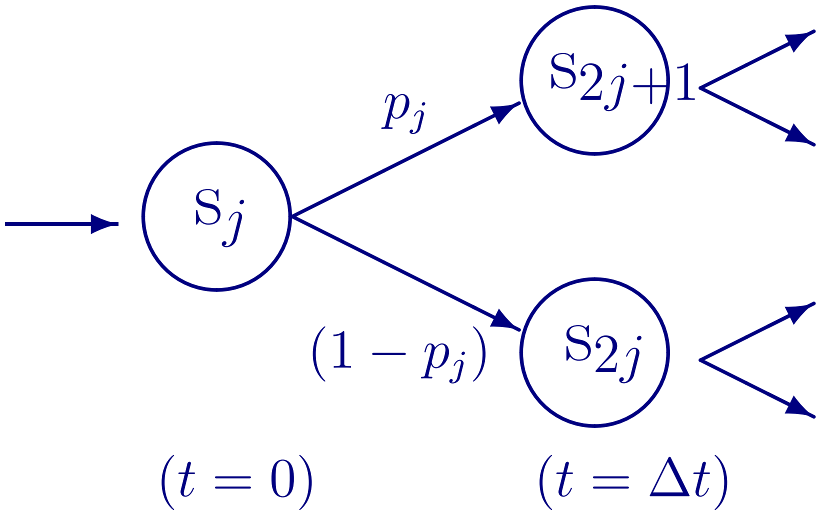
- risikolosen Profit zu machen
- Preisfluktuationen im Markt

Hedging $\Longleftrightarrow$ Nullsummenspiel

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad V(1) &= \Delta s_1 + \psi B_0 \\
&= s_1 \frac{V(3) - V(2)}{s_3 - s_2} + \exp\{-r \cdot \Delta t\} \left\{ \frac{s_3 V(2) - s_2 V(3)}{s_3 - s_2} \right\} \\
&= \exp\{-r \cdot \Delta t\} \Big((1-p) V(2) + p V(3) \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\text{mit} \quad p = \frac{s_1 \exp\{-r \cdot \Delta t\} - s_2}{s_3 - s_2}\,, \quad \text{wobei} \quad 0 < p < 1
$$

Der allgemeine Zweig



$$V(j) \;=\; \exp\{-r\cdot\Delta t\}\,\Big((1-p_j)V(2j)+p_jV(2j+1)\Big)$$

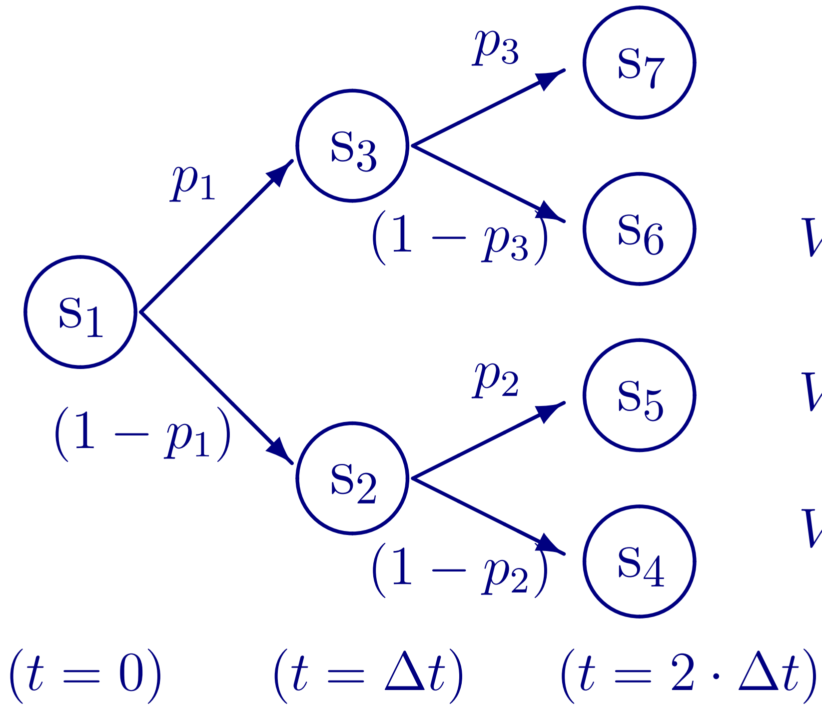
$$\text{mit}\quad p_j=\frac{s_j\exp\{-r\cdot\Delta t\}-s_{2j}}{s_{2j+1}-s_{2j}}$$

Definitionen

Pfad-W'keit $\Leftrightarrow$ Produkt aller Einzelw'keiten entlang der Pfade in einem Baum.

Optionspreis $\Leftrightarrow$ Summe der Preise an den Baumspitzen gewichtet mit ihren Pfad-W'keiten und multipliziert mit entsprechendem Diskontierungsfaktor.

Ein Beispiel: 2-Perioden Binomialmodell



$$V(1) = \exp\{-r\cdot\Delta t\}\Big(p_1 V(3) + (1-p_1)V(2)\Big)$$

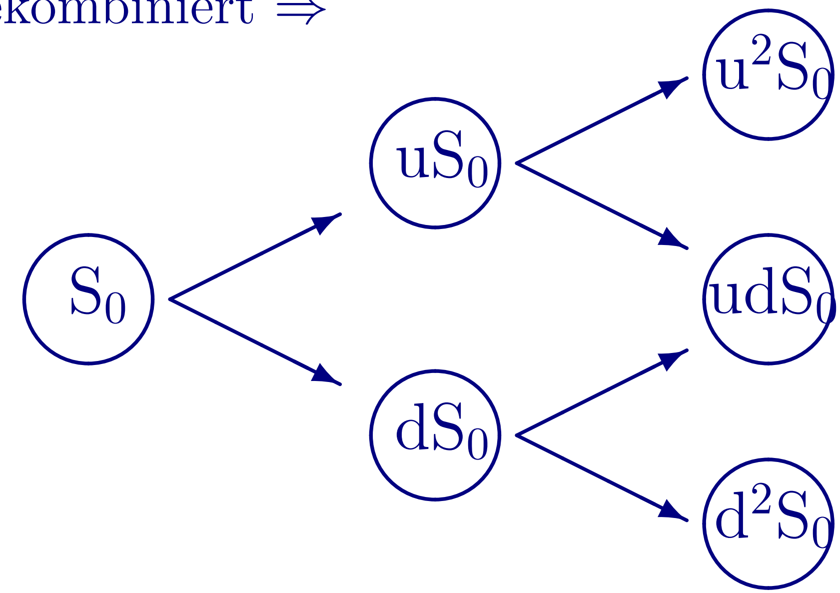
$$V(2) = \exp\{-r\cdot\Delta t\}\Big(p_2 V(5) + (1-p_2)V(4)\Big)$$

$$V(3) = \exp\{-r\cdot\Delta t\}\Big(p_3 V(7) + (1-p_3)V(6)\Big)$$

$$V(1) = \exp\{-2r\cdot\Delta t\}\Big(p_1 p_3 V(7) + p_1(1-p_3)V(6) + (1-p_1)p_2 V(5) + (1-p_1)(1-p_2)V(4)\Big)$$

Baummodell $(n = 2)$

rekombiniert $\Rightarrow$



$(t = 0)$ $(t = \Delta t)$ $(t = 2 \cdot \Delta t)$

$$\begin{aligned} p &= \frac{S_0 \exp\{r \cdot \Delta t\} - dS_0}{uS_0 - dS_0} \\ &= \frac{\exp\{r \cdot \Delta t\} - d}{u - d} \\ &= konst. \end{aligned}$$

$$V(S_0) = \exp\{-2r \cdot \Delta t\} \Big(p^2 V(u^2 S_0) + 2p(1-p) V(udS_0) + (1-p)^2 V(d^2 S_0) \Big),$$

$$\text{wobei} \quad V(u^i d^j S_0) = max(u^i d^j S_0 - E, 0)$$

Baumformel

Für einen Baum der Periode n findet man:

$$
\begin{aligned}
V(S_0) &= \exp\{-nr\cdot\Delta t\}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\cdot max(u^j d^{n-j}S_0-E,0)\right)\\
&= \exp\{-rT\}\left(\sum_{j=\lambda}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\cdot(u^j d^{n-j}S_0-E)\right)\\
&= S_0\cdot\mathcal{B}[\lambda,n,p^*]-k\cdot\exp\{-rT\}\cdot\mathcal{B}[\lambda,n,p]
\end{aligned}
$$

$$\text{mit}\quad T=n\cdot\Delta t\quad\text{und}\quad p^*=u\cdot\exp\{-rT\}\cdot p\quad\text{für}\quad u^\lambda d^{n-\lambda}S_0-E>0,$$

$$\text{wobei}\quad p=\frac{\exp r\cdot\Delta t-d}{u-d}$$

Anwendungen

Optionspreisberechnungen

- Europäische Optionen
- Amerikanische Optionen
- „exotische“ Optionen

Ableitung der Black-Scholes-Optionsformel
$\Longrightarrow$ Cox-Ross-Rubinstein Modell
dort: Klärung der Fragen:

- Was bedeuten u und d?
- Wie kann man u und d abschätzen?

Preis eines Calls $V_C(S,t)$ mit Basispreis E und Fälligkeit T bei einem Aktienkurs von $S(T)$:

$$V_C(S(T),T) = \max(S(T) - E, 0)$$

Wie groß aber ist $V(S,t)$ für $t < T$?

Was ist der angemessene (faire), gemittelte Preis einer solchen Option?

Dabei sollen folgende Annahmen gemacht werden:

- Es gibt keine Arbitrage-Möglichkeiten (Theorie des effizienten Marktes).
- Alle Variablen sind stetig.
- r (risikofreier Zinsatz) und σ (Volatilität[a]) sind zeitlich konstant.
- Es fallen keine Gebühren, Steuern oder Dividenden an.
- Der Aktienkurs S_t folgt einer geometrischen Brownschen-Bewegung

$\longrightarrow$ Antwort: V_C Lösung der Black-Scholes-DGL mit entsprechenden RB

[a] jährliche Schwankungsbreite des Kurses

Statistische Prozesse

Optionspreise sind abhängig von der zeitlichen Entwicklung ihres Underlyings (hier spez.: Aktienkurses)

$\longrightarrow$ Statistische Modelle

$\longrightarrow$ Stochastische Prozesse

Definition:

Ein stochastischer Prozess ist eine Folge von zufälligen Variablen $\{X_t, t \geq 0\}$.

Er wird in der Regel beschrieben durch stochastische Differentialgleichungen (SDG) wie

$$\begin{aligned} X_{t+\Delta t} &= X_t + \epsilon_t \qquad \text{zeitdiskret} \\ \dot{X}_t &= aX_t + bX_t\epsilon_t \qquad \text{zeitkontinuierlich} \end{aligned}$$

wobei ϵ_t durch eine Wahrscheinlichkeitsfunktion spezifiziert wird, wie z.B.

$$p(\epsilon) = N(\mu, \sigma)(\epsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\epsilon-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Spezielle Eigenschaften stochastischer Prozesse sind:

- X_t ist normalverteilt für alle t (Gauß-Prozess).
- Nur der augenblickliche Wert X ist relevant für das zukünftige Verhalten: d.h. die Vergangenheit ist bereits im augenblicklichen Wert berücksichtigt (Markov-Prozess).

Der Wiener-Prozess (Einstein-Wiener-Prozess)

- Wichtige Eigenschaften dieses Prozesses wurden schon von L. Bachelier im Jahr 1900 untersucht.
- Mit seiner Hilfe gelang A. Einstein 1905 die mathematische Beschreibung der 74 Jahre zuvor von dem englischen Botanikers Robert Brown entdeckten Brown'schen Molekularbewegung.

Definition:

Von einer zeitabhängigen Lösung $\{z_t, t \geq 0\}$, die einem Standard-Wiener-Prozess gehorchen soll, verlangt man:

1: $z_t - z_0$ ist normalverteilt mit der Varianz t und dem Mittelwert 0 ($z_t \sim N(0, t)$ (Gauß-Prozess))

2: Alle Zuwächse Δz sind statistisch von einander unabhängig. Allgemein gilt für $0 \leq s \leq t$ die Eigenschaft $z(t) - z(s) \sim N(0, t - s)$ (Markov-Prozess).

Welche stochastische Differentialgleichung (SDG) erfüllt z_t?

Es sei

$$\Delta t = \frac{t}{N} \quad \text{und}$$
$$z_t - z_0 = \textstyle\sum_{i=1}^{N} \Delta z \sim N(0,t) = N(0, N\Delta t),$$

so folgt aus der Markov-Eigenschaft des Prozesses und den Eigenschaften der Normalverteilung, dass

$$\Delta z \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$$

ist.

Mit

$$\epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$$

ist

- $\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$ der diskretisierte Wiener-Prozess (geometrische Irrfahrt)
- $dz = \epsilon\sqrt{dt}$ die SDG kontinuierlicher Wiener-Prozesse (geometrische Brownsche Bewegung)

Typische Eigenschaften solcher Zeitreihen (Pfade) sind:

- $E(z_t) = z_0$ und $var(z_t) = t$
- Pfade sind mit Wahrscheinlichkeit 1 stetig, aber nicht differenzierbar.
- Auch wenn ein Pfad einen beliebig großen Wert trifft, kehrt er immer irgendwann wieder zu seinem Ausgangspunkt zurück
- Pfade sind selbstähnlich.

Standard Wiener-Prozess z_t: $dz = \epsilon\sqrt{dt}$

$E(z_t) = z_0$ und $var(z_t) = t$

$\downarrow$

allgemeiner Wiener-Prozess W_t: $dW = \mu dt + \sigma dz$

zusätzliche Parameter μ (Driftrate) und σ (Volatilität)

$E(W_t) = W_0 + \mu t$ und $var(W_t) = \sigma^2 t$

$\downarrow$

Itô-Prozess S_t: $dS = \mu(S,t)dt + \sigma(S,t)dz$

(Standardmodell der Aktienpreisentwicklung: $\mu(S,t) = S\mu_0$ und $\sigma = S\sigma_0$)

Die zeitliche (statistische) Entwicklung von S ist also nun gegeben.

Wie groß ist aber nun $V(S,t)$?

$\Rightarrow$ Dazu zunächst ein Hilfsmittel: Das Itô-Lemma

Itô-Lemma

Frage:

Sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Itô-Prozess. Welche SDG hat $Y_t = g(X_t, t)$ als Lösung?

Idee:

$$\begin{aligned} Y_{t+dt} - Y_t &= g(X_{t+dt}, t+dt) - g(X_t, t) \\ &= \frac{\partial g}{\partial X}(X_t) \cdot dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(X_t) \cdot (dX_t)^2 + \frac{\partial g}{\partial t}(X_t)dt + \ldots \end{aligned}$$

In dX_t ist der Drift von der Ordnung dt und die Volatilität von der Ordnung $\sqrt{dt}$.

$$\begin{aligned} (dX_t)^2 &= \{\mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dz\}^2 \\ &= \mu^2(X_t, t)(dt)^2 + 2\mu(X_t, t)\sigma(X_t, t)dtdz + \sigma^2(X_t, t)(dz)^2 \end{aligned}$$

Der dritte Term ist noch von der Ordnung dt, während die erste beiden Terme von der Ordnung $(dt)^2$ bzw. $dt \cdot \sqrt{(dt)}$ sind und vernachlässigt werden können.

Daraus folgt das

Itô Lemma:

X_t folge einem Itô-Prozess und $g(x,t)$ sei eine Funktion mit stetigem $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \frac{\partial g}{\partial t}$.
Dann folgt auch $Y_t = g(X_t, t)$ einem Itô-Prozess mit dem gleichen Wiener-Prozess z:

$$\begin{aligned} dY_t &= dg(X_t, t) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial X}(X_t) \cdot \mu(X_t, t) + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(X_t) \cdot \sigma^2(X_t, t) \right) \cdot dt \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial X}(X_t) \sigma(X_t, t) \cdot dz \end{aligned}$$

1. Anwendung:

$Y_t = \ln(S_t)$

S_t ist Itô-Prozess mit $\mu(S_t, t) = \mu S_t$ und $\sigma(S_t, t) = \sigma S_t$.

Wegen $g(X) = \ln(X)$: $\frac{dg}{dX} = \frac{1}{X}$, $\frac{d^2 g}{dX^2} = -\frac{1}{X^2}$

ist daher

$$\begin{aligned} dY_t &= \left(\frac{1}{S_t}\mu S_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_i^2}\sigma^2 S_t^2\right) dt + \frac{1}{S_t} \cdot \sigma S_t dz_t \\ &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dz \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Y_t selbst ist ein allgemeiner Wiener-Prozess mit einer Driftrate $\mu^* = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ und einer Varianzrate σ^2.

$$Y_t \sim N(\mu^* t, \sigma^2 t) \Longrightarrow S_t \sim \ln \mathrm{normal}(\mu^* t, \sigma^2 t)$$

2. Anwendung:

Der Aktienpreis S_t folge einem Itô-Prozess, so gilt für den Optionspreis $V(S,t)$

$$
\begin{aligned}
dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu(S,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2(S,t) + \frac{\partial V}{\partial t}\right)\cdot dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma(S,t)\cdot dz \\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu_0 S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma_0^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\right)\cdot dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma_0 S\cdot dz
\end{aligned}
$$

Black-Scholes-Differentialgleichung

Ist es möglich ein Portfolio so zusammenzustellen, dass es nicht mehr zufallsabhängig ist? Antwort: Ja!

Portfolio P mit Δ Aktien zum Preis S und einer verkauften Call-Option $V_C = V$:

$$P(t) = \Delta \cdot S(t) - V(S(t), t)$$

Man kann nun mit

$$d(\Delta \cdot S)(t) = \Delta \cdot dS(t) = \Delta \cdot \sigma_0 S dz + \Delta \cdot \mu_0 S dt$$

folgern, dass auch

$$\begin{aligned} dP(t) &= d(\Delta \cdot S(t)) - dV(t) \\ &= \Delta\sigma_0 S dz + \Delta\mu_0 S dt - \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu_0 S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma_0^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt - \frac{\partial V}{\partial S}\sigma_0 S dz \\ &= \sigma_0 S \left(\Delta - \frac{\partial V}{\partial S}\right) dz - \left(\mu_0 S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma_0^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt \qquad (1) \end{aligned}$$

gilt.

Mit der Wahl $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ lässt sich das Zufallsmoment dz eliminieren und das Portfolio ist zufallsunabhängig.

Die Arbitragefreiheit fordert nun, dass ein solches Portfolio die risikolose Verzinsung aufweisen muss. Also

$$dP(t) = rP(t)dt = r\left(\Delta S(t) - V(t)\right)dt = r\left(\frac{\partial V}{\partial S}S(t) - V(t)\right)dt. \tag{2}$$

Schließlich erhält man mit (1) die gefeierte

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + rS(t)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma_0^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV(t) = 0}$$

Black-Scholes-Differentialgleichung

Lösungen der Black-Scholes-DGL

Es gilt die BS-DGL für $V(S(t), t)$ zu lösen unter der zeitlichen Randbedingung eines europäischen Calls

$$V(T) = \max\{S(T) - E, 0\}.$$

Mit den Variablentransformationen

$$\begin{aligned} S &= Ee^x \\ t &= T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \\ V &= Ev(x, \tau) \end{aligned}$$

wird aus der BS-DGL eine Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\gamma - 1)\frac{\partial v}{\partial x} - \gamma v$$

mit der dimensionslosen Größe $\gamma = \dfrac{2r}{\sigma_0^2}$ und der neuen Anfangsbedingung

$$v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0)$$

Der Ansatz

$$v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau} u(x,\tau)$$

führt mit der Wahl

$$\alpha = -\frac{1}{2}(\gamma - 1), \quad \beta = -\frac{1}{4}(\gamma + 1)^2$$

weiter zu der bekannten Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Die Randbedingung lautet hier dann

$$u(x,0) =: u_0(x) = \max(e^{\frac{1}{2}(\gamma+1)} - e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)x}, 0)$$

Die Lösung von (3) ist bekannt.

$$
\begin{aligned}
u(x,\tau) & \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\dfrac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}(\gamma+1)x + \frac{1}{4}(\gamma+1)^2\tau\right) N(d_1) - \exp\left(\frac{1}{2}(\gamma-1)x + \frac{1}{4}(\gamma-1)^2\tau\right) N(d_2)
\end{aligned}
$$

mit

$$
N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \quad \text{Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung} \tag{4}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\gamma+1)\sqrt{2\tau} \\
d_2 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\gamma-1)\sqrt{2\tau}.
\end{aligned}
$$

Durch Rücksubstitution gelangt man zur

$$\boxed{\begin{aligned} V(S(t),t) &= S(t)N(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \\ &= S(t)N(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_1 - \sigma\sqrt{\Delta\tau}) \quad \tau = T - t \\ & \textbf{Black-Scholes-Formel} \end{aligned}}$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma_0^2}{2})\tau}{\sigma_0\sqrt{\tau}}$$

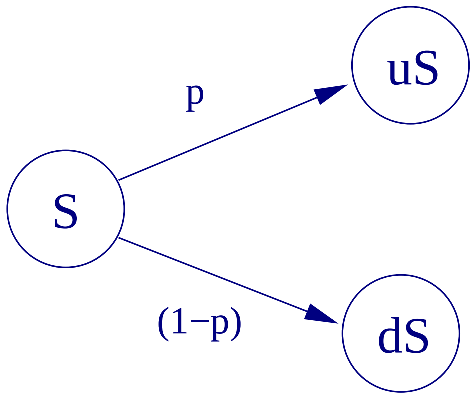
$$d_2 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r - \frac{\sigma_0^2}{2})\tau}{\sigma_0\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma_0\sqrt{\tau}$$

Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Dieses entspricht dem Binominialmodell mit Festlegung von u und d aus den Eigenschaften des Wiener-Prozesses und wird aufgrund seiner sehr einfachen numerischen Implementation in der Praxis häufig verwendet [8].

Es gilt wiederum:

A1: Der Preis S einer Aktie kann sich nach Ablauf von $\Delta t = \frac{T}{M}$ $(M \in \mathbb{N})$ nur zu zwei Kurswerten entwickeln



A2: Die Wahrscheinlichkeit einer Kurssteigerung ist p.

A3: zusätzlich: Der statistische Prozess der Aktienpreise ist ein Wiener-Prozess.

Wie groß sind dann u,d und p?

Dazu:

- Aus A3:

$$E =< \ln\left(S_{i+1}\right)) >= p\ln(uS_i) + (1-p)\ln(dS_i) = \ln(S_i) + \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$$
$$var(\ln(S_{i+1}))) = p\left\{\ln(uS_i) - E\right\}^2 + (1-p)\left\{\ln(dS_i) - E\right\}^2 = \sigma^2\Delta t$$

- willkürliche dritte Gleichung, die eine gewisse Symmetrie zwischen Kurssteigerung und Kursabfall reflektiert

$$u \cdot d = 1 \tag{5}$$

Damit ist

$$p\ln\left(\frac{u}{d}\right) + \ln(d) = \left(b - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$$
$$(1-p)p\left\{\left(\tfrac{u}{d}\right)\right\}^2 = \sigma^2\Delta t$$

und schließlich

$$p = \frac{1}{2} + \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{2}\sqrt{\frac{\Delta t}{1+\sigma^2}}, \qquad u = \exp\sigma\sqrt{\Delta t}$$

Mit diesen Werten können nun wiederum diskrete Werte von S für jedes t_i bis $t_M = T$ aus $S(t_0) = S_{00}$ berechnet werden.
Es ist mit $i = 1, \ldots, M$:

$$S_{ji} = S_{00} u^j d^{i-j}, \quad (j = 0, 1, \ldots, i) \qquad \text{Vorwärtsphase}$$

Mit den bekannten Endbedingungen für t_M, nämlich z.B. für einen Put $V_{jM} := \max(S_{jM} - E, 0)$, kann nun mit der Rekursion

$$V_{ji} = e^{-r\Delta t} \cdot (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}) \qquad \text{Rückwärtsphase}$$

der erwartete (abgezinste) faire Optionspreis bestimmt werden.
Für amerikanische Optionen muss darüberhinaus für jedes t_i zusätzlich noch überprüfen werden, ob eine vorzeitige Ausübung sinnvoller wäre

$$V_{ji} = \max\{\max(E - S_{ji}, 0), e^{-r\Delta t} \cdot (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1})\}$$

Put-Call-Parität

Mit Hilfe der Put-Call-Parität kann der Preis eines Puts berechnet werden.

Für den Wert eines europäischen Calls und eines europäischen Puts mit gleichen Verfallszeitpunkt T, gleichen Ausübungskurs E auf dasselbe Underlying gilt folgende Aussage

$$V_C(S_t, t) = V_P(S_t, t) + S_t - Ee^{-r(T-t)}$$

Beweis: Portfolio A enthalte einen Call V_C.

Portfolio B enthält einen Put V_P, eine Aktie S_t und eine Anleihe, die zum Zeitpunkt $T - E$ kostet, also abgezinst $-Ee^{-r\tau}$ wert ist. So sind zum Zeitpunkt T beide Portfolios gleich viel wert.

	Wert der Portfolios	
	$E < S_T$	$E \geq S_T$
Portfolio A		
Call	$S_T - E$	0
Portfolio B		
Put	0	$E - S_T$
Aktie	S_T	S_T
Anleihe	$-E$	$-E$
Summe	$S_T - E$	0

Dies gilt also (abgezinst) auch zum Zeitpunkt t q.e.d.

Schließlich erhält man

$$V_P(S(t), t) = e^{-r(T-t)} E N(-d_2) - S(t) N(-d_1) \tag{6}$$

Die Parameterbestimmung

In die BS-Formel geht die Volatilität σ_0 als ein freier Parameter ein. Dieser muss aus dem Marktgeschehen heraus entwickelt werden. Hierzu gibt es zwei Methoden:

Historische Volatilität

Die historische Volatilität ist ein Schätzer für σ auf der Grundlage des Schwankungsverhaltens des Aktienkurses in der Vergangenheit: Sei

$$R_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$$

dann besitzt aufgrund der Überlegungen aus R_t die Varianz

$$v = var(R_t) = \sigma^2 \Delta t \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{v/\Delta t}.$$

Ein guter Schätzer für v ist dann die Stichprobenvarianz $\hat{v}$

$$\hat{v} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} (R_t - \bar{R}_n)^2 \qquad \bar{R}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} R_t$$

Für die Wahl der Stichprobenparameter empfiehlt es sich

- Tageschlusskurse zu betrachten und Feiertage und Wochenden zu ignorieren ($\Delta t = \frac{1}{252}$).
- lediglich die Schlusskurse der letzten 90 oder 100 Tage zu berücksichtigen.

Implizierte Volatilität (implizite Volatilität)

Diese Volatilität wird einfach aus den auf dem Markt realisierten Optionspreisen über die BS-Formel berechnet.
Da diese sich nicht nach σ auflösen lässt, kann sie nur nummerisch bestimmt werden.

Beobachtung: Würden sich die Preise tatsächlich an der Black-Scholes-Formel orientieren, müssten alle ermittelten Volatilitäten gleich sein. In der Realität beobachtet man aber, dass Optionen mit unterschiedlichen (inneren) Werten $S(t) - E$ bei gleicher Zeit t unterschiedliche Volatilitäten aufweisen (Smile-Effekt).
Dabei heißt eine Option

- deep in the money, falls $S(t) >> E$
- in the money, falls $S(t) > E$
- at the money. falls $S(t) \approx E$
- out of money, falls $S(t) < E$
- deep out of money, falls $S(t) << E$

Hedgingstrategien (Die Griechen)

Delta-Hedging

Wie schon gesehen ist ein Portfolio P mit

$$P = \Delta S - V \quad \text{bzw.} \quad P = \phi \Delta S - \phi V \quad \text{mit} \quad \phi \in \mathbb{N}$$

risikoneutral (deltaneutral) oder formal

$$\Delta(P) = \frac{\partial P}{\partial S} = \phi\Delta - \phi\Delta = 0$$

Für Aktien und Terminkontrakte ist $\Delta = 1$

Für Optionen $\Delta = N(d_1)$ (Call-Option), $\Delta = N(d_1) - 1$

Gamma-,Theta-Hedging

Beim aktiven Management wird beim Δ-Hedging die Näherung $\Delta V_C = \Delta \cdot \Delta S$ verwendet. Genauer wäre aber

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx \frac{\partial V}{\partial S} \cdot \Delta S + \frac{\partial C}{\partial t} \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \\ &= \Delta \cdot \Delta S + \Theta \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\Gamma \Delta S^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Ausgehend von einem deltaneutralen Portfolio werden nun zusätzlich Optionen ge- oder verkauft, um ein Γ- und Θ-neutrales Portfolio zu bilden. Das neue Portfolio wird dann erneut wieder durch Kauf oder Verkauf von Aktien Δ-neutral gemacht.
Für Aktien und Terminkontrakte: $\Gamma = 0$
Für Optionen: $\Gamma = -\frac{\sigma_0 S}{2\sqrt{\tau}} N(d_1) - rEe^{-r\tau} N(d_2)$ und $\rho = E\tau e^{-r\tau} N(d_2)$ (Call-Option)

Vega- und Rho-Hedging

Durch die zeitlich nicht konstante Volatilitäten (Smile-Effekt) und Zinsen kann man nun noch

$$\mathcal{V} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \qquad \rho = \frac{\partial V}{\partial r}$$

einführen und damit sein Portflio hedgen.

Da ein Γ-neutrales Portfolio nicht automatisch $\mathcal{V}$-neutral ist, müssen andere Optionen gekauft werden.

Für Aktien und Terminkontrakte ist $\mathcal{V} = 0$

Für Optionen $\mathcal{V} \approx S\sqrt{\tau}N(d_2)$ (Call-Option)

Exotische Optionen

Zusammengesetzte Optionen (Compound Optionen)

- Optionen auf Optionen
- Mit Compound Optionen kauft man das Recht eine andere Option zu einem späteren Zeitpunkt zu kaufen
- 4 typische Arten
  - Call on a Call
  - Call on a Put
  - Put on a Call
  - Put on a Put
- Der Wert dieser Option lässt sich durch zweifaches Anwenden der Black-Scholes-Formel berechnen.

Chooser Optionen

auch: „Wie es euch gefällt“-Optionen

- Compound Option mit zusätzlicher Möglichkeit zum Zeitpunkt T_1 zwischen dem Kauf einer Call- (Call on a Call) oder einer Put-Option (Call on a Put) zu wählen
- Ihr Wert kann durch dreifaches Anwenden der Black-Scholes-Formel ermittelt werden

Barrier Optionen

- Aktienpfadabhängige Option
- Recht zur Ausübung der Option zum Zeitpunkt T hängt davon ab, ob S_t während des Zeitraums T eine (zeitabhängige) Schranke (Barriere B) nicht über- bzw. unterschritten (up-and) hat.
- Eine europäische Knock-out-Option wird wertlos, sobald der Kurs S_t die Barriere erreicht. Man unterscheidet
  - down-and-out: $S_t > B$ für alle $0 \leq t \leq T$
  - up-and-out: $S_t < B$ für alle $0 \leq t \leq T$
- Eine europäische Knock-in-Option ist umgekehrt solange wertlos, bis die Barriere erreicht wird.
  - down-and-in: $S_t \leq B$ für alle $0 \leq t \leq T$
  - up-and-in: $S_t \geq B$ für alle $0 \leq t \leq T$

Asiatische Optionen

- Wert der Option hängt von dem über die ganze Laufzeit oder einen vorher festgesetzten Zeitraum gemittelten Aktienkurs ab.
  Beipiel: europäische Average Strike Option
  - average strike call: $V(S_T, T) = \max\{S_T - S_{ave}, 0\}$
  - average strike put: $V(S_T, T) = \max\{S_{ave} - S_T, 0\}$

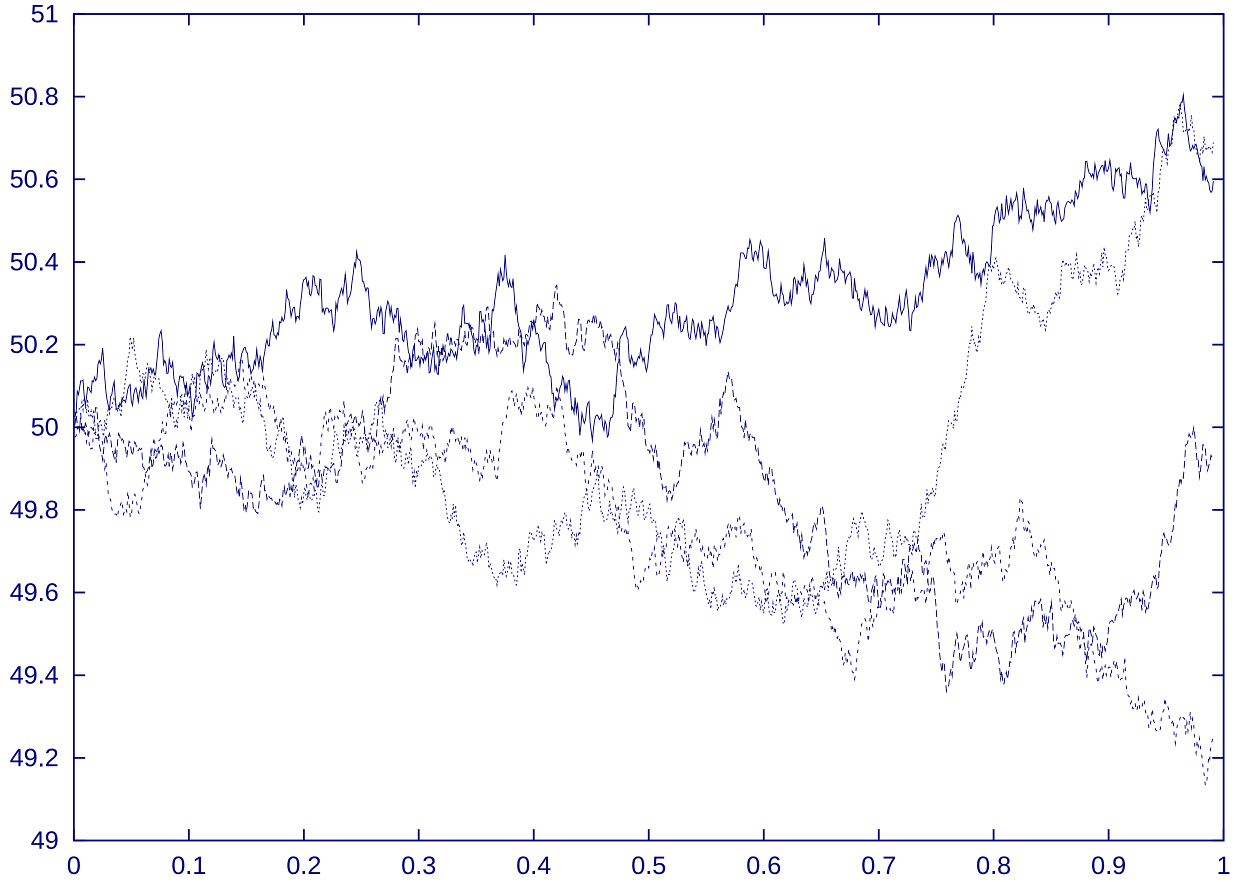
$$S_{ave} = \frac{1}{T}\int_0^t S_s ds$$

Lookback Optionen

- Wert der Lookback-Option hängt vom Maximum oder Minimum des Aktienkurses über die gesamte Laufzeit ab.
  - $E_{ax} = \max\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$
  - $E_{in} = min\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$
- Beispiel:
  Europäische Lookback-Call Option
  - $V(S_T, T) = \max\{S_T - E_{min}, 0\}$
  - der Halter kann die Aktien zum niedrigsten Preis kaufen

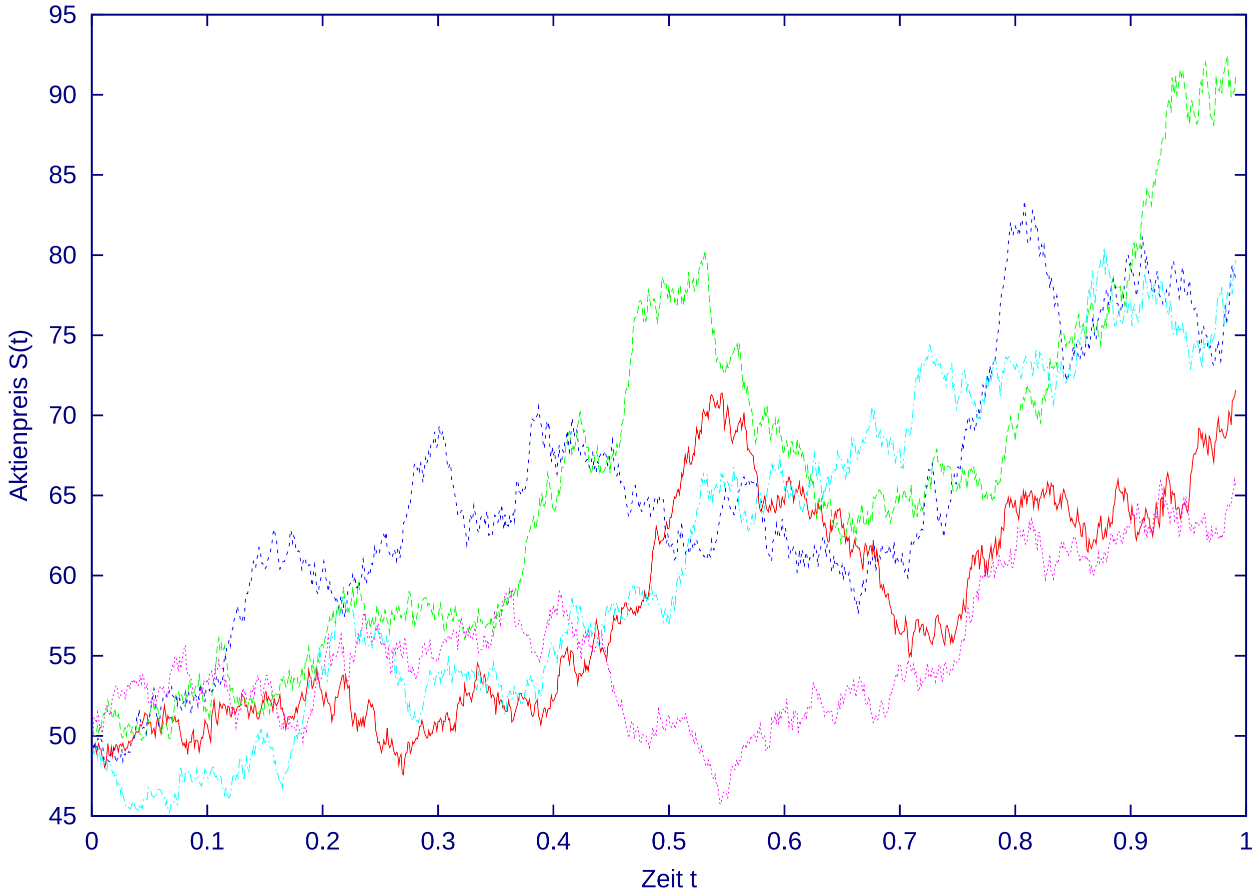
Pfade der geometrischen Irrfahrt

Parameter: $T = 1.0$ und $dt = 0.001$



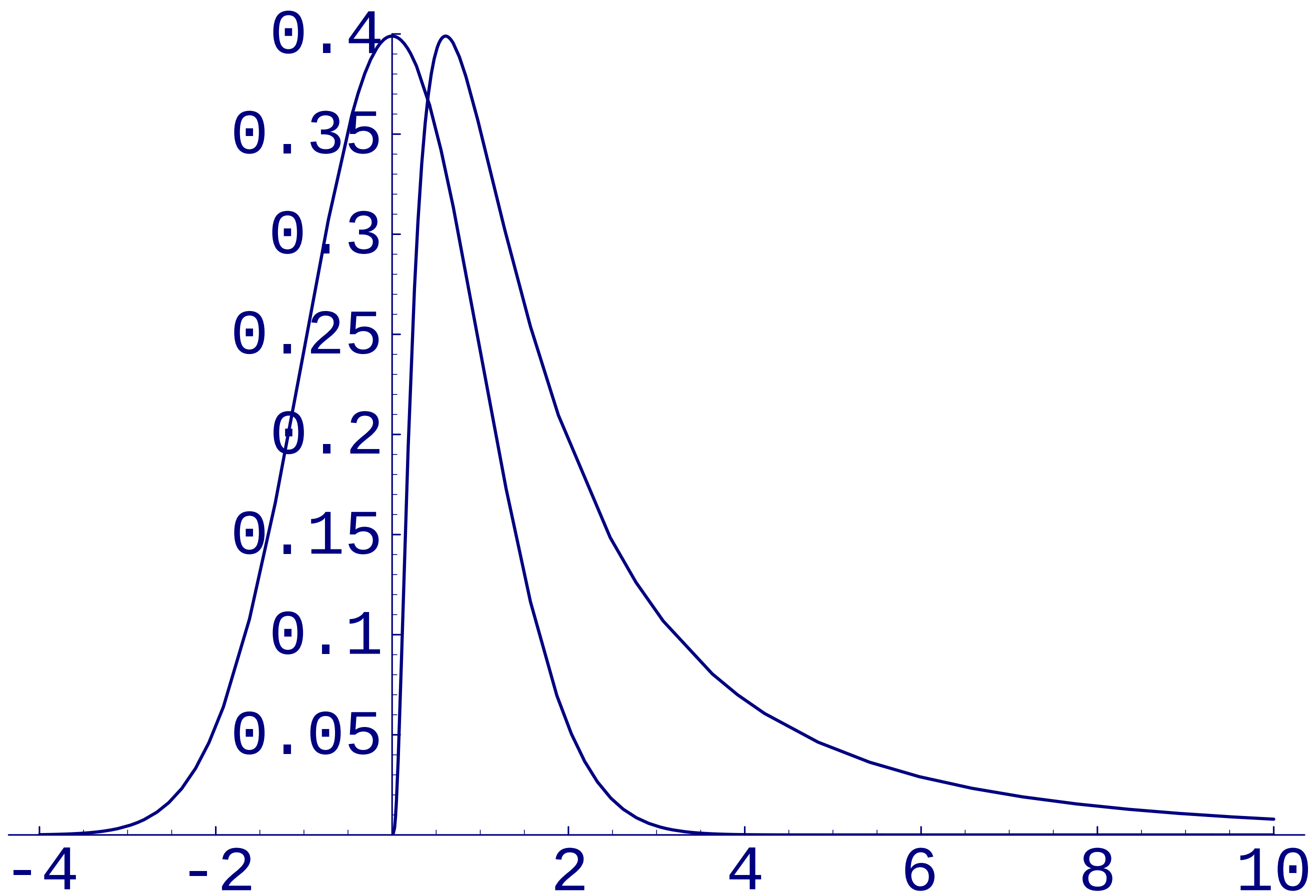
Mögliche Aktienpreisentwicklungen nach dem Itô-Prozess

Parameter: $E = 50$, $r = 0.3$, $\sigma = 0.4$, $T = 1.0$ und $dt = 0.001$



Normal und Log-Normal Verteilungen

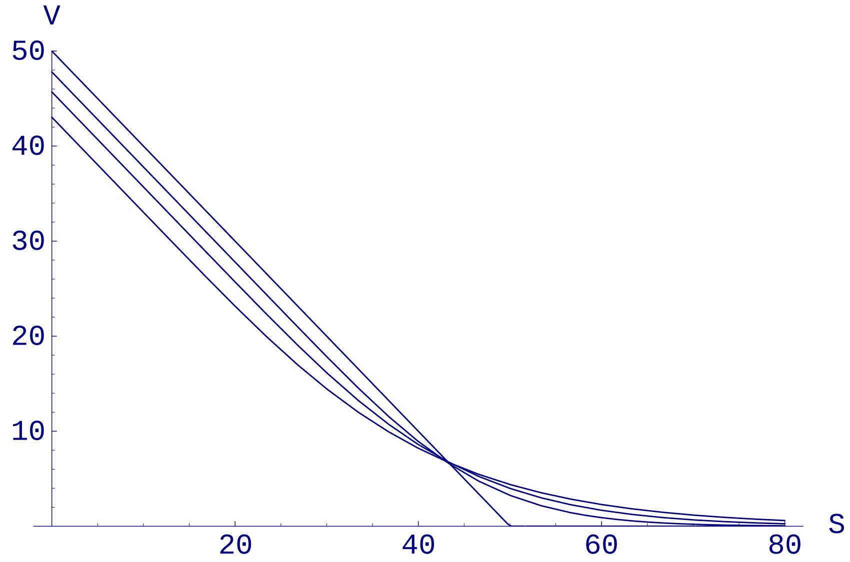
Parameter: $\sigma = 1$ und $\mu = 0.0$



$V(S,t)$ eines europ. Puts/Calls nach der BS-Formel

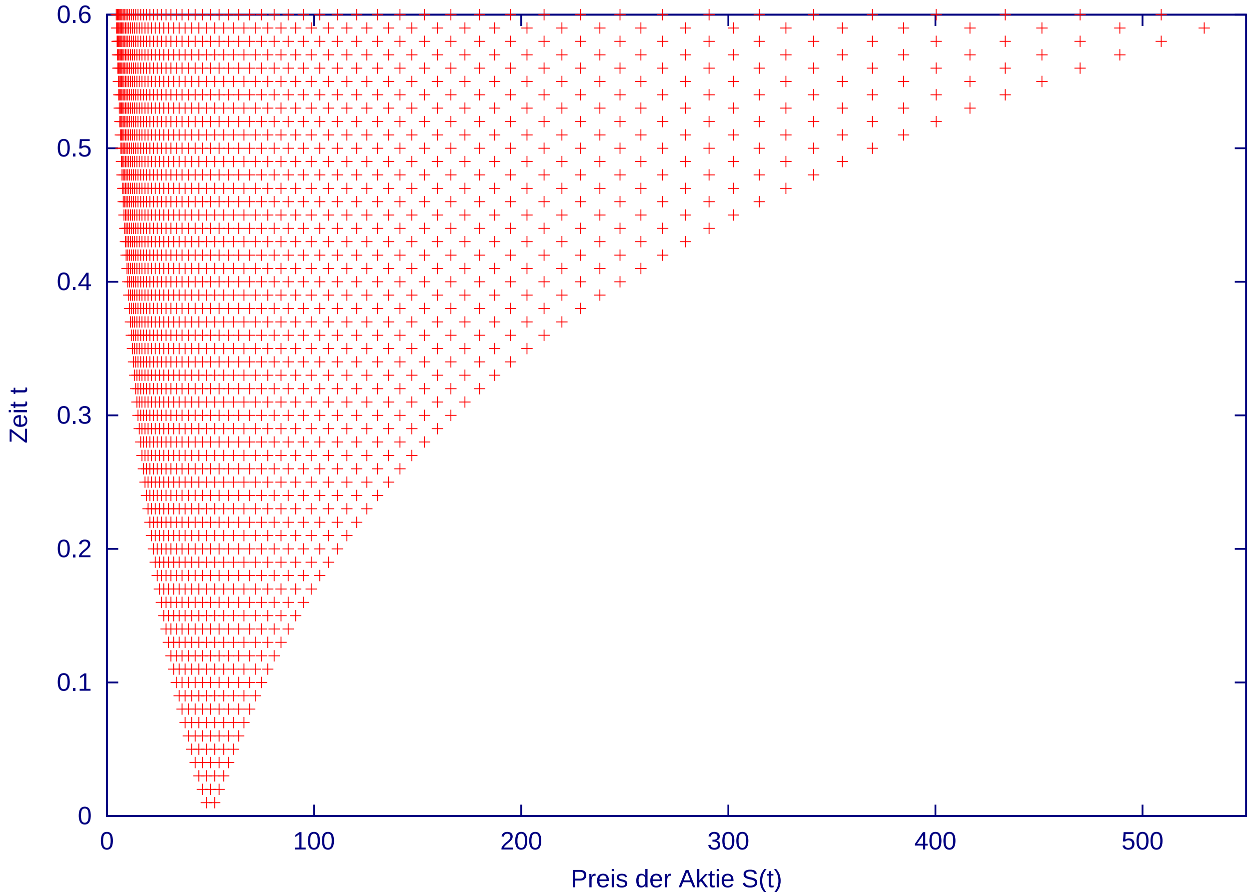
Parameter: $E = 50$, $S_0 = 50$, $r = 0.15$, $\sigma = 0.4$ und $T = 1.0$

$V_P(S_0, 0) = 4.396$ $\qquad$ $V_C(S_0, 0) = 11.3608$



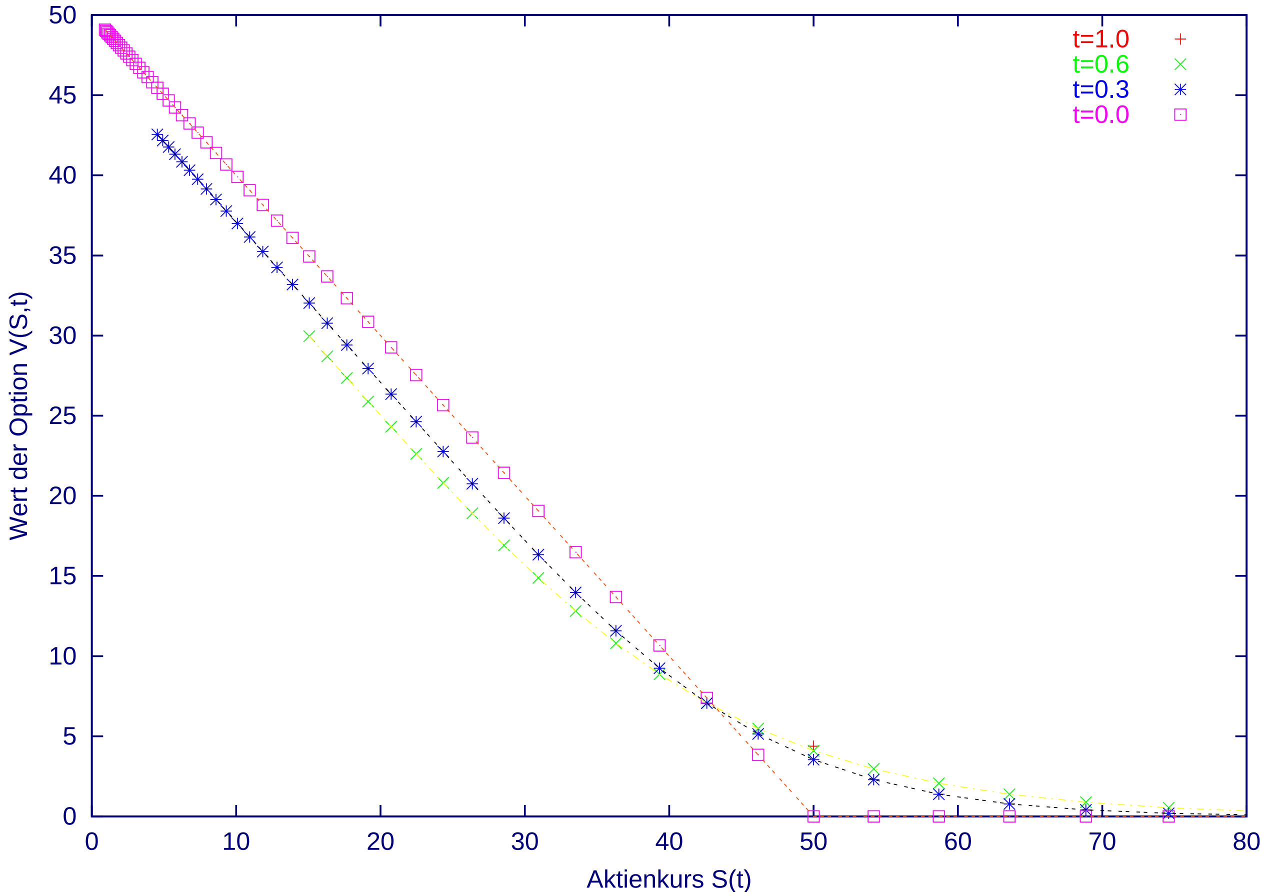
Aktienpreisentwicklung nach dem Cox-Ross-Rubinstein Modell

Parameter: $S(t_0) = 50$, $r = 0.15$, $\sigma = 0.4$, $T = 1.0$ und $M = 100$



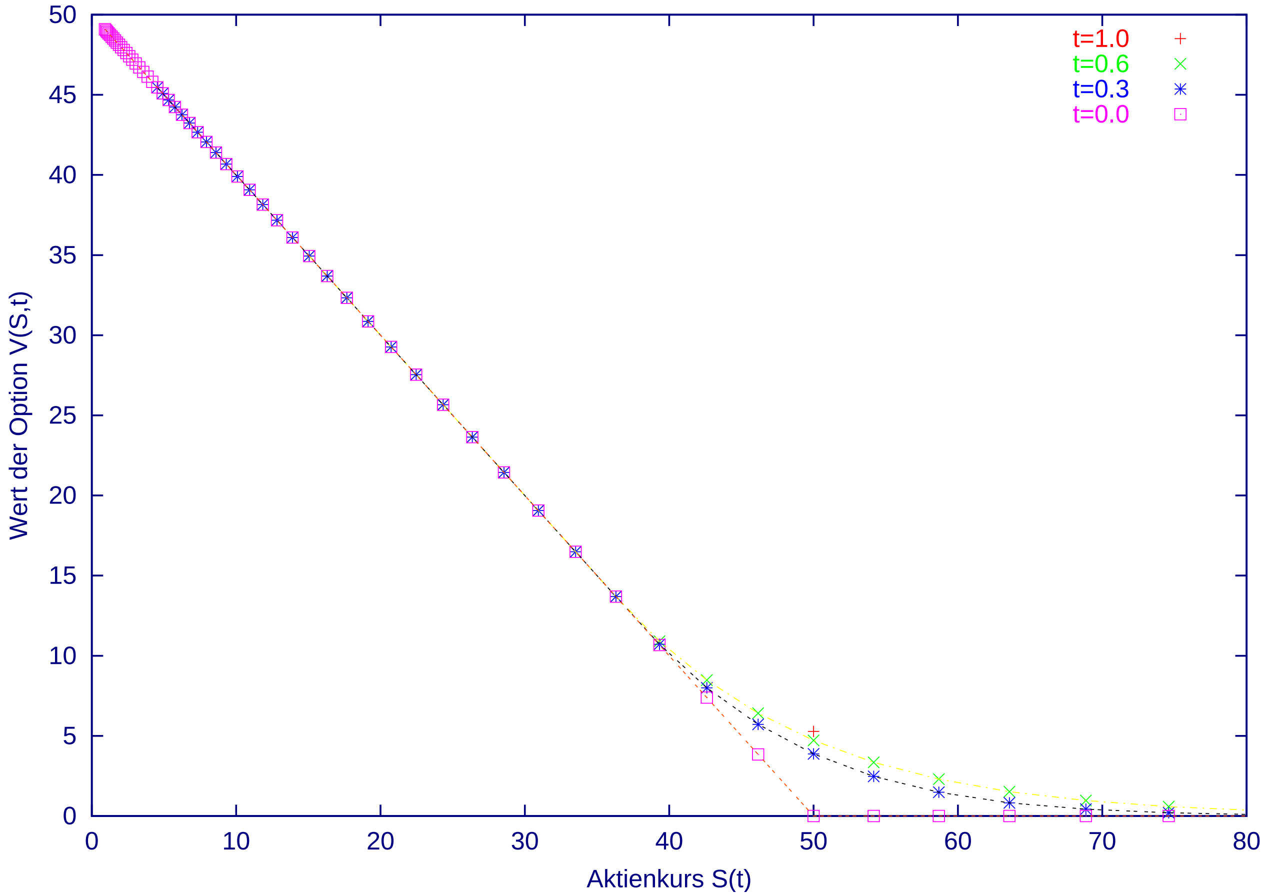
$V(S,t)$ eines europ. Puts nach dem Binomialmodell

Parameter: $S_0 = 50$, $E = 50$, $r = 0.15$, $\sigma = 0.4$, $T = 1.0$ und $M = 100$
$(V_P(50,0) = 4.378)$



$V(S,t)$ eines amerik. Puts nach dem Binomialmodell

Parameter: $E = 50$, $r = 0.15$, $\sigma = 0.4$, $T = 1.0$ und $M = 100$



Smile-Effekt

aus [7]

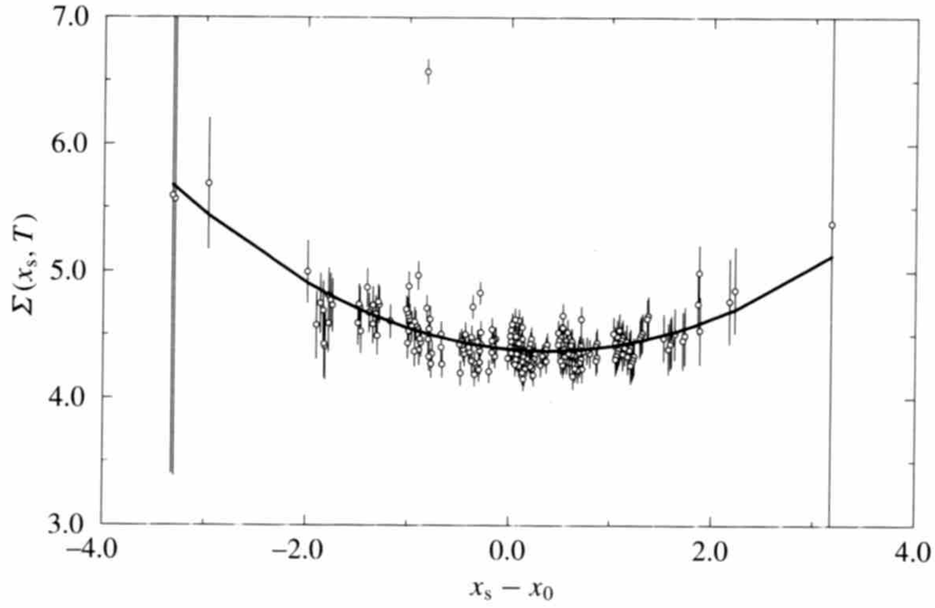


Fig. 4.5. Implied Black–Scholes volatility and fitted parabolic smile. The circles correspond to all quoted prices on 26th April, 1995, on options of 1-month maturity. The error bars correspond to an error on the price of ± 1 basis point. The curvature of the parabola allows one to extract the implied kurtosis $\kappa(T)$ using Eq. (4.58).

Kennzahlenabfrage für Optionsscheine: Kennzahlenabfrage für Optionsscheine

OS-WKN:

Funktionen für diesen Optionsschein

Diese Funktionen für WKN: go

Kurse	Analysen	Charts	Szenario	Basiswert	Portfolio
Emittentenkurs	Kennzahlen	4 Wochen	Rechner	Snapshot	Depot
Börsenkurse	Umsätze	3 Monate	Ähnliche OS	Analystenmeinung	Watchlist
		6 Monate			

Übersicht zur WKN: 651394

Stammdaten		Kursdaten	
Emittent	Citibank	Kurs Basiswert	17.06.2002, 14:50
Basiswert	DaimlerChrysler (710000)	· in EUR	47.52 (DaimlerChrysler)
Typ C/P	Call	Kurs Optionsschein	17.06.2002, 14:50
Typ E/A	Amerikanisch	· Geld	0.053 (+0.003 / +6.0%)
Basispreis	50.000	· Brief	0.063 (+0.003 / +5.0%)
Währung	EUR	Spread	
Fälligkeit	26.06.2002	· Absolut	0.01
Bez.-Verh.	0.1000	· Homogenisiert	0.10
Börsenplatz	DUS FSE STU	· in % des Briefkurses	15.87
Bemerkung	Keine		

Kennzahlen

Parität	-0.25	Break-Even	50.58
Aufgeld (in %)	6.44	Aufgeld p.a. (in %)	257.58
Hebel	81.93	Omega	21.94
Theoretischer Wert	0.02	Bewertungsniveau (in %)	222.90
Historische Volatilität (in %)	30.77	Implizite Volatilität (Mittelkurs) (in %)	49.10
Implizite Volatilität (Geldkurs) (in %)	47.05	Implizite Volatilität (Briefkurs) (in %)	51.10
Totalverlustwahrscheinlichk. (in %)	75.69	Delta	0.27
Theta	-0.05	Vega	0.00
Innerer Wert	0.00	Zeitwert	0.06
Ertragsgleichheit (in %)	6.52	Ertragsgleichheit p.a. (in %)	260.81
Aufgeld p.a./Omega (in %)	11.74	Ertragsgleichheit p.a./Omega (in %)	11.89
Moneyness	0.95	Spread-Move	0.37
Transaktionskosten-Move	0.02	Zeitwert-Move	1.76
Prozentuales Wochentheta	-81.17	Hold-Break-Even	2.15

OnVista Quelle: OnVista / © 1998-2002 OnVista AG
Consors und OnVista uebernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Angaben!

Notationen

- T Verfallsdatum der Option (engl. Maturity-Time)
- t jetziger Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$
- S, S_t Preis des Underlyings (Basiswert, engl. Strike-Price)
- K Ausübungspreis, Basiswert
- r risikofreier, kontinuierlicher Zinssatz (engl. interest rate)
- V_C, V_P Wert einer Call bzw. Put-Option
- σ Volatilität

Literatur

[1] *J.Voit:* The Statistical Mechanics of Financial Markets, Springer 2001.

[2] *R. Seydel:* Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten, Springer 2000.

[3] *A.Ewering:* Das Binomialmodell, 1998.

[4] *T.Galla:* Option Pricing - Die Black-Scholes-Formel, 1998.

[5] *F.Black, M.Scholes:* The Pricing of Options and Corporate Liabilities, J.Pol.Econ 81 (1973), 637-654

[6] *L. Bachelier* „Théorie de la Spéculation ", Annales de l'Ecole normale superiure 1900 (trans. Random Character of Stock Market Prices).

[7] *J.-P. Bouchaud und M. Potters:* Theory of Financial Risks - From Statistical Physics to Risk Management, Camb. Univ. Press 2001

[8] *J.C. Hull, A. White:* The pricing of options an assets with stochastic volatility, Journal of Finance, **XLII**,281 (1987)

[9] *J.Franke, W. Härdle und Chr. Hafner* Einführung in die Statistik der Finanzmärkte