**ÜBUNGEN zu PHYSIK IV (SS 2003)** **Blatt 8**

H. Kohl & S.J. Linz 18.06.03

---

Besprechung der Übungsaufgaben: 27.06.03/01.07.03

schriftlich: E26, E28, T17; Alle anderen Aufgaben/-teile mündlich

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Dienstagsübung am 24.06.03

**Aufgabe E25: Mögliche Drehsymmetrien in Punktgittern** (5 Punkte)

Zeigen Sie, daß ein Punktgitter keine 5- und keine 7- oder mehrzählige Drehsymmetrie aufweisen kann. Betrachten Sie dazu den kürzest möglichen Translationsvektor $\vec{a}_1$. Aus der $n$-zähligen Drehsymmetrie folgt die Existenz von $n-1$ weiteren (kürzesten) Translationsvektoren $\vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_n$. Durch geeignete Addition zweier solcher Vektoren läßt sich ein weiterer Vektor bilden, der wieder im Gitter liegen muß.

**Aufgabe E26: Reziprokes Gitter I** (3 Punkte)

Reziproke Gittervektoren: Die reziproken Gittervektoren $\vec{a}^*, \vec{b}^*$ und $\vec{c}^*$ sind definiert durch

$$\vec{a}^* = \frac{2\pi}{V}(\vec{b} \times \vec{c}),\ \vec{b}^* = \frac{2\pi}{V}(\vec{c} \times \vec{a}),\ \vec{c}^* = \frac{2\pi}{V}(\vec{a} \times \vec{b})$$

Durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ werde ein hexagonales Gitter aufgespannt, wobei $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq |\vec{c}|$ und $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$; $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ sei.

a) Bestimmen Sie das Volumen der Elementarzelle. (1 P)

b) Berechnen und zeichnen Sie die Vektoren $\vec{a}^*, \vec{b}^*$ und $\vec{c}^*$ und bestimmen Sie das Volumen der Einheitszelle des reziproken Gitters $V^*$. (1 P)

c) Wie groß ist der Winkel zwischen $\vec{a}^*$ und $\vec{b}^*$? (1 P)

**Aufgabe E27: Reziprokes Gitter II** (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß das reziproke Gitter zum orthorhombisch-flächenzentrierten Gitter ein orthorhombisch-raumzentriertes Gitter ist.

**Aufgabe E28: Reziprokes Gitter II** (3 Punkte)

Berechnen Sie für ein reziprokes Gitter $\vec{a}^*, \vec{b}^*$ und $\vec{c}^*$ den zu $\vec{a}^*$ reziproken Vektor

$$(\vec{a}^*)^* = \frac{2\pi(\vec{b}^* \times \vec{c}^*)}{\vec{a}^* \cdot (\vec{b}^* \times \vec{c}^*)}\ .$$

Wie hängt dieser von den Gittervektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ab?

**Aufgabe T16: Schrödinger-Gleichung im Impulsraum** (6 Punkte)

Ein Teilchen gehorche der Schrödinger-Gleichung im dreidimensionalen Ortsraum:

$$i\hbar\,\partial_t\psi(\vec{x},t) = H\psi(\vec{x},t)$$
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x})\ .$$

a) Welche Gestalt hat die Schrödinger-Gleichung im Impulsraum, falls das Potential $V(\vec{x})$ Fourier-transformierbar ist, d.h. wenn

$$\hat{V}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3x\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}V(\vec{x})$$

existiert? (4 P)

b) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung im Impulsraum für das deltaförmige Potential,

$$V(\vec{x}) = -V_0\,\delta(\vec{x})$$

wobei $\delta(\vec{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ die Dirac'sche Deltafunktion in dreidimensionalen kartesischen Koordinaten bezeichnet. (2 P)

**Aufgabe T17: Erwartungswerte, Wellenfunktion** (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß der Impulserwartungswert

$$\langle p\rangle = \int \mathrm{d}^3x\,\psi^*(\vec{x},t)(-i\hbar\nabla)\psi(\vec{x},t)$$

reell ist, wobei Quadratintegrabilität der Wellenfunktion $\psi(\vec{x},t)$ vorausgesetzt wird.

Tipp: Berechnen Sie $\langle p\rangle - \langle p\rangle^*$ und verwenden Sie den Gaußschen Satz. (3 P)

b) Zeigen Sie, daß der Impulserwartungswert immer gleich Null wäre, wenn die Wellenfunktion $\psi(\vec{x},t)$ eine *reelle* Funktion wäre.

Tipp: Zeigen Sie, daß $\langle p\rangle = \int \mathrm{d}^3p\,\hat{\psi}^*(\vec{p},t)\,\vec{p}\,\hat{\psi}(\vec{p},t) = -\langle p\rangle$ gilt, falls $\psi(\vec{x},t) = \psi^*(\vec{x},t)$. (3 P)

**Aufgabe T18: Eichinvarianz der Schrödinger-Gleichung** (5 Punkte)

Die Wellenfunktion $\psi(\vec{x},t)$ sei eine Lösung der Schrödinger-Gleichung $i\hbar\,\partial_t\psi = H\psi$ mit $H = \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 + q\phi + U$, wobei $\vec{A}(\vec{x},t)$ und $\phi(\vec{x},t)$ die elektromagnetischen Potentiale und $U$ ein *konstantes* skalares Potential bezeichnen. Zeigen Sie, daß dann $\psi'(\vec{x},t) = e^{iq\chi(\vec{x},t)/\hbar c}\,\psi(\vec{x},t)$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung für die umgeeichten Potentiale $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ und $\phi' = \phi - \frac{1}{c}\partial_t\chi$ ist.