

Übungen zur Quantentheorie I (WS 2002/2003)

Blatt 12

Aufgabe 41: Zeitabhängige Störungstheorie für ein 2-Niveau-System (5 Punkte)

Gegeben sei ein quantenmechanisches System mit zwei stationären Energieeigenzuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$. Die Differenz der zugehörigen Energieeigenwerte betrage $E_2 - E_1 = \hbar\omega_{21}$. Zur Zeit $t = 0$, wo sich das System im Zustand $|1\rangle$ befinde, werde die zeitunabhängige kleine Störung H' mit den Matrixelementen

$$\langle 1|H'|1\rangle = 0, \quad \langle 2|H'|1\rangle = \hbar\omega_0 \quad \text{und} \quad \langle 2|H'|2\rangle = -\hbar\omega_{21}$$

hinzugeschaltet.

- Berechnen Sie mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie erster Ordnung die Wahrscheinlichkeit das System nach der Zeit t im Zustand $|1\rangle$ bzw. im Zustand $|2\rangle$ vorzufinden. Dabei soll $\omega_{21}t \ll 1$ und $\omega_0 t \ll 1$ gelten.
- Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung exakt, indem Sie den Hamilton-Operator des obigen Problems diagonalisieren. Finden Sie $|\psi(t)\rangle$.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das System zu einer beliebigen Zeit t im Zustand $|2\rangle$ anzutreffen? Unter welcher Bedingung löst die in a) verwendete erste Ordnung der Störungsrechnung das Problem hinreichend gut? Zu welcher Zeit befindet sich das System mit Wahrscheinlichkeit 1 im Zustand $|2\rangle$?

Aufgabe 42: Thomas-Reiche-Kuhn-Summenregel (2 Punkte)

Berechnen Sie $[[x, H], x]$ für ein Teilchen in einem äußeren Potenzial. Zeigen Sie mit Hilfe dieses Doppelkommutators die Thomas-Reiche-Kuhn-Summenregel

$$\sum_f (E_f - E_i) |\langle f|x|i\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m}.$$

Aufgabe 43: Stoßexperiment in zeitabhängiger Störungstheorie (7 Punkte)

- Ein Teilchen mit der Ladung Ze bewege sich auf der Bahn $\vec{R}(t) = (b, vt, 0)$ an einem Atom vorbei, das sich bei $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ befindet. b ist der Stoßparameter. Betrachten Sie das Atom zusammengesetzt aus einem Rumpf mit Ladung $+e$ und einem Hüllenelektron. Zeigen Sie, dass die Coulomb-Energie des Teilchens im Feld des Rumpfes und des Hüllenelektrons bei \vec{r} näherungsweise durch

$$V \approx -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} \cdot \vec{R} \quad \text{für} \quad |\vec{r}| \ll b$$

gegeben ist.

- Das Hüllenelektron befinde sich anfangs im Zustand $|i\rangle$ mit der Energie E_i . Durch die Wechselwirkung mit dem vorbeifliegenden geladenen Teilchen ändert sich der Zustand. Die Amplitude für den Übergang in den Zustand $|f\rangle$ mit der Energie $E_f \neq E_i$ sei c_f . Der Vorbeiflug geschehe so rasch, dass

$$\omega = \frac{1}{\hbar}(E_f - E_i) \ll \frac{v}{b}$$

erfüllt ist.

Zeigen Sie, dass in diesem Falle approximativ

$$c_f \approx \frac{i}{\hbar} \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 vb} \langle f|x|i \rangle$$

in erster Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie gilt. *Hinweis:* Benutzen Sie für kleine γ

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha) d\alpha}{(\gamma^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{1}{\gamma^2} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\alpha \sin(\alpha) d\alpha}{(\gamma^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \approx -\ln \gamma.$$

c) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Energieänderung

$$\delta E = \sum_f (E_f - E_i) |c_f|^2 \quad \text{den Wert} \quad \delta E = \frac{2Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 m b^2 v^2}$$

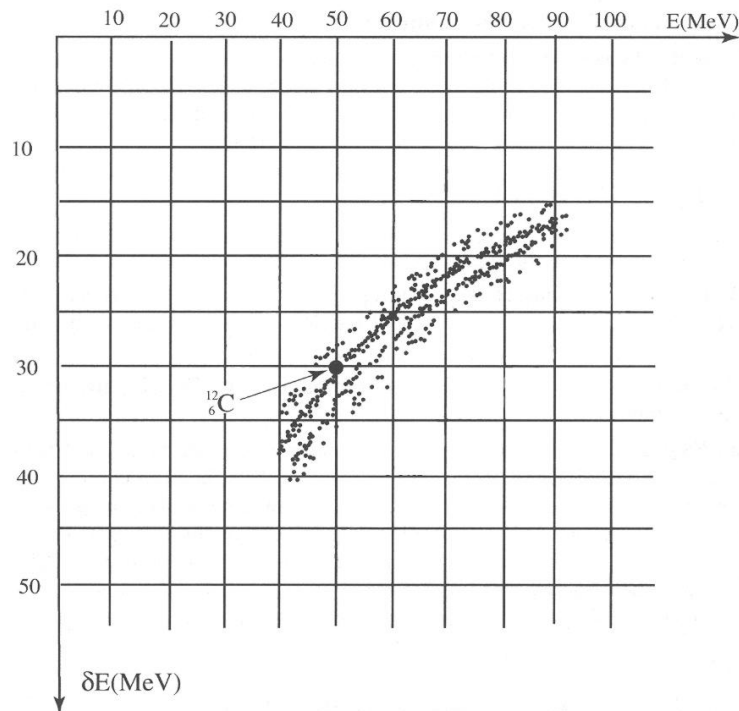
besitzt, wobei m die Elektronenmasse ist. Benutzen Sie die Thomas-Reiche-Kuhn-Summenregel aus Aufgabe 42.

d) Ein Atomkern mit Massenzahl A und Ladungszahl Z durchquert einen Festkörper. Durch die Wechselwirkung mit den Atomen verringert sich seine Energie E um den Betrag δE . Begründen Sie, dass

$$E \cdot \delta E \approx k Z^2 A$$

gilt. k ist eine vom Festkörper abhängige Materialkonstante.

e) In dem Diagramm unten sind die anfängliche Energie E und Energieverlust δE von Kohlenstoffkernen dargestellt, die einen Silizium-Detektor durchquert haben. Der Referenzpunkt bei $E = 50\text{MeV}$, $\delta E = 30\text{MeV}$ gehört zum Isotop $A = 12$. Bestimmen Sie die Materialkonstante k . Berechnen Sie δE für $E = 60\text{MeV}$ und 70MeV . Welche Kohlenstoff-Isotope kommen im Experiment noch vor?



Zur Erinnerung:

Die Klausur findet am Donnerstag, den 06. Februar 2003, 14.00 bis 17.00 Uhr im Hörsaal AP statt. Als Hilfsmittel sind 1 Blatt DINA4 (Notizen) und ein Taschenrechner (ohne Textspeicher) erlaubt.