Übungsblatt 1:

Übungen zu Physik III

H.F. Arlinghaus, R. Friedrich, Veranstaltung Nr. 110969, WS 2005/06

$http://pauli.uni-muenster.de/menu/Arbeitsgebiete/friedrich/lehrews0506.html$

*=Aufgaben aus der Experimentalphysik

SCHRIFTLICH:

Aufgabe 1: (3 P)

Berechnen Sie für das Rechteck mit den Eckpunkten $(b, a/\sqrt{2}, 0)$, $(0, a/\sqrt{2}, 0)$, $(0, 0, a/\sqrt{2})$, $(b, 0, a/\sqrt{2})$

1) das vektorielle Flächenelement d**f**
2) den Vektor der Gesamtfläche **F**
3) den Fluß des Feldes

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (y^2, 2xy, 3z^2 - x^2) \tag{1}$$

durch die Fläche **F** des Rechtecks.

Aufgabe 2: (3 P)

Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ durch die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R um den Koordinatenursprung für die folgenden Fälle:

1) $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = 3\mathbf{r}/r^2$
2) $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (x, y, z)/\sqrt{\alpha + x^2 + y^2 + z^2}$
3) $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (3z, x, 2y)$

MÜNDLICH:

Aufgabe 3: (2 P)

Bei bekannter Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ läßt sich über

$$Q = \int \rho(\mathbf{r})\, \mathrm{d}^3 r \tag{2}$$

die elektrische Gesamtladung Q und über

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\, \mathrm{d}^3 r \tag{3}$$

das elektrische Dipolmoment $\mathbf{p}$ der Ladungsverteilung bestimmen. Berechnen Sie diese Größen für eine homogen geladene Kugel vom Radius R: $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0$ falls $|\mathbf{r}| \leq R$ und $\rho(\mathbf{r}) = 0$ falls $|\mathbf{r}| > R$.

Aufgabe 4: (3 P)

Beweisen Sie die folgenden Relationen:

1) Gradient eines Skalarproduktes

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) \tag{4}$$

2) Divergenz eines Vektorproduktes:

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \tag{5}$$

3) Rotation eines Vektorproduktes:

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) \tag{6}$$

Aufgabe 5: (4 P)

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (0, 0, y)$ sowie die Fläche F, definiert als der im ersten Oktanten gelegene Teil der Ebene

$$6x + 3y + 2z = 12 \tag{7}$$

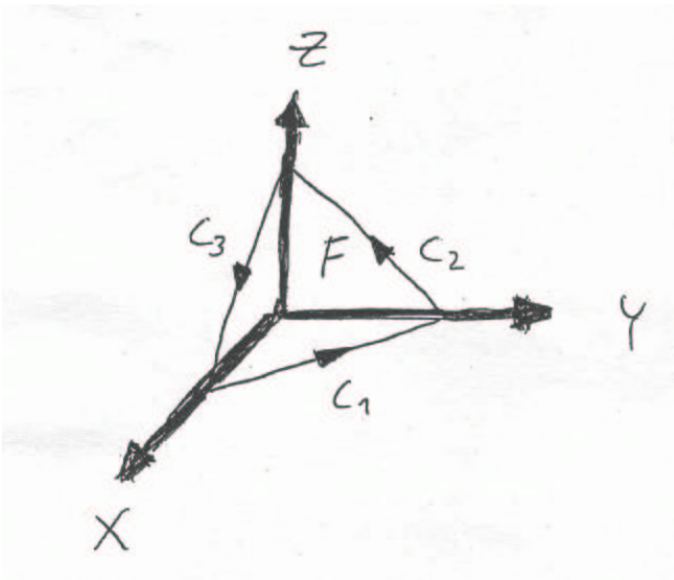
(siehe Abbildung).

1) Wie lautet die Parameterdarstellung der Fläche F? Geben Sie das vektorielle Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{f}$ an.

2) Berechnen Sie den Fluß von $\mathbf{a}$ durch F.

3) Begründen Sie, warum sich $\mathbf{a}$ als Wirbelfeld $\mathrm{rot}\vec{\beta}(\mathbf{r})$ darstellen läßt. Ist die Wahl von $\vec{\beta}(\mathbf{r})$ eindeutig? Konstruieren Sie ein mögliches $\vec{\beta}(\mathbf{r})$.

4) Berechnen Sie noch einmal den Fluß von $\mathbf{a}$ durch F, nun mit Hilfe eines Linienintegrals über den Weg $C = C_1 + C_2 + C_3$ (siehe Abbildung). Bestätigen Sie damit das Resultat aus 2). Wie wirkt sich die Nicht-Eindeutigkeit von $\vec{\beta}(\mathbf{r})$ aus?



Aufgabe 6: (1 P)

Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (-y(x^2+y^2), x(x^2+y^2), xyz) \tag{8}$$

das Linienintegral

$$\oint \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{9}$$

längs des in der XY-Ebene liegenden Kreises um den Koordinatenursprung mit dem Radius R.

Aufgabe 7: (2 P)

Handel es sich im folgenden um reine Gradientenfelder oder reine Rotationsfelder?
1) $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$
2) $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (6\alpha x, z\cos(yz), y\cos(yz))$
3) $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (x(z-y), y(x-z), z(y-x))$
4) $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (x^2 y, \cos z^3, zy)$