ÜBUNGEN zu PHYSIK IV (SS 2003) **Blatt 9**

H. Kohl & S.J. Linz 25.06.03

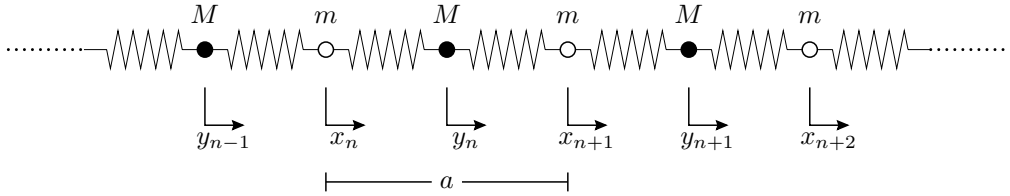
Besprechung der Übungsaufgaben: 04.07.03/08.07.03

schriftlich: E29, T21; Alle anderen Aufgaben/-teile mündlich

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Dienstagsübung am 01.07.03

Aufgabe E29: Zweiatomige lineare Kette (10 Punkte)

Berechnen Sie die Normalschwingungen einer zweiatomigen linearen Kette.



Zeigen Sie, daß die Bewegung durch die Gleichungen (Federkonstante f)

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_n &= f(y_{n-1} - 2x_n + y_n) \\ M\ddot{y}_n &= f(x_n - 2y_n + x_{n+1}) \end{aligned}$$

beschrieben wird. Dabei ist die Koordinate der i-ten Masse m mit x_i, die der i-ten Masse M mit y_i bezeichnet. Die Gleichungen lassen sich durch den Ansatz

$$x_n = x^{(0)} e^{i(qan-\omega t)} \quad \text{bzw.} \quad y_n = y^{(0)} e^{i(qan-\omega t)}$$

lösen. Wie hängen die Frequenzen ω_1 und ω_2 von der Wellenzahl q ab (Dispersionsrelation)?

Aufgabe T19: Kommutatoren (5 Punkte)

Der Kommutator zweier Operatoren A, B ist definiert als $[A, B] = AB - BA$ und wird zweckmäßigerweise ausgerechnet, indem man die Wirkung von $[A, B]$ auf eine beliebige Zustandsfunktion $\psi(\vec{x})$ oder $\psi(\vec{p})$ betrachtet. Weisen Sie die folgenden Relationen nach:

a) $[p, x^n] = -i\hbar\, n x^{n-1} \quad (n \geq 1)$

b) $[x^{-1}, p] = -i\hbar\, x^{-2}$

c) $[p^n, x] = -i\hbar\, n p^{n-1}$

d) $[p, F(x)] = -i\hbar\, \partial_x F(x)$

e) $[G(p), x] = -i\hbar\, \partial_p G(p)$

wobei $F(x)$ bzw. $G(p)$ Funktionen des Ortsoperators x bzw. des Impulsoperators p (in einer Dimension) sind.

Aufgabe T20: Potential aus gegebener Wellenfunktion (5 Punkte)

Die Zustandsfunktion eines Teilchens mit Masse m sei gegeben durch

$$\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{(\pi b^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2b^2} - i\frac{\hbar}{2mb^2}t\right)$$

wobei $b = \sqrt{\hbar/m\omega}$ eine Konstante, ω eine feste Frequenz und $r = |\vec{x}|$ ist.

Bestimmen Sie durch Einsetzen von $\psi(\vec{x},t)$ in die Schrödinger-Gleichung das Potential $V(\vec{x})$, in dem sich das Quantenteilchen bewegt.

Aufgabe T21: Geladenes Teilchen (6 Punkte)

Der Hamilton-Operator für ein Teilchen der Ladung q im elektromagnetischen Feld, das durch die Potentiale $\vec{A}$ und ϕ gegeben ist, lautet

$$H = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{x})\right)^2 + q\phi(\vec{x}) \ .$$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{j}$ des Teilchens, indem Sie die Schrödinger-Gleichung mit obigem Hamilton-Operator in eine Kontinuitätsgleichung umwandeln (analog zur Vorlesung) und darin ρ und $\vec{j}$ identifizieren. (3 P)

b) Zeigen Sie, daß ρ und $\vec{j}$ invariant sind gegenüber der Phasen-Eichtransformation

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} - \nabla u, \quad \phi \to \phi' = \phi + \frac{1}{c}\,\partial_t u, \quad \psi \to \psi' = \psi e^{-iqu/\hbar c},$$

wobei $u(\vec{x},t)$ ein beliebiges Skalarfeld ist. (3 P)