Übungen zu Physik IV (SS 2002)

(G. Münster / T. Peitzmann)

Blatt 8

Aufgabe 31 (L:0;D:4): Operatoridentitäten

a) Beweisen Sie die Operatoridentität

$$[AB, C] \;=\; [A, C]B + A[B, C]$$

b) Berechnen Sie ausgehend von der Born-Jordanschen Vertauschungsrelation $[P_j, Q_k] \;=\; \frac{\hbar}{i}\delta_{jk}\mathbb{1}$ mit Hilfe von Aufgabenteil a) die Kommutatoren

$$[\vec{P}^2, Q_k] \qquad \text{und} \qquad [L_k, Q_l],$$

wobei $L_k \;=\; \varepsilon_{ijk} Q_i P_j$ (Summenkonvention!) der Operator einer Drehimpulskomponente ist.

c) Zeigen Sie, dass für Operatoren A, B und C die Jacobi-Identität

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] \;=\; 0$$

erfüllt ist.

d) Zeigen Sie die Operatoridentität

$$e^A B e^{-A} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, B]^{(n)},$$

wobei $[A, B]^{(n)}$ rekursiv durch $[A, B]^{(0)} = B$ und $[A, B]^{(n+1)} = [A, [A, B]^{(n)}]$ definiert ist.

Aufgabe 32 (L:4;D:4): Kernkräfte

a) Durch die starke Wechselwirkung werden Nukleonen im Kern mit etwa 8 MeV pro Nukleon gebunden. Wie nah müssten sich zwei punktförmige Nukleonen kommen, damit sie

- durch die Gravitationskraft oder
- durch die Coulomb-Wechselwirkung (bei zunächst hypothetischer entgegengesetzter Ladung)

mit 8 MeV gebunden sind? Wie vergleichen sich diese Abstände mit Abständen in der Kernphysik? Wie groß ist die Coulomb-Energie zweier Protonen im Abstand von $r_0 \;=\; 1.3\,\mathrm{fm}$ (Reichweite der starken Wechselwirkung) im Verhältnis zur Bindungsenergie durch die starke Wechselwirkung?

b) Wie sehen von der Größenordnung her typische Abstände gebundener Zustände obiger Wechselwirkungen aus? Schätzen Sie den Abstand eines „Atoms“ aus einem Proton und dem Antiproton (das Antiteilchen, gleiche Masse wie das Proton, aber negative Ladung) ab, das durch die Coulomb-Wechselwirkung entstünde.

Aufgabe 33 (L:1;D:1): Elektronen im Kern?

Vor der Entdeckung des Neutrons versuchte man die verschiedenen Isotope eines Elements mit dem Aufbau der Kerne aus Protonen und Elektronen zu erklären. Indizien dafür gab es aus dem β-Zerfall, bei dem Elektronen aus dem Kern emittiert werden. Die Energie der Elektronen beträgt dabei maximal einige MeV – beim Zerfall des ^{137}Cs erhält man z.B eine Maximalenergie der Elektronen $E_0 = 1.18\,\mathrm{MeV}$. Zeigen Sie anhand der Impuls-Ort-Unschärferelation, dass sich das Elektron nicht innerhalb des Kerns aufhalten kann.

Aufgabe 34 (L:0;D:4): Operatorfunktionen

a) $f(Q)$ sei eine analytische Funktion des Ortsoperators Q in einer Dimension. Berechnen Sie die Kommutatoren $[Q, f(Q)]$ und $[P, f(Q)]$, indem Sie

- die Definitionen der Operatoren im Ortsraum verwenden,
- $f(Q)$ in eine Potenzreihe entwickeln und den Kommutator $[P, Q^n]$ bestimmen.

b) Reproduzieren Sie, dass der Kommutator $[P, f(Q)]$ für $f(Q) = Q$ die Born-Jordansche Vertauschungsrelation liefert.

c) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 31d), dass die Relation

$$e^{i\frac{a}{\hbar}P}\, Q\, e^{-i\frac{a}{\hbar}P} = Q + a\mathbb{1}$$

gilt.

Aufgabe 35 (L:3;D:3): Symmetrische Kernspaltung

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Weizsäckerschen Massenformel (unter Weglassen der Paarungsenergie):

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3} - a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A}$$

mit $a_V = 15.85\,\mathrm{MeV}$, $a_S = 18.35\,\mathrm{MeV}$, $a_C = 0.71\,\mathrm{MeV}$ und $a_A = 92.86\,\mathrm{MeV}$, unter welcher Bedingung bei der symmetrischen Spaltung eines Kerns in zwei gleiche Teile mit $A/2$, $Z/2$, $N/2$ ein Energiegewinn möglich ist. Berechnen Sie den Energiegewinn für die Spaltung eines $^{238}_{92}$U-Kerns. In welcher Form findet sich diese Energie wieder?

b) Wie verhält sich der Coulombterm zum Volumenterm für Uran? Vergleichen Sie dies mit Aufgabe 32 a).