ÜBUNGEN zu PHYSIK IV (SS 2003) **Blatt 11**

H. Kohl & S.J. Linz 09.07.03

Besprechung der Übungsaufgaben: 18.07.03/22.07.03

schriftlich: E34, T26; Alle anderen Aufgaben/-teile mündlich

Letztes Blatt

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Dienstagsübung am 15.07.03

Aufgabe E32: DEBYE-SCHERRER-Verfahren (6 Punkte)

Bei einer DEBYE-SCHERRER-Aufnahme von Wolfram (kubisch-raumzentriert) wurden auf dem Film folgende Abstände zwischen symmetrisch zum Strahl liegenden Reflexen gemessen:

$$40,9 \ldots 58,8 \ldots 73,3 \ldots 87,5 \ldots 101,2 \ldots 115,3 \ldots 131,3 \ldots 153,1\text{mm}$$

Die Kamera hat einen Durchmesser von 57,3mm. Für die Messung wurde eine Cu K-Linie ($\lambda = 1,54$Å) benutzt.

a) Führen Sie die Indizierung der Linien durch und begründen Sie diese. (3 P)

b) Wie groß ist die Gitterkonstante? (1 P)

c) Berechnen Sie die Dichte der röntgenographisch bestimmten Struktur und vergleichen Sie den Wert mit der makroskopischen Dichte $\rho = 19,3\text{g/cm}^3$. (1 P)

d) Wie groß ist der Ionenradius unter der Annahme sich berührender, starrer Kugeln? Vergleichen Sie diesen Wert mit dem aus Ionenkristallen (Wolframsalzen) bestimmten Daten von $r = 0,76$Å für W^{4+} und $r = 0,67$Å für W^{6+} . (1 P)

Aufgabe E33: DEBYE-Näherung (5 Punkte)

Berechnen Sie den Beitrag der Gitterschwingungen zur spezifischen Wärme eines Festkörpers unter Verwendung der DEBYE-Näherung. Diskutieren Sie insbesondere die Grenzfälle sehr hoher und sehr niedriger Temperatur.

Hinweis: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}$

Aufgabe E34: Auslöschungsregeln (6 Punkte)

Für welche Indexkombinationen hkl verschwindet der Strukturfaktor F_{hkl}, wenn die Kristallstruktur

a) eine Gleitspiegelebene (3 P)

b) eine 4-zählige Schraubenachse (parallel zur $\vec{c}$-Richtung) enthält? (3 P)

Aus der Existenz einer Gleitspiegelebene mit dem Translationsvektor $\frac{1}{2}\vec{b}$ verknüpft mit einer Spiegelung an der x-y-Ebene folgt, daß zu jedem Atom j mit den Koordinaten (ξ_j, η_j, ζ_j) ein zweites mit den Koordinaten $(\xi_j, \eta_j + \frac{1}{2}, -\zeta_j)$ existiert. Fassen Sie bei der Rechnung paarweise zusammen! Wie lautet die entsprechende Beziehung für eine 4-zählige Schraubenachse in $\vec{c}$-Richtung?

Hinweis: Betrachten Sie speziell die Reflexe $hk0$ (für Teil a)) und $00l$ (für Teil b)).

Aufgabe T26: Coulomb-Potential in einer Dimension (8 Punkte)

Bestimmen Sie die diskreten Energieniveaus für ein Teilchen in einem Feld mit der potentiellen Energie

$$V(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^2}{x} & x > 0 \\ \infty & x \leq 0 \end{cases}$$

wobei $e^2 > 0$.

a) Führen Sie in der Schrödinger-Gleichung die entdimensionalisierte Länge $\xi = 2\gamma \cdot x$ ein, wobei $\gamma^2 = -2mE/\hbar^2 > 0$. Zeigen Sie, daß sich die Lösung $u(\xi)$ für große ξ asymptotisch wie $e^{-\xi/2}$ verhält. (4 P)

b) Wandeln Sie die Schrödinger-Gleichung mit Hilfe des Ansatzes

$$u(\xi) = e^{-\xi/2} \cdot f(\xi)$$

in eine Differentialgleichung für $f(\xi)$ um. (2 P)

c) Bestimmen Sie $f(\xi)$ durch einen Potenzreihenansatz, $f(\xi) = \sum_n a_n \xi^n$. (1 P)

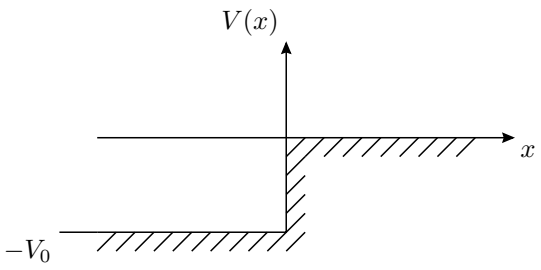
d) Ermitteln Sie die diskreten Energieniveaus aus der Forderung, daß die unendliche Reihe für $f(\xi)$ abbricht! (1 P)

Aufgabe T27: Potentialstufe (8 Punkte)

Untersuchen Sie die Lösung

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ik_1 x} + r \cdot e^{-ik_1 x} & x < 0 \\ s \cdot e^{-ik_2 x} & x > 0 \end{cases}$$

der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für eine Potentialstufe ($V(x) = -V_0$ für $x < 0$ und $V(x) = 0$ für $x > 0$).



a) Ermitteln Sie $k_{1,2}$ sowie die Amplituden r und s . Interpretation? (2 P)

b) Für $E > 0$ berechne man die einfallende, die reflektierte und die transmittierte Wahrscheinlichkeitsstromdichte j_0, j_r bzw. j_t . Daraus ermittele man den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten $R = \left|\frac{j_r}{j_0}\right|$ und $T = \left|\frac{j_t}{j_0}\right|$. Was ergibt sich im klassischen Grenzfall $E \gg V_0$? (2 P)

c) Der entgegengesetzte Grenzfall $0 < E \ll V_0$ hat folgende *Anwendung*: Bei der Untersuchung der Emission von Elektronen aus Metallen muß man berücksichtigen, daß Elektronen mit einer kinetischen Energie, welche die Austrittsarbeit V_0 ($\approx$ 10eV für gewöhnliche Metalle) übersteigt, an der Metalloberfläche (im Modell hier bei $x = 0$) reflektiert werden können. Bestimmen Sie den Anteil der reflektierten Elektronen für $E = 0.1\text{eV}$. (2 P)

d) Errechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichten sowie Reflexions- und Transmissionskoeffizienten im Fall $-V_0 < E < 0$. (2 P)

Aufgabe T28: Zeitliches Verhalten im ∞ tiefen Potentialtopf (6 Punkte)

Die Wellenfunktion für ein Teilchen im Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ \infty & |x| > a \end{cases}$$

sei bei $t = 0$

$$\psi(x, t = 0) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi}{a} x & -a < x < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Wo befindet sich das Teilchen? (1 P)

b) Zeigen Sie: Die Entwicklung von $\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) e^{-i\omega_n t}$ nach Energieeigenfunktionen $\varphi_n(x)$ lautet

$$\psi(x, t) = c_2 \varphi_2(x) e^{-i\omega_2 t} + \sum_n{}' c_n \varphi_n(x) e^{-i(n^2/4)\omega_2 t} ,$$

wobei $\omega_n = \omega_2 \frac{n^2}{4} = \frac{\hbar}{2m} \left[\frac{\pi}{a} \frac{n}{2}\right]^2$. In $\sum'$ wird über $n = 1, 3, 5, ...$ summiert. (1 P)

c) Zeigen Sie $\psi(x, t) = \psi(x, t + T)$ für $T = 8\pi/\omega_2$. (1 P)

d) Drücken Sie $\psi(x, t)$ zu den Zeiten $t = T/4, T/2, 3T/4$ durch $\psi(x, 0)$ und $\varphi_2(x)$ aus. Man benutze $\sum_n' c_n \varphi_n(x) = \psi(x, 0) - c_2 \varphi_2(x)$. (1 P)

e) Skizzieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte zu den in (d) angegebenen Zeiten. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, das Teilchen bei $t = T/2$ in der rechten Kastenhälfte zu finden. (2 P)