

Das Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon

Felix Huerkamp

15. Juli 2006

1 Einleitung

Die Quantenmechanik ist eine der besten bestätigten Theorien in der Physik. Allerdings zeigen sich in ihrem Formalismus auch Effekte, die der alltäglichen Realitätsauffassung des Menschen widersprechen.

Einstein, einstiger Mitbegründer der Quantenhypothese, zeigte sich bereits früh sehr skeptisch gegenüber der Quantentheorie. Seiner Meinung nach lieferte die Theorie zwar für einige Probleme in der Physik die richtigen Ergebnisse, sollte aber nur ein mathematischer Formalismus sein, welchem im Bezug auf die Wirklichkeit keine Bedeutung zukommen konnte.

Bereits 1927 versucht er eine eigene Interpretation der quantenmechanischen Wellenfunktionen zu geben. Es soll sich dabei nicht um Wahrscheinlichkeitsdichten für ein einziges Teilchen, sondern nur um Wahrscheinlichkeiten für ein ganzes Ensemble von Teilchen handeln.

Sein Ziel war es in den folgenden Jahren, die Widersprüchlichkeit der Quantenmechanik in einem Paradoxon deutlich zu machen. Der Verteidiger der Quantenmechanik und damit sein Hauptkontrahent Niels Bohr schaffte es aber lange Zeit die Paradoxa mit Hilfe der Quantentheorie zu lösen.

Im Jahre 1935 veröffentlichte Einstein dann mit Hilfe seiner beiden Assistenten Podolsky und Rosen einen Artikel im Physical-Review, welcher das dann später nach Einstein, Podolsky und Rosen benannte Paradoxon beschreibt.

2 Das ursprüngliche Paradoxon

In diesem Artikel definieren sich die Autoren zunächst die Begriffe *physikalische Wirklichkeit*, *Vollständigkeit*, *Lokalität* und *Kausalität*, um dann an einem Gedankenexperiment zu zeigen, daß die Quantenmechanik mit sich selbst im Widerspruch steht.

Einstein bemüht sich ein sehr schwaches Kriterium für die physikalische Realität zu finden. Es ist auch bezeichnend, daß er sich nur auf die *physikalische* Realität einschränkt. Seine Definition lautet:

Kann man den Wert einer physikalischen Größe mit Sicherheit [...] vorhersagen, ohne ein System dabei in irgendeiner Weise zu stören, dann gibt es ein Element der physikalischen Wirklichkeit, das dieser physikalischen Größe entspricht.

Dieses Kriterium ist nur als hinreichend anzusehen, d.h. es kann Dinge geben die nicht dem Kriterium entsprechen, aber trotzdem Element der physikalischen Realität sind. Es ist leicht einzusehen, daß alles was uns aus der klassischen Physik bekannt ist, dieses Kriterium erfüllt. Wiege ich zum Beispiel einen Stein, so kann ich seine Masse danach zu jedem Zeitpunkt vorhersagen (abgesehen von einem Messfehler). Kenne ich dann noch die Höhe eines Turms kann

ich auch Fallgeschwindigkeit und Aufschlagpunkt des Steins vorhersagen, ohne den Flug des Steins zu beeinflussen. Deshalb sind die Geschwindigkeit, die Masse und alle weiteren Elemente der physikalischen Wirklichkeit.

Ob eine physikalische Theorie vollständig ist, hängt nach Einstein davon ab, ob *jedes* Element der physikalischen Realität ein Gegenstück in der physikalischen Theorie hat. Das bedeutet, daß alle Größen, welche physikalische Realität besitzen, auch aus der Theorie folgen müssen. Auch dieses Kriterium ist für die klassischen Theorien erfüllt, zum Beispiel für die Elektrodynamik, welche eine in sich geschlossene Theorie bildet.

Die letzte Definition, welche Einstein für die Aufstellung des Paradoxons braucht, betrifft die Lokalität und damit auch die Kausalität. Er postuliert hier, daß zwei Systeme, welche ursprünglich zusammenhängen, sich soweit räumlich trennen können, so daß sie wechselwirkungsfrei sind. Das bedeutet, daß ich durch eine Manipulierung an dem ersten System nichts am zweiten ändere; sie stehen in keinem kausalem Zusammenhang mehr. Die Trennung impliziert hier, daß der Ort, also die Lokalisierung der Systeme eine entscheidende Rolle in der Theorie haben muß.

Mit Hilfe der elementaren Quantenmechanik und seinen Definitionen konstruiert Einstein das Gedankenexperiment. Dazu betrachtet Einstein nur zwei mögliche Zustände eines Teilchen, einmal die ebene Welle ϕ und das schmale Wellenpaket (δ -Distribution) χ .

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_0 e^{ik_0x} \Rightarrow |\phi(x)|^2 = \phi_0 \\ \chi(x) &= \chi_0 \delta(x-x_0)\end{aligned}$$

Diese beiden Zustände entsprechen genau zwei Meßsituationen. Bei der ebene Welle liegt eine exakte Impulsbestimmung ($\Delta p = 0$) vor, aus der eine völlige Ortsunschärfe folgt. Hingegen liegt bei dem Wellenpaket eine exakte Ortsbestimmung ($\Delta x = 0$) vor, aus der eine völlige Impulsunschärfe folgt. An dieser Stelle ergibt sich schon das grundlegende Problem, denn nach der Quantentheorie kann (in dieser speziellen Situation) entweder nur der Ort oder nur der Impuls Element der physikalischen Realität sein, da nur eine Größe mit Bestimmtheit aus der jeweiligen Wellenfunktion vorhergesagt werden kann. Der einzige Ausweg aus dieser physikalisch sehr merkwürdigen Folgerung ist die Forderung, daß die Quantentheorie *nicht* vollständig ist.

Einstein bemüht sich nun eine Situation zu konstruieren, in der sowohl Impuls als auch Ort Elemente der physikalischen Realität sind. Hierzu geht er von einem verschränkten System aus. Ein System M (mit $p_M = 0$ und $x_M = 0$) zerfällt in zwei Teilsystem S_1 und S_2 , welche sich räumlich trennen und nicht mehr im kausalem Zusammenhang stehen. Es gelten die folgenden Erhaltungssätze

- Summe der Impulse sei erhalten: $p = p_1 + p_2$
- Differenzen der Orte bleibt erhalten: $x = x_2 - x_1$

Es ist darauf zu achten, daß der erste Erhaltungssatz prinzipieller Natur ist, der zweite eine Forderung an das spezielle System. Damit ergibt sich eine Gesamtwellenfunktion des Systems $\psi = \psi(x, p, x_1, x_2)$, wobei x und p feste Parameter und x_1 und x_2 die variablen Größen darstellen. Es wird nun eine Menge E von N identischen Systemen M betrachtet, welche durch die Wellenfunktionen $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(N)}$ beschrieben werden. Zuerst wird nun an einer Teilmenge E_1 von Systemen der Ort $x_1^{(j)}$ mit $j \in E_1$ exakt bestimmt. Daraus folgt, daß $x_2^{(j)}$ mit der Relation $x = x_2^{(j)} - x_1^{(j)}$ auch exakt bestimmt ist und somit $\forall j \in E_1$ Element der physikalischen Realität ist.

Führt man das gleiche mit einer exakten Impulsbestimmung an einer Teilmenge E_2 durch, so

folgt, daß $p_2^{(i)}$ für alle $i \in E_2$ Element der physikalischen Realität ist. Da die beiden Teilsystem unabhängig von einander sind (es besteht kein kausaler Zusammenhang) ist die Unterscheidung der Teilmengen E_1 und E_2 nur für das Teilsystem S_1 , in welchem die Messung durchgeführt wird, interessant. Das Teilsystem S_2 bekommt überhaupt nicht mit, ob in Teilsystem S_1 der Impuls oder der Ort gemessen wird. Für das Teilsystem S_2 läßt sich daher die vorangegangene Aussage verallgemeinern: $x_2^{(i)}$ und $p_2^{(i)}$ sind *gleichzeitig* $\forall i \in E$ Elemente der physikalischen Realität!

Diese Aussage steht aber im Widerspruch zur Heisenbergschen Unschärferelation, welche besagt, daß $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ sein muß, was hier nicht erfüllt ist. Das bedeutet aber, daß die physikalische Realität nicht durch die Quantentheorie wiedergegeben wird. Also muß die Quantentheorie unvollständig sein.

Innerhalb weniger Monate hat Niels Bohr eine Antwort auf dieses Paradoxon publiziert. Kernpunkt seiner Antwort war die Einbeziehung der Messung an den Teilsystemen. Seiner Meinung nach darf man keine Aussagen über Objekte machen, wenn man an ihnen keine Messung durchführt. Genau das macht Einstein aber, wenn er von Messungen am System S_1 zu Aussagen über das System S_2 übergeht, ohne hier zu messen. Nach Bohr sind also unbeobachtete Objekten nie Element der physikalischen Realität.

Diese Antwort hängt eng mit dem von Bohr formulierten Komplementaritätsgedanken zusammen. Danach ist eine raum-zeitliche Beschreibung *nur* durch Beobachtung möglich. Diese Beobachtung impliziert aber eine Messung am System, welches eine unkontrollierte Störung des Systems zur Folge hat. Aus dieser Störung des Systems folgt dann aber ein Außerkraftsetzen des Kausalgesetzes. Das heißt, es läßt sich nie eine Aussage über einen zukünftigen Zustand eines Systems machen, an dem eine Messung vollzogen wird. Die Beobachtung und die Kausalität stehen sich komplementär gegenüber.

3 Bohms Formulierung

Da es sich bei dem Einsteinschen Gedankenexperiment um ein im Labor nicht realisierbares Experiment handelt, formulierte David Bohm das Problem Mitte der Fünziger Jahre nochmal neu. In seiner Formulierung des Paradoxons bilden Spinsysteme die Grundlage. Es ist daher nötig, sich kurz mit Spin-Systemen auseinander zu setzen.

Es werden auch hier wieder zwei Teilsysteme - im Speziellen nur der Spin-Zustand - betrachtet. Für das System S_1 existiert u_+ für Spin-Up und u_- für Spin-Down, entsprechend bei System S_2 v_+ und v_- . Unten sind nun alle Produktzustände, die zwischen diesen beiden Systemen möglich sind, aufgeführt.

$$u_+ \cdot v_+; u_+ \cdot v_-; u_- \cdot v_+; u_- \cdot v_-$$

Es lassen sich jetzt aber zwei Zustände konstruieren, welche sich nicht als Linearkombination der Einzelsystem-Zustände erzeugen lassen. Dies ist einmal der Singulett

$$\eta_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \{u_+v_- - u_-v_+\}$$

und dann noch der Triplett-Zustand

$$\eta_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \{u_+v_- + u_-v_+\}.$$

Um zu zeigen, daß diese beiden Zustände keine Linearkombination der Einzelsystem-Zustände sind, betrachten wir die allgemeinste Linearkombination, die möglich ist.

$$\begin{aligned} u &= a u_+ + b u_- \\ v &= c v_+ + d v_- \\ uv &= ac u_+ v_+ + ad u_+ v_- + bc u_- v_+ + bd u_- v_- \end{aligned}$$

Um den Singulett- bzw. den Triplett-Zustand zu erzeugen muß also $ac = 0$ und $bd = 0$ gelten. Damit muß aber auch immer einer der mittleren Terme Null werden, die nicht verschwinden sollen. Somit ist es nicht möglich, den Singulett- oder Triplett-Zustand aus einer Linearkombination aufzubauen.

Eine weiter wichtige Eigenschaft der beiden Zustände ist das Ergebnis bei einer Messung des Spins. Bei jeder Messung müssen die Spinstellungen der beiden Teilsystem immer entgegengesetzt sein. Per Messung kann man die beiden Zustände unterscheiden, in dem man die Länge des Gesamtspins Σ^2 mißt. Der Operator $\hat{\Sigma}^2$ läßt sich wie folgt schreiben

$$\hat{\Sigma}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_{1Z}\hat{S}_{2Z} + \hat{S}_1^+\hat{S}_2^- + \hat{S}_1^-\hat{S}_2^+$$

Hierbei sind \hat{S}_i^+ und \hat{S}_i^- die Auf- und Absteigeoperatoren für den jeweiligen Spinzustand. Läßt man diesen Operator nun auf den Singulett-Zustand wirken, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^2 \eta_S &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \hat{S}_1^2 u_+ v_- - \hat{S}_1^2 u_- v_+ + \hat{S}_2^2 u_+ v_- - \hat{S}_2^2 u_- v_+ + 2\hat{S}_{1Z}\hat{S}_{2Z} u_+ v_- - 2\hat{S}_{1Z}\hat{S}_{2Z} u_- v_+ \right. \\ &\quad \left. + \hat{S}_1^+\hat{S}_2^- u_+ v_- - \hat{S}_1^+\hat{S}_2^- u_- v_+ + \hat{S}_1^-\hat{S}_2^+ u_- v_+ - \hat{S}_1^-\hat{S}_2^+ u_+ v_+ \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ +\frac{3}{2} \hbar^2 (u_+ v_- - u_- v_+) - \frac{1}{2} \hbar^2 (u_+ v_- - u_- v_+) - 1 \hbar^2 (u_+ v_- - u_- v_+) \right\} \\ &= 0 \hbar^2 \eta_S \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß im Singulett-Zustand die Länge des Gesamtspins immer verschwindet. Im Triplett-Zustand läßt sich jedoch leicht nachrechnen (identische Rechnung wie oben), daß die Länge immer $1 \hbar^2$ ist. Somit lassen sich beide Zustände durch eine Messung sehr wohl unterscheiden.

Die oben genannten Produktzustände $u_+ v_-$ und $u_- v_+$ lassen sich als Linearkombination des Singulett- und des Triplett-Zustandes darstellen. Da sie sich als Linearkombination darstellen lassen, folgt für die Messung von $\hat{\Sigma}^2$ mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ das Ergebnis $0 \hbar^2$ und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit das Ergebnis $1 \hbar^2$.

Damit kann man aber ein System in einem reinen Singulett-Zustand von einem System im $(u_+ v_- - u_- v_+)$ -Gemisch-Zustand durch die Messung von Σ^2 unterscheiden.

Mit diesen Vorüberlegungen ist es nun möglich, das Pradoxon neu zu formulieren. Wir gehen von einem dissoziierenden System aus, welches in zwei Teilsysteme S_1 und S_2 zerfällt. Dieses gibt es in der Natur beispielsweise bei der Dissoziation von Molekülen. Wir nehmen des weiteren an, daß jedes System in dem Ensemble durch den Singulett-Zustand beschrieben wird.

Das Experiment läuft dann in folgenden Schritten ab:

1. Bei t_0 wird eine Messung der z-Komponente des Spins an S_1 durchgeführt. Diese liefert in 50% der Fälle +1 (Spin-Up) und in den anderen 50% -1 (Spin-Down). Wir gehen nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit von dem Ergebnis +1 aus.
2. Wird nun eine Messung der z-Komponente des Spins an S_2 bei $t > t_0$ durchgeführt, so muß das Ergebnis -1 sein, da die Spinstellungen immer entgegengesetzt sein müssen.
3. Da aber das System S_2 unbeeinflusst von einer Messung an S_1 sein muß, läßt sich schließen, daß die z-Komponente des Spins von S_2 schon für alle t ein Spin-Down-Zustand gewesen sein muß.
4. Daraus folgt, daß der Zustandsvektor von S_2 v_- sein muß.
5. Das bedeutet aber, daß das Gesamtsystem durch den Produktzustand u_+v_- beschrieben wird.
6. Daher muß die Menge an ursprünglichen Systemen sich durch das Gemisch von u_-v_+ - und u_+v_- -Zuständen darstellen lassen. Dieses folgt, wenn man bei Punkt 1. mit dem Messergebnis -1 startet.

Punkt 6. widerspricht aber der vorherigen Feststellung, daß reine Singulett-Zustände und Gemische unterschieden werden können. Wir starten mit einem reinen Singulett-System und kriegen bei unserer Messung heraus, daß es sich schon die gesamte Zeit um ein Gemisch gehandelt haben muß.

Wenn man sich die Kette an Schlußfolgerungen oben genauer ansieht, bleiben nur zwei Möglichkeiten:

1. Die Quantentheorie ist falsch!
2. Die Quantentheorie ist richtig und damit kann nur der einzige Punkt in der Kette an Schlußfolgerungen falsch sein, der nicht durch die Quantentheorie folgt. Bei genauer Betrachtung stellt man fest, daß nur Punkt 3. nicht aus der Quantentheorie folgt. Also ist die Nichtbeeinflussung des Systems S_2 zum Meßzeitpunkt an System S_1 nicht mit der Quantentheorie vereinbar.

In dieser Formulierung des Paradoxons wird deutlich, daß die nicht vorhandene Lokalität der Quantentheorie das Problem ist. Auf irgendeine Art und Weise kann System S_1 auch bei räumlicher Trennung mit System S_2 interagieren. Man spricht deshalb bei der Quantentheorie auch von einer nicht-lokalen Theorie. Diese Eigenschaft veranlaßte Einstein dazu, von einer β pukhaften Wechselwirkung zu sprechen.

4 Mögliche Lösungen

In diesem Abschnitt sollen kurz die Möglichkeiten vorgestellt werden, die es bis heute gibt, das Problem der Nichtlokalität zu lösen.

Auf die Möglichkeit der verborgenen Parameter in der Quantenmechanik gehen die nachfolgenden Vorträge ein, so daß ich diesen Bereich bewußt außen vor lasse.

David Bohm hat vorgeschlagen sich ein neues Bild der Wirklichkeit zu machen. Um zu verdeutlichen, welchen Begriff er von der Realität hat, benutzt er einmal das Bild des Hologramms

und als zweites Tintenkleckse in einer zähen Flüssigkeit. Bei einer Holographischen Aufnahme ist es so, daß in jedem Bildpunkt Informationen über das gesamte Objekt, welches aufgenommen wird, stecken. Dieses bedeutet, daß es in der Aufnahme nicht möglich ist, zwei Objekte zu trennen, sie sind unzertrennlich vereint. Genau so hat man sich nach Bohm die Wirklichkeit vorzustellen. Es ist also nicht möglich, zwei Systeme soweit auseinander driften zu lassen, bis sie nicht mehr wechselwirken. Sie hängen immer zusammen.

Bei dem anderen Bild muß man sich zwei ineinander gesteckte Zylinder vorstellen, zwischen die eine zähe Flüssigkeit (z.B. Glycerin) gefüllt ist. In dieser Flüssigkeit befinden sich zwei kleine Tintenkleckse. Fängt man an die Zylinder langsam (damit keine Turbulenzen entstehen) umeinander zu drehen, so bilden die Kleckse Fäden, welche allmählich eine sehr verwickelte Struktur bilden. Man meint keine Ordnung mehr zu sehen. Dreht man nun die beiden Zylinder in der anderen Richtung gegeneinander, so werden aus der verwickelten Struktur wieder zwei getrennte Tintenkleckse.

Bohm nannte diese Beobachtungen das Prinzip der verhüllten Ordnung. Es soll nur ein Bild für die physikalische Realität sein. Nach Bohm ist der menschlich Geist unfähig, sich die physikalische Wirklichkeit vorzustellen.

Vigiers hat eine Theorie der Fernwirkung aufgestellt. Nach dieser Theorie gibt es ein Quantenpotential, welches sich mit Überlichtgeschwindigkeit (eigentlich sogar instantan) ausbreiten kann. In diesem Potential werden die Randbedingungen, welche durch eine Messung beeinflußt werden vermittelt. Die Teilchen bewegen sich dann nach Maßgabe des Quantenpotentials mit Unterlichtgeschwindigkeit.

Vigier hat Experimente vorgeschlagen, welche überprüfen sollen, ob die Übertragungsgeschwindigkeit trotz Überlichtgeschwindigkeit endlich ist. Es handelt sich hierbei allerdings nicht um eine vollständig ausgearbeitete Theorie.

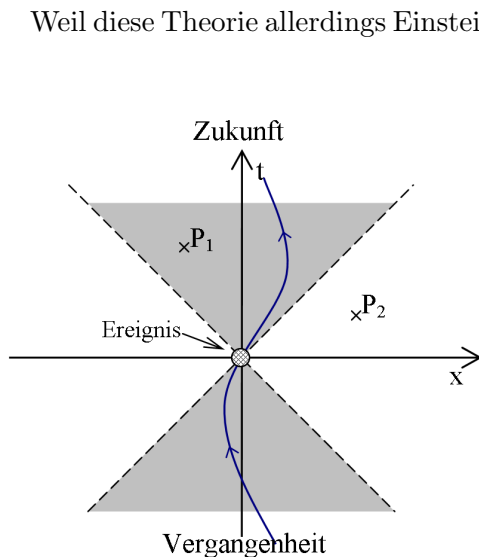


Abbildung 1: Der Lichtkegel

Weil diese Theorie allerdings Einsteins spezielle Relativitätstheorie verletzt, da Informationen mit Geschwindigkeiten größer als c übertragen werden, gibt es auch noch eine Theorie über sogenannte avancierte Wellen, welche formal die Relativitätstheorie beachten. Um zu verstehen wie dies funktioniert, sei nochmal kurz an den Lichtkegel erinnert (siehe Abbildung 1). Wichtig ist, daß nur Weltlinien mit einer Steigung größer als 45° zugelassen sind, nur Punkte innerhalb des Zukunftskegels noch vom Ursprung aus zu beeinflussen sind und daß nur Punkte im Vergangenheitskegel des Ereignis im Ursprung beeinflussen können. In Abbildung 2 ist das Paradoxon in ein Raum-Zeit-Diagramm eingetragen. Man sieht, daß zum Meßzeitpunkt keine Weltlinie das System S_1 mit dem System S_2 verbinden kann, solange man sich auf den Zukunftskegel beschränkt. Es ist aber sehr wohl möglich eine Weltlinie in die Vergangenheit zum Ursprung der Teilsysteme zu ziehen. Die Information kann also über die Vergangenheit mit Unterlichtgeschwindigkeit übertragen werden.

Diese zeitsymmetrische Theorie weist große Ähnlichkeit zu der Positronentheorie von Feynmann auf, in der sich Teilchen mit negativer Energie in die Vergangenheit ausbreiten.

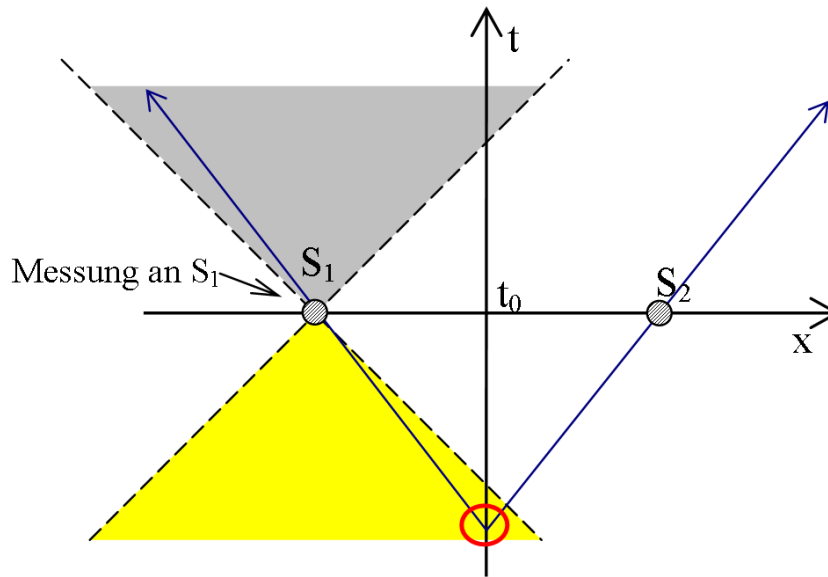


Abbildung 2: Das Paradoxon in der Raum-Zeit

5 Zusammenfassung

Es bleibt zu beachten, daß auch heute das Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon ein sehr wichtiges Problem ist, da es uns bewußt macht, daß unsere Vorstellung von Wirklichkeit, Zeit und Raum nicht so sind, wie sie die Quantenmechanik benötigt. Die Quantenmechanik ist eine nichtlokale Theorie, was für den menschlichen Verstand nur schwer zu fassen ist.

Interessant ist es auch zu sehen, wie sehr philosophische Aspekte in einer physikalischen Theorie eine Rolle spielen.

Außerdem zeigt es, wie bedeutend die Diskussion über physikalische Probleme ist.

6 Literaturangaben

- **F. Selleri:** Die Debatte um die Quantentheorie
- **A. Rae:** Quantenphysik: Illusion oder Realität?
- **G. Münster:** Quantentheorie
- **Baumann, Roman und Sexl:** Die Deutungen der Quantentheorie



Abbildung 3: Albert Einstein und Niels Bohr in einer Diskussion im Jahre 1930