Übungsaufgaben zu Physik IV (SS 98)

Blatt 3

Aufgabe 3.1 (L:12;D:12): Massenspektrometer nach Bainbridge

Sie arbeiten mit einem Massenspektrografen, der nach dem von Bainbridge angegebenen Prinzip funktioniert (Abbildung 1): Die einfach geladenen Ionen durchlaufen einen Geschwindigkeitsfilter und werden dann in einem homogenen Magnetfeld abgelenkt. Im Geschwindigkeitsfilter und für die kreisförmige Ablenkung wird ein Magnetfeld der Flussdichte $B = 0,55\,\mathrm{T}$ benutzt. Die elektrische Feldstärke am Geschwindigkeitsfilter sei $80\,\mathrm{kV/m}$. Wie groß ist der Abstand, den die Ionen der Isotope $^{20}\mathrm{Ne}$ und $^{21}\mathrm{Ne}$ auf der als Nachweisgerät dienenden Fotoplatte voneinander haben?

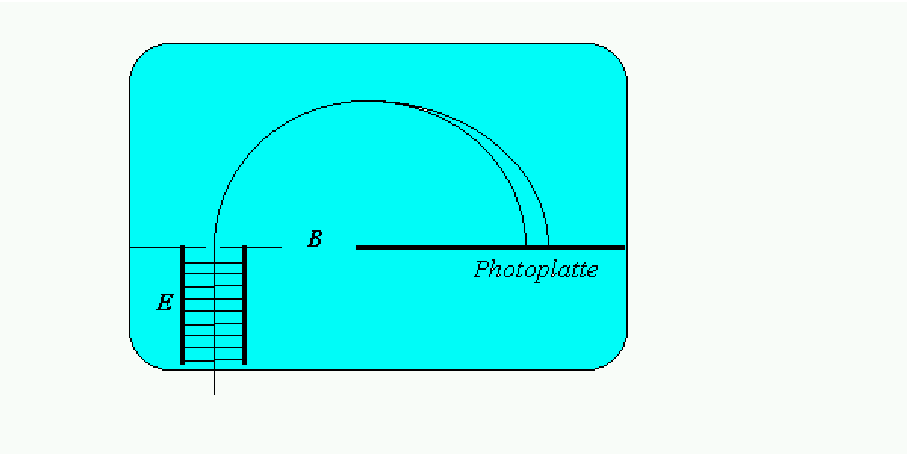

Abbildung 1: Massenspektrometer nach Bainbridge. Im Geschwindigkeitsfilter werden Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit gerade durch den Plattenkondensator geschossen, wobei über der ganzen Anordnung ein $\vec{B}$-Feld liegt, welches die Ionen nach Verlassen des Kondensators auf eine Kreisbahn zwingt.

Aufgabe 3.2 (L:0): Massenspektrometer

In einem Massenspektrografen mit hoher Auflösung wird ein Unterschied von $0,705\,\%$ in der spezifischen Ladung q/m zwischen $^{12}\mathrm{C}^{3+}$ und D_2^+ Ionen festgestellt ($^2\mathrm{H}$ Ionen, Ionen des schweren Wasserstoffs). Dabei haben die Deuterium-Ionen die geringere spezifische Ladung. Unter gleichen experimentellen Bedingungen wird ein Unterschied von $0,0775\%$ für H_2^+ und D^+ Ionen festgestellt, wobei das H_2^+ Molekül schwerer ist. Berechnen Sie die neutrale atomare Masse von D und H in u. Dabei hat ein Elektron die Masse $0,549 \cdot 10^{-3}$ u.

Aufgabe 3.3 (L:0;D:0): Bestimmung der Elementarladung nach Millikan

Beim Millikan-Versuch wird im ungeladenen Kondensator für ein Öltröpfchen eine Sinkgeschwindigkeit $v_1 = 0,052\,\mathrm{mm/s}$ festgestellt. Bei Anlegen einer Spannung $U = 430\,\mathrm{V}$ steigt das Tröpfchen mit einer Geschwindigkeit $v_2 = 0,18\,\mathrm{mm/s}$. Der Abstand d_K der Kondensatorplatten beträgt $5\,\mathrm{mm}$, die Dichte ρ des verwendeten Öls ist $890\,\mathrm{kg/m^3}$, die Viskosität

η der Luft ist $1,83 \cdot 10^{-5}$ Poise (1 Poise = 1 kg/ms).Wieviele Elementarladungen trägt das Öltröpfchen?

Aufgabe 3.4 (L:15): Bestimmung von e/m nach Busch

Auf der Abbildung (2) ist die Anordnung zur Bestimmung von e/m_{e_0} nach Busch dargestellt. Die aus einer Glühkathode austretenden Elektronen werden bis zur Blende A beschleunigt. Die im Kondensator K erzeugte transversale Geschwindigkeit v_y läßt die Elektronen etwas von dem magnetischen Fluss $\vec{B}$ spüren, der durch die äußere Spule S erzeugt wird.

a) Zeigen Sie, dass die Bahn der Elektronen, wenn man sie auf eine Ebene senkrecht zur Spulenachse projiziert, eine Kreisbahn ist, deren Umlaufzeit t_y unabhängig von der am Kondensator K anliegenden Spannung ist.

b) Bei welcher Beschleunigungsspannung U treffen alle Elektronen nach ihrem Flug durch die Braunsche Röhre genau im Mittelpunkt des Leuchtschirms LS auf, wenn durch die äußere Spule ein konstanter magnetischer Fluss B_0 vorgegeben ist? (Prinzip der magnetischen Linse.)

c) Geben Sie an, wie mit Hilfe dieser Anordnung das Verhältnis e/m bestimmt werden kann.

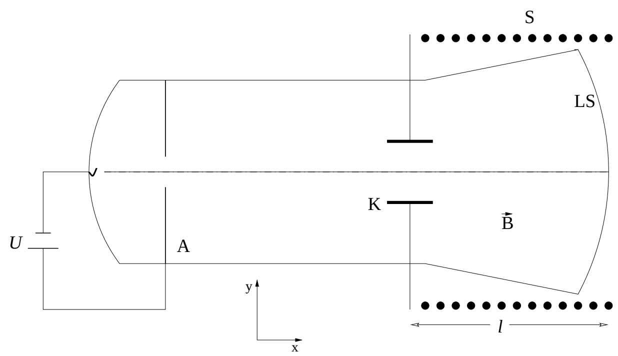

Abbildung 2: Aufbau zur Bestimmung von e/m nach Busch

Aufgabe 3.5 (D:0): Aufenthalts-Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Aufenthalts-Wahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens der Masse m sei gegeben durch:

$$P(\vec{x},t) = [\sqrt{\pi}\, a(t)]^{-3} \exp\left\{-\left[\frac{\vec{x}-\vec{v}_0 t}{a(t)}\right]^2\right\}$$

$$a(t) = a_0\sqrt{1+\left(\frac{\hbar}{m\, a_0^2}\right)^2 t^2},$$

a) Überprüfen Sie, ob dies eine zulässige, das heißt überall positive und normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. *Hinweis:*

$$\int d^3x\, \exp(-A\,\vec{x}^2) = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \forall\; A \in \mathbb{R}^+.$$

b) Welches ist der wahrscheinlichste Aufenthaltsort $\vec{x}_W$ des durch diese Verteilung beschriebenen Teilchens?

c) Berechnen Sie den dieser Verteilung entsprechenden „statistischen Mittelwert des Ortes“, das heißt die Summe bzw. das Integral über alle möglichen Orte $\vec{x}$ mit der Verteilung P als Gewichtsfunktion:

$$\langle \vec{x} \rangle_t = \int d^3x \, \vec{x} \, P(\vec{x}, t).$$

Hinweis: Das auftretende Integral ist durch eine geeignete Substitution fast ohne Rechnung auf das von Teil a) zurückführbar.

Aufgabe 3.6 (D:16): Wellenpakete und Unschärferelation

a) Berechnen Sie das Wellenpaket

$$\psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \, \varphi(k) \, e^{\hat{\imath}\, k \cdot x - \hat{\imath} \omega t}$$

in einer Dimension mit

$$\varphi(k) = \begin{cases} 1 & k_0 - \alpha \leq k \leq k_0 + \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Entwickeln Sie dazu die Dispersionsrelation in eine Taylorreihe um k_0 bis zum linearen Glied:

$$\omega(k) = \omega_0 + v_0(k - k_0)$$

b) Berechnen Sie das eindimensionale Wellenpaket

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \, \varphi(k) \, e^{\hat{\imath}\, k \cdot x}$$

mit

$$\varphi(k) = \frac{1}{k^2 + \alpha^2}$$

c) Berechnen Sie in drei Dimensionen dasjenige Wellenpaket, welches die Impulsraum-Wellenfunktion

$$\varphi(\vec{k}) = \frac{1}{(|\vec{k}|^2 + \alpha^2)^2}$$

besitzt. *Hinweis:* Benutzen Sie Polarkoordinaten und führen Sie das Radialintegral durch partielle Integration auf das in b) aufgetretene Integral zurück.

d) Definieren Sie in allen drei Fällen geeignete Maße Δk und Δx für die Breite im k- und x-Raum (zum Beispiel die Halbwertsbreite, die Breite bei $1/e$-tel des Maximalwertes, …) und berechnen Sie jeweils $\Delta x \cdot \Delta k$.