ÜBUNGEN zu PHYSIK IV (SS 2003) **Blatt 5**

H. Kohl & S.J. Linz 14.05.03

Besprechung der Übungsaufgaben: 23.05.03/27.05.03

schriftlich: E14,T8 ; Alle anderen Aufgaben/-teile mündlich

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Dienstagsübung am 20.05.03

Aufgabe E14: Rutherford-Streuung (6 Punkte)

Gegeben sei ein α-Teilchenstrahl der kinetischen Energie 1MeV.

a) Dieser Strahl werde auf eine Goldfolie ($^{79}_{197}$Au, Dicke 19,29 g/cm) der Dicke $d = 2\mu$m geschossen. Welcher Bruchteil der α-Teilchen wird unter einem Winkel $\theta > 90°$ gestreut (3 P)

b) Der Teilchenstrahl habe die Stromstärke $I_0 = 10^{-5}$A. Er treffe auf ein Target mit der „Flächendichte“ von $n = 8,12 \cdot 10^{18}$ Atomen pro cm^2 und der Ordnungszahl Z. In einem Detektor mit einer quadratischen Öffnung von 1cm^2, der unter einem Winkel $\theta = 15°$ in einem Abstand von 1m vom Target aufgestellt ist, mißt man eine Stromstärke $I = 10^{-9}$A. Aus welchem Material besteht das Target? (3 P)

Aufgabe E15: Positronium (1 Punkt)

Ein Elektron und ein Positron bewegen sich auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Wie groß sind Abstand und Bindungsenergie im Grundzustand?

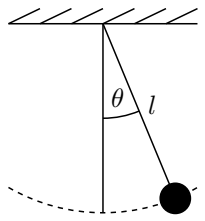
Aufgabe E16: Photonenimpuls (3 Punkte)

a) Welchen Impuls hat ein Photon, dessen Energie gleich der Ruheenergie eines Elektrons ist? (1 P)

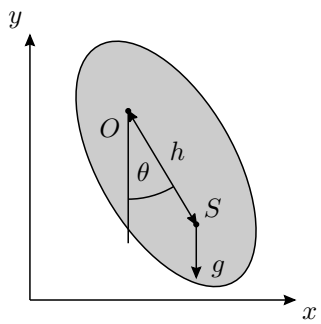
b) Zeigen Sie, daß ein freies Elektron niemals ein Photon vollständig absorbieren kann bzw. daß ein Photon in einem Stoß mit einem freien Elektron nicht seine gesamte Energie übertragen kann. (2 P)

Aufgabe T8: Lagrange-Funktion von einfachen Pendeln (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des ebenen mathematischen Pendels (siehe Abb.), wobei Sie als generalisierte Koordinate den Winkel θ betrachten. Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen des Pendels ab sowie die entsprechende Hamilton-Funktion und die Hamilton-Gleichungen. (3 P)



b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des ebenen physikalischen Pendels (vgl. Abb.), das im Punkt O im Abstand h vom Schwerpunkt S aufgehängt ist. Das Pendel besitze die Masse M und das Trägheitsmoment I_0 bezügl. seiner Drehachse. Ermitteln Sie daraus die Bewegungsgleichungen des physikalischen Pendels, die zugehörige Hamilton-Funktion und die Hamilton-Gleichungen. (3 P)



Aufgabe T9: Noether-Theorem: Drehimpulserhaltung (3 Punkte)

Ausgehend von der allgemeinen Formel für Erhaltungsgrößen, die aus dem Noether-Theorem folgt (vgl. Vorlesung), zeige man, daß die Invarianz der Lagrange-Funktion und der Wirkung unter der Transformation

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t' = t \\ q_i &\rightarrow q_i' = q_i + \epsilon \sum_{k,l=1}^{3} \epsilon_{ikl}\omega_k q_l, \qquad (i = 1, 2, 3),\ \vec{\omega} = \text{const.} \end{aligned}$$

Drehimpulserhaltung impliziert, $\vec{L} = \text{const.}$. (Tip: $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$)

Aufgabe T10: Kürzungsregeln und Kommutativität bei Trafo (6 Punkte)

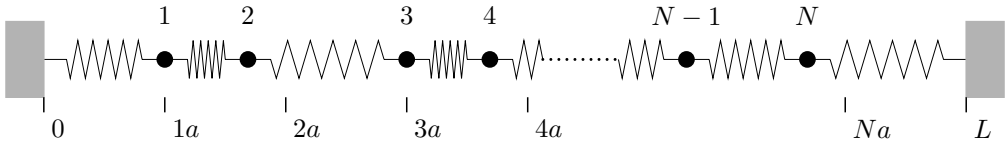
Gegeben sei eine beliebige Transformation von Koordinaten $\underline{q}$ auf Koordinaten $\underline{r}$ mit

$$\begin{aligned} \underline{r} &= (r_1, ..., r_n) \\ r_i &= r_i(q_1, ..., q_n, t) \qquad (i = 1, ..., n). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß $\dfrac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \dfrac{\partial r_i}{\partial q_j}$ und $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial r_i}{\partial q_j} = \dfrac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}$ gilt, wobei die partiellen Ableitungen von r_i zumindest als stetig vorausgesetzt werden. (3 + 3 P)

Aufgabe T11: Lineare Kette (8 Punkte)

Die Grundlage der physikalischen Beschreibung aller kristallinen Festkörper ist das Gittermodell: Man nimmt an, daß die Atome, die einen Festkörper aufbauen, in einem regelmäßigen Gitter angeordnet sind. Läßt man näherungsweise nur harmonische Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen zwischen ihnen zu, so erhält man bereits ein sehr gutes Modell, das Festkörpereigenschaften wie spezifische Wärme und Schallwellen zu erklären vermag. Die wesentlichen Züge solcher Rechnungen zeigt schon seine eindimensionale Version: Man untersucht die longitudinalen Schwingungen einer eindimensionalen Kette von N Massenpunkten der Masse m, die durch masselose Federn der Federkonstanten f miteinander verbunden sind. Die Ruhelänge der Federn sei die Gitterkonstante a. Der erste und der letzte Massenpunkt seien jeweils über eine weitere Feder gleicher Art mit einer festen Wand verbunden.



a) Wie lauten die Lagrange-Funktion dieses Systems und die sich aus ihr ergebenden Bewegungsgleichungen? Als Koordinaten wähle man die Auslenkung q_n, $n = 1, ..., N$ der Massenpunkte aus ihren Ruhelagen. (1 P)

b) Leiten Sie mit Hilfe des Ansatzes $q_j = Q_j \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ die Eigenwertgleichung des Systems her! Bei der Umformung der Eigenwertgleichung ist es hilfreich, daß sich für die Determinante D_N durch Entwickeln nach der ersten Zeile eine Rekursionsformel der Form

$$D_N = 2uD_{N-1} - D_{N-2}, \qquad u = \frac{m\omega^2}{2f} - 1$$

ableiten läßt. Die Determinante D_{N-1} ergibt sich aus D_N durch Streichen der ersten Spalte und der ersten Zeile und hat im übrigen dieselbe Form wie D_N. Zur Auswertung einer solchen Rekursionsformel kann man, ähnlich wie bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, von dem Ansatz $D_N = \beta^N$ ausgehen. Durch lineare Superposition der beiden Lösungen für β, unter Beachtung der Startwerte D_0 und D_1, die sich unmittelbar angeben lassen, erhält man die allgemeine Lösung der Rekursionsformel. Zeigen Sie so, daß die Eigenwertgleichung in der Form

$$\frac{1}{2\sqrt{u^2-1}}\left((u+\sqrt{u^2-1})^{N+1} - (u+\sqrt{u^2-1})^{-N-1}\right) = 0$$

geschrieben werden kann. (2 P)

c) Welche Eigenwerte ergeben sich aus der in Teil b) hergeleiteten Eigenwertgleichung?

d) Aufgrund des Superpositionsprinzips ist die allgemeine Lösung für die Auslenkung q_n die Summe aus allen Normalschwingungen mit geeigneten Amplituden. Welche Beziehung ergibt sich für diese Amplituden aus den ursprünglichen Bewegungsgleichungen? Für welche speziellen Anfangsbedingungen wird nur jeweils eine der Normalschwingungen angeregt? (1 P)

e) Führen Sie anstelle der Massenpunkte n und der dazugehörigen Auslenkung q_n die Ruhelage $x_n = na$ und die Auslenkung $q(x)$ ein und zeigen Sie, daß sich die Normalschwingungen in die Form

$$q_k(x) = Q(k)\exp(\mathrm{i}(kx - \omega(k)t))$$

bringen lassen, wobei k eine der N Normalschwingungen kennzeichnet! Welche physikalische Bedeutung kommt der Größe k zu? Was ergibt sich in dieser Darstellung für die Dispersionsrelation $\omega(k)$? Wie ändert sie sich beim Grenzübergang $N \to \infty$, wenn dabei die Länge $L = (N+1)a$ und der Quotient $c^2 = a^2 f/m$ konstant gehalten werden? (2 P)

f) Welche Form nehmen die Bewegungsgleichungen in dem in e) angesprochenen Grenzfall an? Zur Ausführung des Grenzübergangs ist es nützlich, wie in e) den Index n durch die Ruhelage $x_n = na$ zu ersetzen. (2 P)