

Übungen zur Quantentheorie I (WS 2002/2003)

Blatt 10

Aufgabe 35: Variationsrechnung für den HO (3 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Ritzschen Variationsverfahren eine obere Schranke für die Grundzustandsenergie des eindimensionalen harmonischen Oszillators. Berechnen Sie hierzu

$$E_0 = \inf_{\psi} \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

mit dem Hamilton-Operator $H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2$ und der Testfunktion $\psi(x, \lambda) = N e^{-\frac{\alpha^2}{2}x^2}$ für $\lambda > 0$. Optimieren Sie den Variationsparameter λ .

Aufgabe 36: Freie Fermionen in einem Volumen (5 Punkte)

Betrachten Sie N freie nicht wechselwirkende Fermionen, die in einem Kasten mit dem Volumen $V = L^3$ eingeschlossen sind.

- Bestimmen Sie im Fall periodischer Randbedingungen die möglichen Impuls- und Energiewerte der Fermionen.
- Zeigen Sie für große N , dass im Grundzustand die besetzten Zustände das Innere einer Kugel im Impulsraum ausfüllen, der sogenannten Fermi-Kugel.
- Wie hängt der Radius der Fermi-Kugel mit der Teilchenzahl N zusammen? Was folgt für die Teilchendichte? Wie groß ist das Produkt aus dem Volumen V im Ortsraum und dem Volumen der Fermi-Kugel im Impulsraum?
- Drücken Sie die Gesamtenergie des Systems im Grundzustand durch den Radius der Fermi-Kugel und die Teilchenzahl aus.

Aufgabe 37: Energiekorrekturen in angeregtem Helium (3 Punkte)

In der Vorlesung ist die Elektron-Elektron-Wechselwirkung in angeregtem Helium störungstheoretisch erfasst worden. Für Singulett- und Triplett-Zustände ergaben sich die Energiekorrekturen zu

$$\Delta E_{1n} = K_{nl} \pm A_{nl}.$$

Dabei resultiert K_{nl} aus der elektrostatischen Wechselwirkung der Elektronen und die Austauschenergie A_{nl} ist eine Konsequenz der Antisymmetrisierung der Wellenfunktion. Überlegen Sie, dass sich die Korrektur auch in der Form

$$\Delta E_{1n} = K_{nl} - \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)A_{nl}$$

schreiben lässt. $\vec{\sigma}_1$ und $\vec{\sigma}_2$ sind die Pauli-Operatoren der ungekoppelten Elektronenspins.