Übungen zu Physik IV (SS 2002)

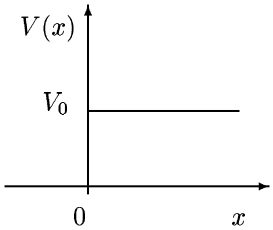
(G. Münster / T. Peitzmann)

Blatt 6

Aufgabe 23 (L:0;D:4): Potenzialstufe

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Teilchen, dass sich in folgendem Potenzial befindet:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x \geq 0 \end{cases}$$



a) Bestimmen Sie die stationäre Wellenfunktion für ein von links einlaufendes Teilchen durch Verwendung der Anschlussbedingungen.

b) Ermitteln Sie für $E > V_0$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte, den Reflexions- und den Transmissionskoeffizienten. *Hinweis: Hierzu müssen die Ströme bestimmt werden.*

c) Berechnen Sie $\rho(x)$, T und R nun für $0 \leq E < V_0$ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit Teil b).

Aufgabe 24 (L:3;D:3): Streuung an der harten Kugel

Berechnen Sie aus der klassischen Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \cdot \frac{db}{d\theta}$$

(Stossparameter b, Streuwinkel θ) den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ und den totalen Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einer harten Kugel mit Radius R.

Aufgabe 25 (L:5;D:5): Rutherford-Streuung

Eine Al-Folie (Dichte $\rho_V = 2.7\,\mathrm{g/cm^3}$) mit einer Flächendichte von $\rho_A = 40\,\mu\mathrm{g/cm^2}$ wird mit α-Teilchen der Energie $E = 5\,\mathrm{MeV}$ beschossen. Man nehme im folgenden an, dass es sich um reine Rutherford-Streuung handelt. Die Wahrscheinlichkeit $W(\theta)$, dass ein Teilchen in den Winkelbereich zwischen θ und $180°$ gestreut wird, ist gegeben durch:

$$W(\theta) = n \cdot \sigma_{int}(\theta, 180°)$$

mit

$$\sigma_{int}(\theta, 180°) = 16.286\,\frac{Z_1^2 Z_2^2}{E^2}\,\cot^2(\theta/2).$$

Dabei ist n die Zahl der Streuzentren pro Flächeneinheit. E ist gegeben in MeV und σ in $\mathrm{mb} = 10^{-27}\,\mathrm{cm}^2$.

a) Wie dick ist die Folie? Wie groß ist die Anzahl der Streuzentren pro Flächeneinheit?

b) Wieviel Prozent der Teilchen werden um mehr als $60°$ abgelenkt? Wie groß ist der Winkelbereich, in den 50% der Teilchen gestreut werden? Wie groß ist der Durchmesser der Kreisfläche im Abstand von 50 mm von der Al-Folie, durch die 90% der Intensität der nach vorne gestreuten Teilchen treten, wenn die α-Teilchen in die Folie über eine Kreisfläche von 3 mm Durchmesser gleichmässig verteilt und parallel eintreten?

c) Der über den gesamten Winkelbereich integrierte Rutherford-Wirkungsquerschnitt ist divergent. Andererseits muss jedoch die Wahrscheinlichkeit $W(0°) \equiv 1$ sein nach Definition. Wodurch entsteht der Widerspruch? Betrachten Sie den Winkel, für den sich $W(\theta) = 1$ ergibt. Wie groß ist der zugehörige Stossparameter b? Vergleichen Sie b mit dem mittleren seitlichen Abstand der Streuzentren. Die Ablenkfunktion lässt sich schreiben als (E in MeV und b in fm):

$$b = 0.72 \frac{Z_1 Z_2}{E} \cdot \cot(\theta/2).$$

Aufgabe 26 (L:0;D:4): Skalarprodukt und Hermitizität

Betrachten Sie den N-Dimensionalen Raum $\mathbb{C}^N$ der komplexwertigen Spaltenvektoren

$$\underset{\sim}{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \quad , \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

a) Ein Skalarprodukt $\langle \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \rangle$ in $\mathbb{C}^N$ ist definiert durch das Matrixprodukt $\underset{\sim}{a}^\dagger \underset{\sim}{b}$, wobei $\underset{\sim}{a}^\dagger = (\underset{\sim}{a}^\top)^*$ die zu $\underset{\sim}{a}$ transponierte und komplex-konjugierte $1 \times N$-Matrix (Zeilenvektor) ist. Schreiben Sie dieses Skalarprodukt in Komponenten aus und verifizieren Sie die Eigenschaften:

(i) $\langle \underset{\sim}{a}, \gamma_1 \underset{\sim}{b}_1 + \gamma_2 \underset{\sim}{b}_2 \rangle = \gamma_1 \langle \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}_1 \rangle + \gamma_2 \langle \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}_2 \rangle$
$\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}_1, \underset{\sim}{b}_2 \in \mathbb{C}^N, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ (Linearität)

(ii) $\langle \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \rangle = (\langle \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{a} \rangle)^*$ (Symmetrie bis auf Komplex-Konjugation)

(iii) $||\underset{\sim}{a}||^2 := \langle \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a} \rangle$ ist positiv reell (≥ 0),
wobei $\langle \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underset{\sim}{a} = 0$ (positiv und nicht entartet)

Zeigen Sie, dass aus (i) und (ii) folgt:
$$\langle \gamma_1 \underset{\sim}{b}_1 + \gamma_2 \underset{\sim}{b}_2, \underset{\sim}{a} \rangle = \gamma_1^* \langle \underset{\sim}{b}_1, \underset{\sim}{a} \rangle + \gamma_2^* \langle \underset{\sim}{b}_2, \underset{\sim}{a} \rangle \qquad \text{(Antilinearität)}$$

b) Es sei A ein Endomorphismus von $\mathbb{C}^N$, d.h. eine $N \times N$-Matrix (α_{ij}) mit Einträgen aus $\mathbb{C}$. Ein Endomorphismus heißt zu A adjungiert (Schreibweise: $A^\dagger$), wenn gilt:

$$\langle A^\dagger \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \rangle = \langle \underset{\sim}{a}, A \underset{\sim}{b} \rangle \quad \forall \ \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \ \in \ \mathbb{C}^N.$$

Geben Sie die Elemente der Matrix von $A^\dagger$ an. Ist $A^\dagger$ eindeutig bestimmt ?

c) Ein Endomorphismus A von $\mathbb{C}^N$ heißt *hermitisch* oder *selbstadjungiert*, wenn $A^\dagger = A$ gilt.
Es seien A und B hermitische Operatoren. Welche der folgenden Operatoren sind wiederum hermitisch?

- λA mit $\lambda \in \mathbb{C}$,
- AB,
- $[A, B] := AB - BA$,
- $i[A, B]$.