Übungsblatt 1
für 18.4/21.4

Übungen zu Physik II: Mo. 8-10 Uhr und Do. 8-10 Uhr

H. F. Arlinghaus, R. Friedrich, Veranstaltung Nr. 110927, SS 2005

$http://pauli.uni-muenster.de/menu/Arbeitsgebiete/friedrich.html$

MÜNDLICH:

Aufgabe 1: Wirbel und Quellen I (1 P)
Zeichnen Sie die Vektorfelder $\mathbf{A} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{B} = x_2\mathbf{e}_1 - x_1\mathbf{e}_2$ und bestimmen Sie ihre Quellen und Wirbel. Hinweis: Betrachten Sie $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ als drei-dimensionale Vektoren mit Komponenten $A_3 = B_3 = 0$.

Aufgabe 2: Wirbel und Quellen II (1 P)
Für welchen Wert der Konstanten a ist das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = (axy - z^3)\mathbf{e}_1 + (a-2)x^2\mathbf{e}_2 + (1-a)xz^2\mathbf{e}_3 \qquad (1)$$

wirbelfrei? Kann man durch geeignete Wahl von a das Vektorfeld $\mathbf{A}$ auch quellenfrei machen?

Aufgabe 3: Potentialfelder (1 P)
Zeigen Sie, daß

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} yz + 12xy \\ xz - 8yz^3 + 6x^2 \\ xy - 12y^2z^2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

wirbelfrei ist und bestimmen Sie das dazugehörige Potential φ (mit $\mathbf{A} = \nabla\varphi$).

Aufgabe 4: Wirbel und Quellen III (1 P)
Zeichnen Sie das Vektorfeld $\mathbf{A} = (f(y), 0, 0)$ und bestimmen Sie seine Wirbel und Quellen.

Aufgabe 5: Wirbel und Quellen IV (1 P)
Berechnen Sie die Divergenz von $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x})$ und zeigen Sie dadurch, auf welche Weise die Quellen des Feldes $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x})$ durch die Wirbel und Quellen der einzelnen Felder $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ bestimmt sind.

Aufgabe 6: Wirbel und Quellen V (1 P)
Berechnen Sie die Rotation von $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x})$ und zeigen Sie dadurch, auf welche Weise die Wirbel und Quellen der einzelnen Felder $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ wichtig sind für die Wirbel des Feldes $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x})$. Hinweis: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

Aufgabe 7: Zirkulationsströmung (2 P)
Machen Sie sich klar, daß $\mathbf{e}_\varphi$ in der XY-Ebene geschrieben werden kann als $\mathbf{e}_\varphi = (-y/r, x/r)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Betrachten Sie dann die ebene Zirkulationsströmung

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{a}{r}\,\mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{ay}{r^2} \\ \frac{ax}{r^2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

a) Bestätigen Sie, daß die Strömung für $r = 0$ wirbelfrei ist ($\mathrm{rot}\mathbf{v} = \mathbf{w} = 0$). Hinweis: Fassen Sie dazu $\mathbf{v}$ als 3-komponentigen Vektor mit $v_z = 0$ auf.

b) Zeigen Sie, daß das dazugehörige Geschwindigkeitspotential ($\mathbf{v} = \nabla\varphi$) die Form

$$\varphi = a \arctan\frac{y}{x} \tag{4}$$

besitzt.

c) Bestätigen Sie, daß φ die zweidimensionale Laplace-Gleichung erfüllt.

d) Berechnen Sie die Zirkulation Γ:

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \ . \tag{5}$$

Aufgabe 8: Kontinuitätsgleichung (1P)
Beweisen Sie unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \mathrm{div}\,\{\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\} = 0 \tag{6}$$

die Relation

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \{\rho\mathbf{u}\,\mathbf{u}\} = \rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} + [\mathbf{u} \cdot \nabla]\mathbf{u}\right) \ . \tag{7}$$

Hinweis: $\nabla \cdot \{\rho\mathbf{u}\,\mathbf{u}\}|_i = \sum_{k=1}^3 \partial(u_i u_k \rho)/\partial x_k$.