Das abelsche U(1)–Higgs-Modell in zwei Dimensionen

Interessante Aspekte:

1. Analogien zum SU(2)–Higgs-Sektor des MSM
   - Instantonen & Sphaleron-Lösungen ($T > 0$)
   - Anomalie im axialen Strom:
     $\partial_\mu j_5^\mu = 2N_f \frac{e_0}{4\pi} (\epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad \Rightarrow \quad Q_5(t) = 2N_f \Delta N_{\mathrm{CS}}$

   $\rightsquigarrow$ formal wie in elektroschwacher Theorie ($D = 4$): Baryonzahl-Verletzung & Sphaleron-Übergänge

2. Nicht-störungstheoretische Fragestellungen im Rahmen der Gitterregularisierung
   - Kontinuumslimes & Linien konstanter Physik
   - Skalierungsverhalten der topologischen Suszeptibilität $\chi_{\mathrm{top}} \equiv \frac{1}{\Omega} \left\langle Q_{\mathrm{top}}^2 \right\rangle$, $Q_{\mathrm{top}} \equiv \frac{e_0}{4\pi} \int_M \mathrm{d}^2x \, \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)$

   $\rightsquigarrow$ Vergleich von $\chi_{\mathrm{top}}\big|_{\mathrm{Gitter}}$ mit der Instanton-Übergangsrate Γ, die mit semi-klassischen Methoden ($\rightarrow$ Fluktuationsdeterminanten) innerhalb der 'dilute gas approximation' berechenbar ist

   $$\chi_{\mathrm{top}} = \frac{1}{\beta V} \left\langle [N_{\mathrm{CS}}(\beta) - N_{\mathrm{CS}}(0)]^2 \right\rangle \longrightarrow \frac{\Gamma}{V} \qquad \beta = \frac{1}{T} \to \infty$$

   - Implikationen der *variablen* Skalarfeld-Länge auf Eigenschaften des Modells
     (z.B. Phasendiagramm)

Formulierung im Kontinuum:

Wirkung

$$
\begin{aligned}
S[A,\phi_0] &= \int \mathrm{d}^2x\, \mathcal{L}(x) \qquad \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{\mathrm{g}}(x) + \mathcal{L}_{\phi}(x) \\
\mathcal{L}_{\mathrm{g}}(x) &= \frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \\
\mathcal{L}_{\phi}(x) &= \frac{1}{2}\, |D_\mu \phi_0|^2 + \frac{\lambda_0}{4!}\, (|\phi_0(x)|^2 - v_0^2)^2
\end{aligned}
$$

geladenes Skalarfeld: $\phi_0(x) \in \mathbb{C}$
Eichfeld: $A_\mu(x) \in \mathbb{R}$
kovariante Ableitung: $D_\mu = \partial_\mu - ie_0 A_\mu(x)$, Kopplung e_0
Feldstärke: $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$, $\mu, \nu \in \{1,2\}$

$\Rightarrow$ Invarianz unter lokalen U(1)–Eichtransformationen

$$
\begin{aligned}
\phi_0(x) &\to \phi_0'(x) = \mathrm{e}^{-i\alpha(x)}\, \phi_0(x) \\
A_\mu(x) &\to A_\mu'(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e_0}\, \partial_\mu \alpha(x) \qquad F_{\mu\nu}'(x) = F_{\mu\nu}(x)
\end{aligned}
$$

$m_0^2 > 0 \to$ symmetrische Phase:
massives skalares Meson & masseloses Vektorboson

$m_0^2 < 0 \to$ gebrochene (‘Higgs’) Phase:
massives Higgs- und massives Vektorboson

dort:
klassischer Vakuumerwartungswert des Skalarfeldes

$$
v_0^2 = \frac{3\, \overline{m}_0^2}{\lambda_0} \qquad m_0^2 \equiv -\frac{1}{2}\, \overline{m}_0^2
$$

'nackte' Higgs- und Vektorboson-Massen

$$m_{H,0}^2 = \overline{m}_0^2 = \frac{\lambda_0 v_0^2}{3} \qquad m_{W,0}^2 = e_0^2 v_0^2 \quad \Rightarrow \quad R_{HW,0}^2 \equiv \frac{m_{H,0}^2}{m_{W,0}^2} = \frac{\lambda_0}{3e_0^2}$$

Formulierung auf dem Gitter:

Feldvariablen Kontinuum $\longrightarrow$ Gitter

$$U_{x,\mu} = \mathrm{e}^{\,iA_{x,\mu}} \qquad \beta = \frac{1}{a^2 e_0^2}$$

$$\phi_0(x) = \sqrt{2\kappa}\,\varphi_x \qquad a^2\lambda_0 = \frac{6\lambda}{\kappa^2} \qquad a^2 m_0^2 = \frac{1-2\lambda}{\kappa} - 4$$

Zerlegung des Skalarfeldes

$$\varphi_x = \rho_x\,\mathrm{e}^{\,i\omega_x} \qquad \rho_x \in \mathbb{R}^{\geq 0} \qquad \omega_x \in \mathbb{R}$$

eichinvariante φ–Link-Phasen
(= $A_{x,\mu}$ in der unitären Eichung: $\omega_x \equiv 0$, $\varphi_x \equiv \rho_x$)

$$B_{x,\mu} \equiv -\omega_{x+\hat{\mu}} + A_{x,\mu} + \omega_x$$

$\Rightarrow$ Wirkung $S[U,\varphi] = S_{\mathrm{g}}[U] + S_\phi[U,\varphi]$

$$S_{\mathrm{g}}[U] \;=\; \beta \sum_{x\in\Lambda} \left\{ 1 - \cos\left(A_{x,1} + A_{x+\hat{1},2} - A_{x+\hat{2},1} - A_{x,2}\right) \right\}$$

$$S_\phi[U,\varphi] \;=\; \sum_{x\in\Lambda} \left\{ -2\kappa \sum_{\mu=1}^{2} \rho_x \rho_{x+\hat{\mu}} \cos B_{x,\mu} + \rho_x^2 + \lambda\left(\rho_x^2 - 1\right)^2 \right\}$$

$\beta \;\leftrightarrow\;$ Eichfeld-Dynamik

$\kappa \;\leftrightarrow\;$ Hopping-Parameter ($\leadsto$ kinetischer Term)

$\lambda \;\leftrightarrow\;$ Fluktuationen der Skalarfeld-Länge ('radial mode')

Linien konstanter Physik ('LCPs'):

renormierter Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes

$$v_0 = |\langle \phi_0 \rangle| \qquad \longrightarrow \qquad v_R \equiv \sqrt{2\kappa}\,\langle \rho \rangle \qquad \langle \rho \rangle = \langle \varphi \rangle\,|_{\text{unitäre Eichung}}$$

verlange im Kontinuumslimes $a \to 0$ ($\Leftrightarrow am_H, am_W \to 0$)

$$v_R = \sqrt{2\kappa}\,\langle \rho \rangle = \overline{v} \qquad R_{HW} \equiv \frac{m_H}{m_W} = \overline{R} \qquad \overline{v}, \overline{R} = \text{fix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta \to \infty \;\; \wedge \;\; \lambda \to 0 \quad \text{bzw.} \quad \beta \to \infty \;\; \wedge \;\; \beta\lambda = \text{konstant}$$

Topologische Ladung:

geometrische Definition der topologischen Ladung

$$\text{in } D = 2 \text{ Dimensionen}: \qquad Q_{\text{top}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{x \in \Lambda} F_x \in \mathbb{Z}$$

Feldstärke $F_x \in [-\pi, \pi) =$ projizierte Plaquette-Winkel

$$U_{\mathrm{p},x} \equiv \mathrm{e}^{iF_x} \qquad \tilde{F}_{x;\mu\nu} \equiv A_{x+\hat{\mu},\nu} - A_{x,\nu} - A_{x+\hat{\nu},\mu} + A_{x,\mu}$$

$$\Rightarrow \quad F_x \equiv \tilde{F}_{x;12} - 2\pi\,\mathrm{NI}\left(\frac{\tilde{F}_{x;12}}{2\pi}\right)$$

klassische $Q_{\text{top}} = 1\,(-1)$ Konfiguration: (Anti-)Instanton

Beziehung zur Vortexzahl $\tilde{n}_x \in \mathbb{Z}$ in reiner Eichtheorie

$$\tilde{n}_x = \frac{1}{2\pi}\left(F_x - \tilde{F}_{x;12}\right) = -\mathrm{NI}\left(\frac{\tilde{F}_{x;12}}{2\pi}\right)$$

und da $\sum_{x \in \Lambda} \tilde{F}_{x;12} = 0$ auf einem periodischen Gitter

$$\Rightarrow \quad Q_{\text{top}} = \sum_{x \in \Lambda} \tilde{n}_x \in \mathbb{Z} \qquad \text{(eichinvariant, i.G.z. } \tilde{n}_x \text{ !)}$$

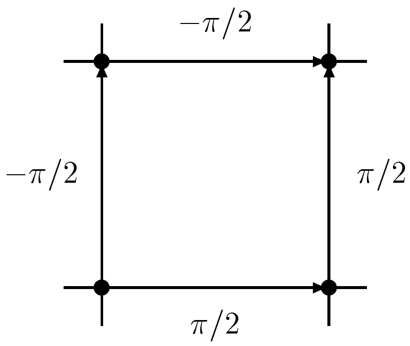
bei Kopplung des Eichfeldes an das Skalarfeld kann die Vortexzahl direkt eichinvariant eigeführt werden durch

$$n_x = -\mathbf{NI}\left(\frac{1}{2\pi}\left[\, B_{x+\hat{\mu},\nu} - B_{x,\nu} - B_{x+\hat{\nu},\mu} + B_{x,\mu}\,\right]\right)$$

Plaquette mit $n_x = 1\,(-1)$: Vortex (Anti-Vortex)

$\rightsquigarrow$ Zentrum einer Instanton-Konfiguration $\Leftrightarrow$ Vortex

Beispiel (mit typischen Werten für φ–Link-Phasen $B_{x,\mu}$)



Topologische Suszeptibilität:

Definition

$$\chi_{\text{top}} \equiv \frac{1}{\Omega}\left\langle Q^2_{\text{top}}\right\rangle$$

führendes Verhalten in der reinen Eichtheorie

$$a^2\chi_{\text{top}} \longrightarrow \frac{1}{4\pi^2\beta} \qquad \text{für} \qquad \beta\to\infty\,,\, \Omega\to\infty$$

($\hookleftarrow$ lokale Eichfeld-Fluktuationen entkoppeln von globalen Instanton-Anregungen, Letztere als Minima der nicht-trivialen topologischen Sektoren des Eichfeld-Hintergrundes mit konstanter Feldstärke $F_x = 2\pi Q_{\text{top}}/\Omega$)

Relevante Grenzfälle des Modells:

- $\kappa = 0 \rightarrow$ **reine Eichtheorie**
  Entkopplung von Eichfeld- und Skalarfeld-Anteilen
  kein Phasenübergang in $D = 2$
  lineares Coulomb-Potential $\rightsquigarrow$ 'Confinement'

- $\beta = \infty \wedge \lambda = \infty \rightarrow$ **zweidimensionales XY-Modell**
  rein skalar, da $U_{x,\mu}$ Eichtransformation von **1**
  konstante Skalarfeld-Länge $|\varphi_x| \equiv 1$ ('Ising-Limes')
  Kosterlitz-Thouless-Phasenübergang in $\kappa = \kappa_c \simeq 0.56$

  - $\kappa < \kappa_c$ (Hochtemperatur-Phase):
    massive Vortex-Phase ('dilute vortex gas')
    exponentiell abfallende Korrelationfunktion
    Vortex-/Anti-Vortex-Paar-Anregungen
    $\rightsquigarrow$ langreichweitige, unordnende Fluktuationen

  - $\kappa > \kappa_c$ (Tieftemperatur-Phase):
    masselose Spinwellen-Phase
    potenzartig abfallende Spin-Spin-Korrelationen
    kurzreichweitige Ordnung der Spins
    $\rightsquigarrow$ keine freien Vortizes

  $\beta < \infty$:
  analytisch zusammenhängende Confinement- und Higgs-Regionen ('continuous crossover')

  ($\lambda < \infty \rightarrow$ zweikomponentige ϕ^4–Theorie in $D = 2$)

Einige Resultate der Gitteruntersuchungen:

Verhalten von χ_{top} im Kontinuumslimes

- Skalierungsverhalten entlang LCPs ($\to$ Figur)
- 'topologische' Natur des Phasenübergangs ($\to$ Figur): Vortizität in Limites $\beta \to \infty$ und $\lambda \to 0$
  $\rightsquigarrow$ $\kappa_c = 1/4$ entspricht dem Kosterlitz-Thouless κ_c

Phasendiagramme ($\to$ Figur)

- $\beta = \infty$:
  sowohl im U(1)–Higgs-Modell ($\lambda < \infty, \beta\lambda =$ konstant) als auch im XY-Modell ($\lambda = \infty$) zeigt χ_{top} eine charakteristische Unstetigkeit bei $\kappa = \kappa_c$
  $\kappa < \kappa_c \to$ Confinement-Phase: $\chi_{\text{top}} = \chi_{\text{top}}^{\text{(reine Eichtheorie)}}$
  $\kappa > \kappa_c \to$ Higgs-Phase: $\chi_{\text{top}} = 0$
- $\beta < \infty$:
  keine Evidenz für einen Phasenübergang mehr sondern stetige Verbindung zwischen Confinement- und Higgs-Regimes, aber *qualitative* Unterschiede

weitere, auf dem Gitter bestätigte Eigenschaften

- das Modell besitzt keine Coulomb-Phase wie in $D = 4$ ($\Leftrightarrow D = 2$: Photon $\neq$ physikalischer Freiheitsgrad)
- Kraft zwischen einem Paar äußerer Ladungen ($\to$ Figur)

1. $\boxed{\text{ganzzahlige Ladungen}}$

- Abschirmung der äußeren Quellen durch Ladungen des dynamischen Higgs-Feldes ('screening')
- exponentiell abfallende Kraft
  $\rightsquigarrow$ abflachendes Potential
  $\rightsquigarrow$ Yukawa-Ansatz: $V_{\text{Yuk}}(R) = \frac{e_R^2}{2m_s}\left(1 - \mathrm{e}^{-am_sR}\right)$

2. $\boxed{\text{halbzahlige Ladungen}}$

- symmetrische Phase:
  entfernungsunabhängige Coulomb-Kraft
  $\rightsquigarrow$ Confinement
- Higgs-Phase:
  i.G.z. allein erwarteten Abschirmung durch massive Vektorbosonen aus dem Higgs-Mechanismus *sorgen Instanton-Beiträge auch hier für eine Linearität des langreichweitigen Potentials*
  $\rightsquigarrow$ Confinement
  $\rightsquigarrow$ $V_{1/2}(R) = V_{\text{Yuk}}(R) + \alpha R$ mit $q^2\alpha/2 = a^2\chi_{\text{top}}$
  (nicht-perturbativer Quanteneffekt in $D = 2$!)

Einfluß der Instantonen stützt o.g. Phasen-Szenario:
$\chi_{\text{top}}(\kappa)\,\big|_{\beta,\lambda\,\text{fix}}$ nimmt in der Higgs-Region exponentiell ab
$\Rightarrow$ Vortexdichte dünnt im Kontinuumslimes aus
$\Rightarrow$ Higgs-Phänomen dann auch im Fall 2. dominant
solange aber $\beta < \infty$, und damit $\chi_{top} > 0$, erstreckt sich das Confinement (im vorherigen Sinne durch Instantonen induziert) noch in das Higgs-Regime

Literatur:

Resultate, Details & zahlreiche Referenzen in:

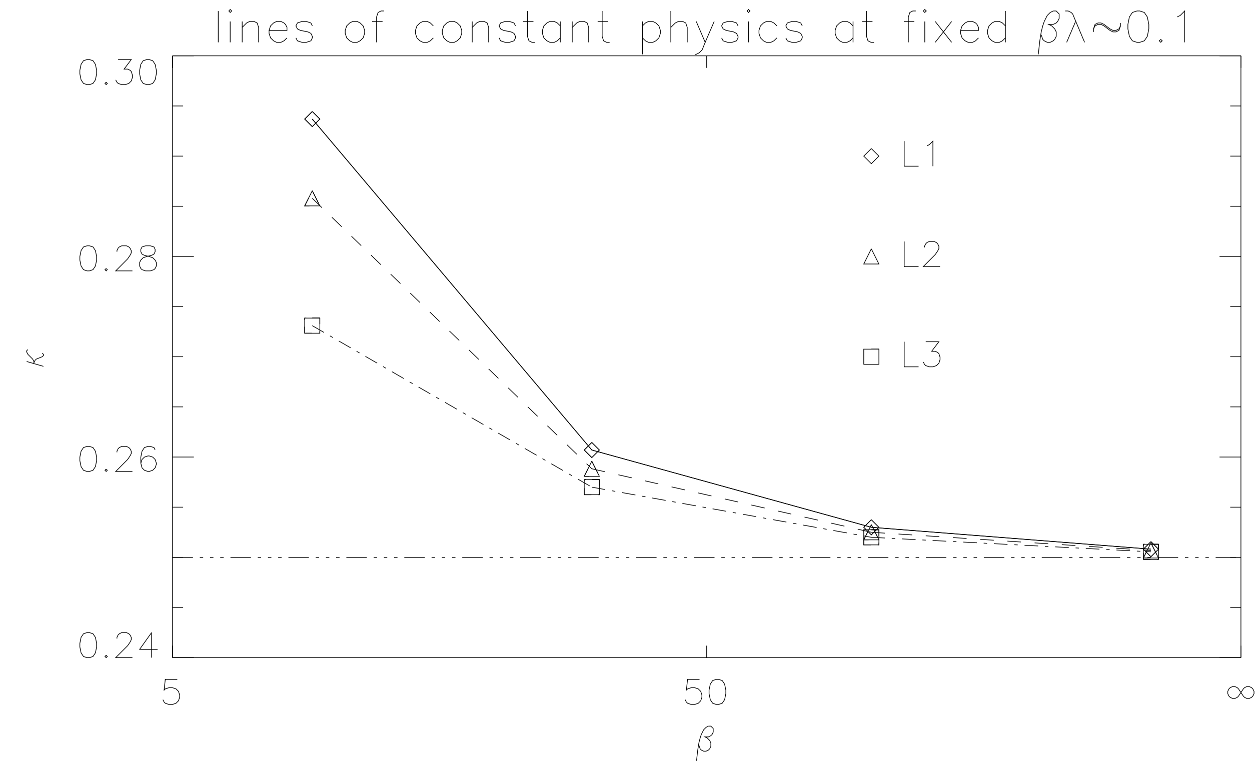
H. Dilger, J. Heitger, Nucl. Phys. B53 (Proc. Suppl.) (1997) 587

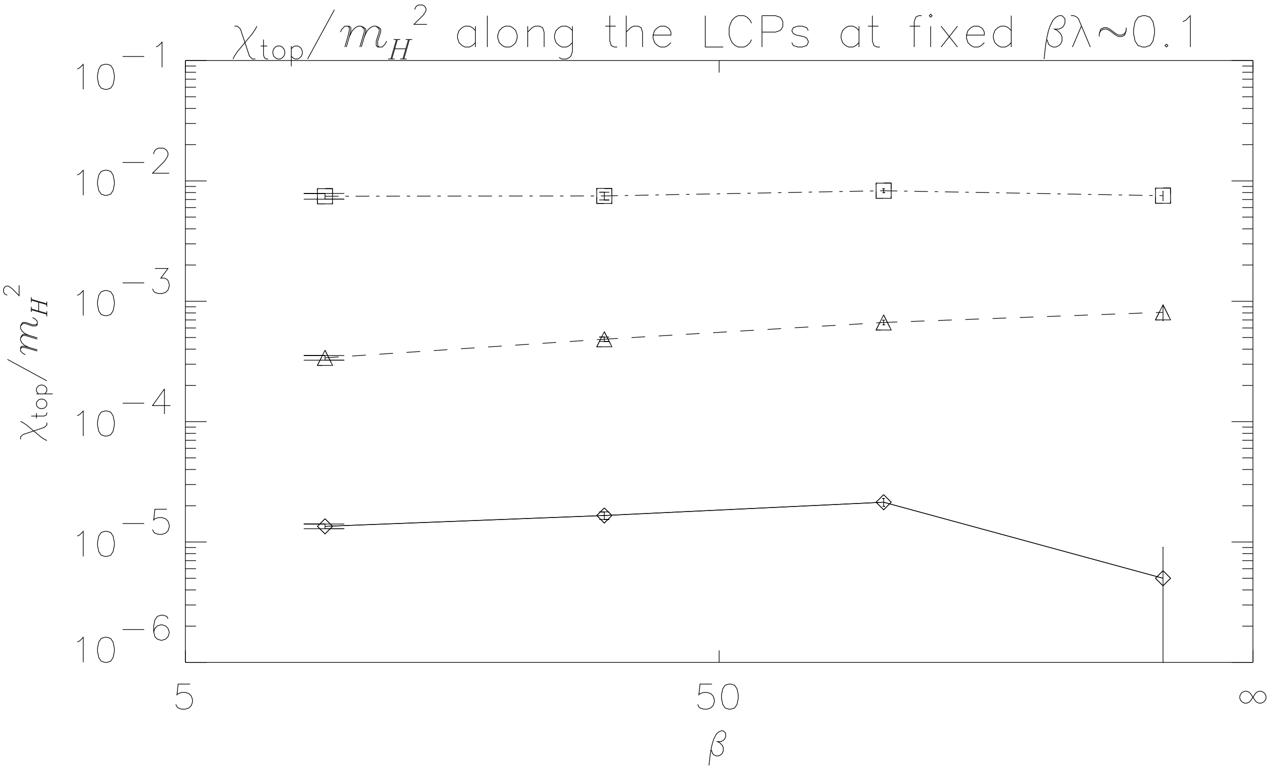
H. Dilger, Nucl. Phys. B53 (Proc. Suppl.) (1997) 590

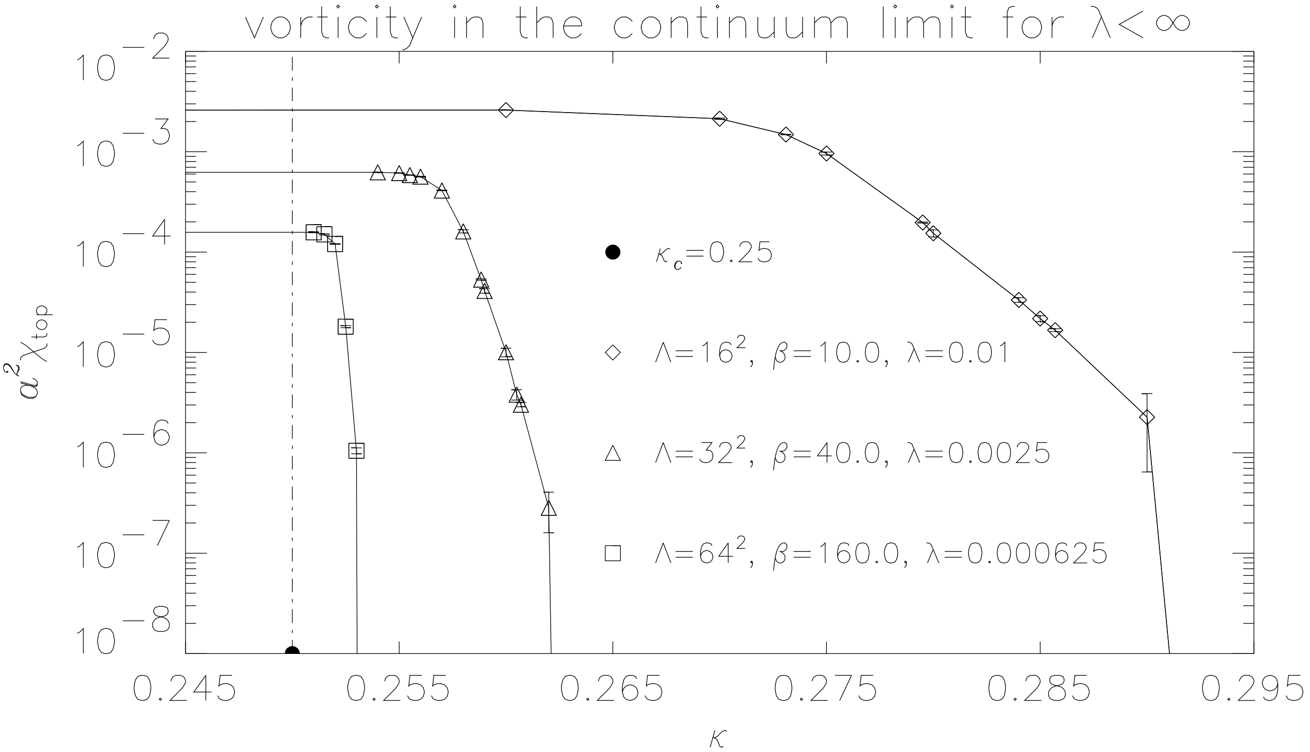
J. Heitger, Dissertationsschrift, Universität Münster, 1997

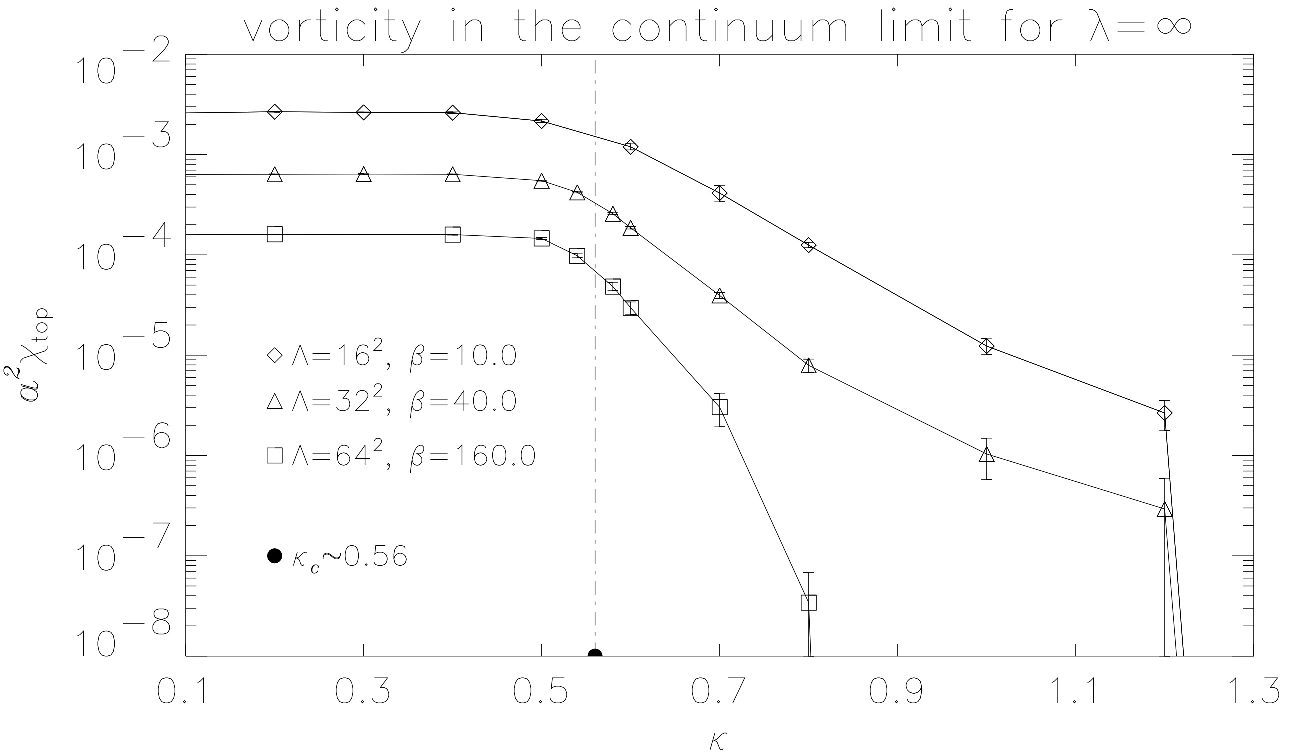
Berechnung der Instanton-Rate im Kontinuum:

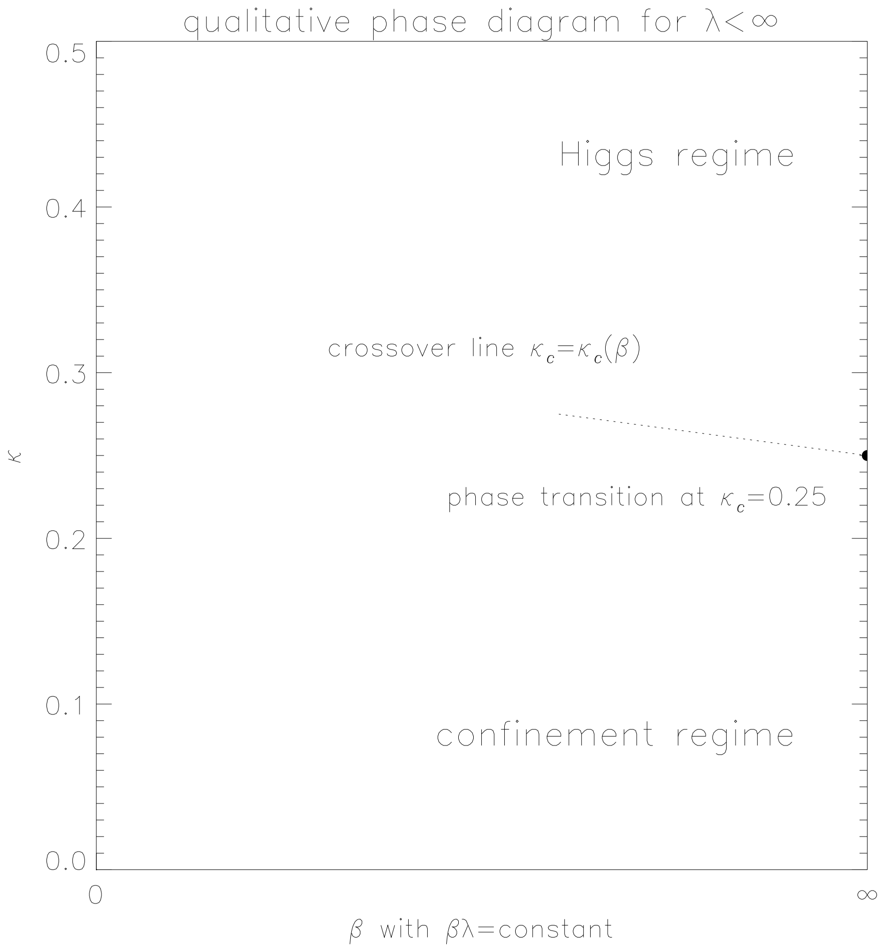
J. Baacke, T. Daiber, Phys. Rev. D51 (1994) 795

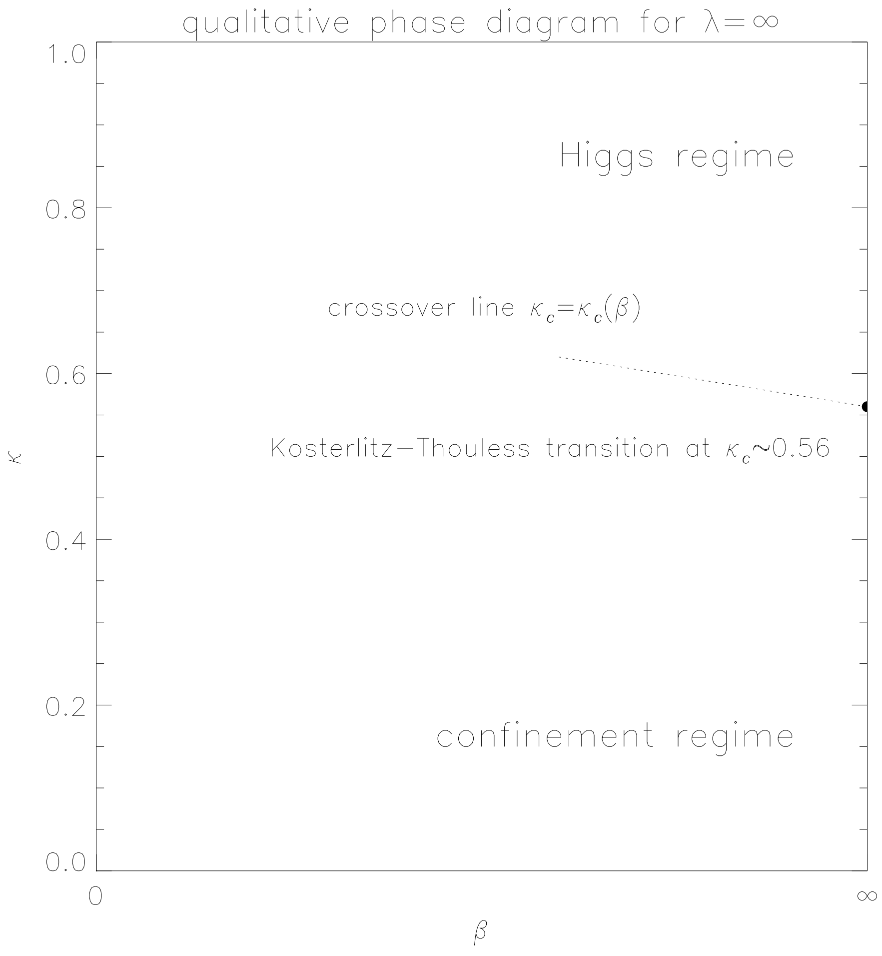

lines of constant physics at fixed βλ~0.1
0.30
0.28
0.26
0.24
κ
L1
L2
L3
5
50
∞
β

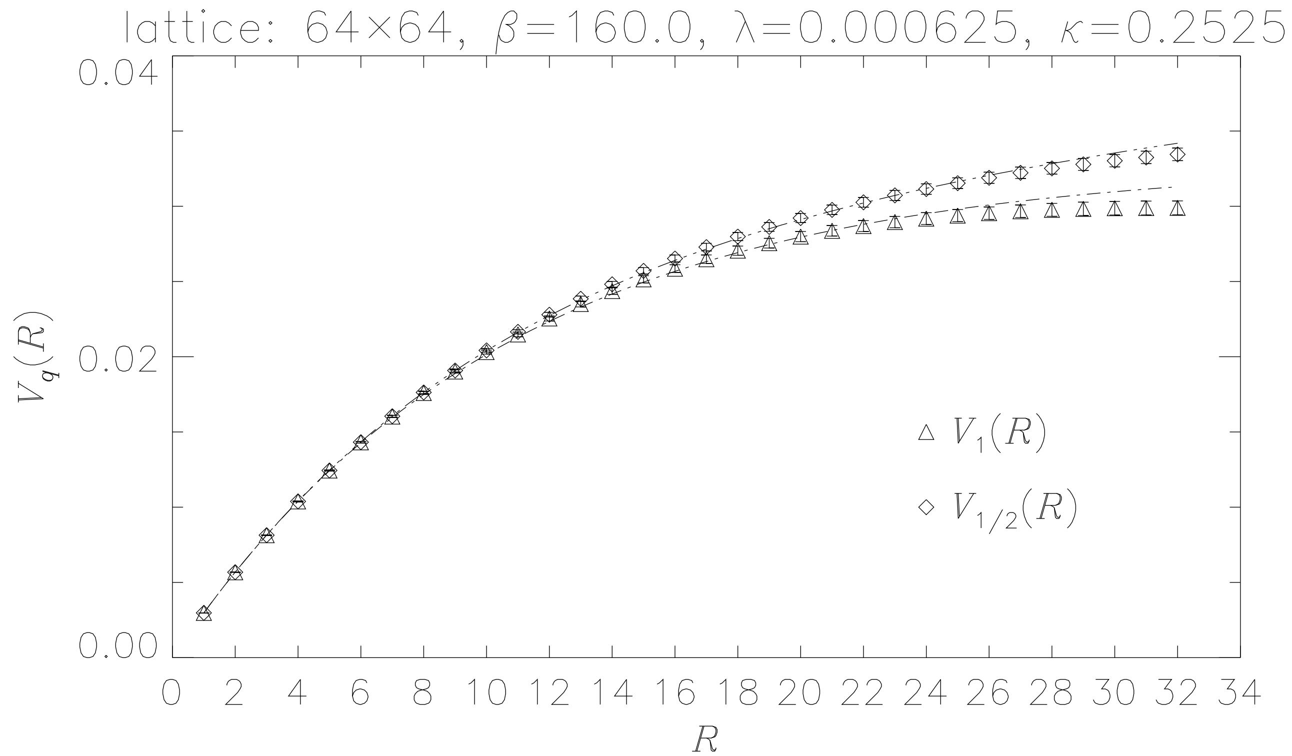

χ_top/m_H^2 along the LCPs at fixed βλ~0.1
10^-1
10^-2
10^-3
10^-4
10^-5
10^-6
χ_top/m_H^2
5
50
∞
β


vorticity in the continuum limit for λ<∞
$a^2\chi_{top}$
κ_c=0.25
Λ=16², β=10.0, λ=0.01
Λ=32², β=40.0, λ=0.0025
Λ=64², β=160.0, λ=0.000625
κ

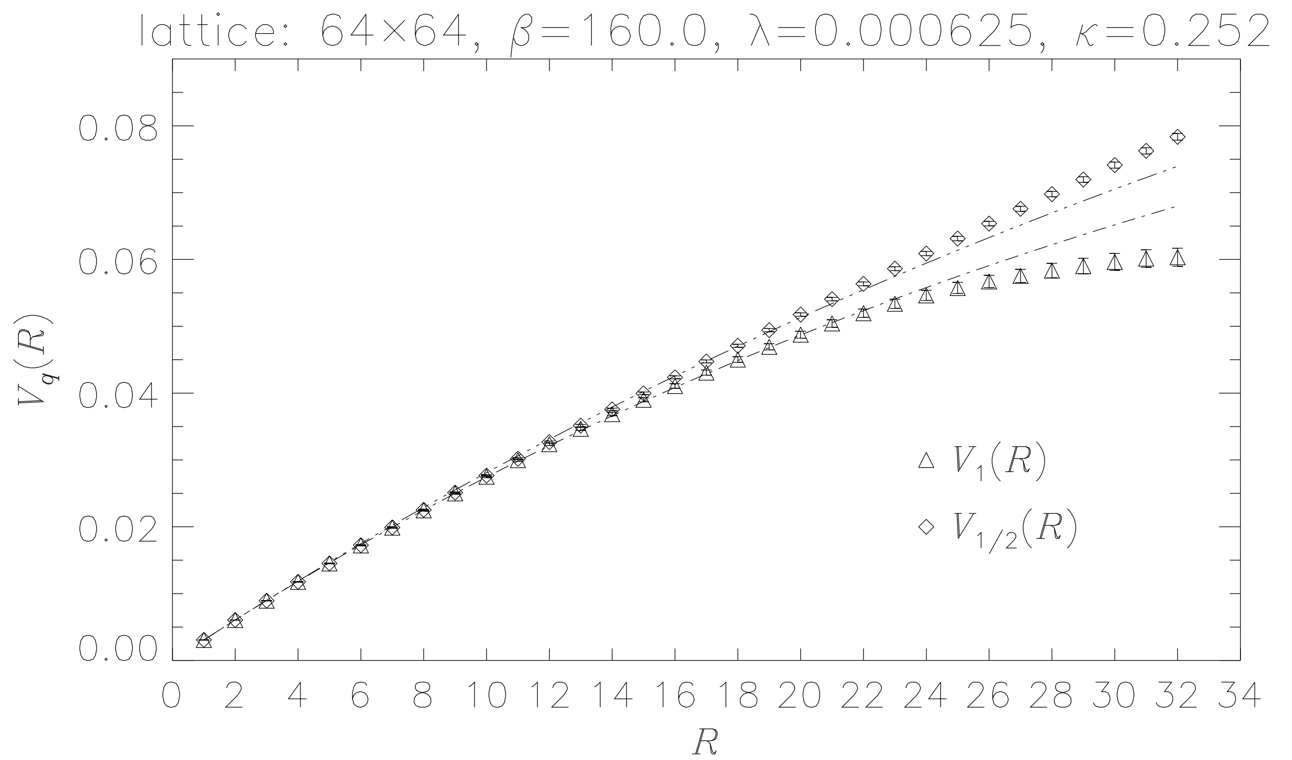

vorticity in the continuum limit for λ=∞
$a^2\chi_{top}$
Λ=16², β=10.0
Λ=32², β=40.0
Λ=64², β=160.0
κ_c~0.56
κ


qualitative phase diagram for λ<∞
Higgs regime
crossover line κc=κc(β)
phase transition at κc=0.25
confinement regime
κ
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
∞
β with βλ=constant


qualitative phase diagram for λ=∞
Higgs regime
crossover line κc=κc(β)
Kosterlitz−Thouless transition at κc~0.56
confinement regime
κ
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
∞
β



lattice: 64×64, β=160.0, λ=0.000625, κ=0.2525
0.04
0.02
0.00
$V_q(R)$
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34
R
$V_1(R)$
$V_{1/2}(R)$



lattice: 64×64, β=160.0, λ=0.000625, κ=0.252
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
$V_q(R)$
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34
R
$V_1(R)$
$V_{1/2}(R)$