Übungen zur Quantentheorie I (WS 2002/2003)

Blatt 3

Aufgabe 9: Paulische Spin-Matrizen (7 Punkte)

Die durch

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

definierten Matrizen werden als Paulische Spin-Matrizen bezeichnet. Der durch $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ definierte Vektor ist der sogenannte Pauli-Operator.

a) Überprüfen Sie, dass $Sp\,\vec{\sigma} = \vec{0}$ und $\sigma_k = \sigma_k^\dagger = \sigma_k^{-1}$ für $k = 1, 2, 3$ gilt. Bestimmen Sie damit die Eigenwerte der Pauli-Matrizen.

b) Berechnen Sie die Produkte $\sigma_k \sigma_l$ und stellen Sie das Ergebnis als Linearkombination der Basismatrizen $\{\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ dar.
Hinweis: Es genügt einen Fall mit $k = l$ und einen mit $k \neq l$ zu berechnen. Die allgemeine Formel ergibt sich dann durch zyklisches Permutieren.

c) Verifizieren Sie anhand der Formel aus Aufgabenteil b), dass die Matrizen $\frac{\hbar}{2}\sigma_i$ die Drehimpuls-Vertauschungsrelationen erfüllen.

d) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind Vektoren, die mit $\vec{\sigma}$ vertauschen. Wie lässt sich $(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma})$ als Linearkombination von $\mathbb{1}$ und $\vec{\sigma}$ schreiben? Was folgt daraus für $(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})^2$ und $[\vec{a} \cdot \vec{\sigma}, \vec{b} \cdot \vec{\sigma}]_+$? $[a, b]_+$ ist ein sogenannter Antikommutator und definiert als $[a, b]_+ = ab + ba$.

e) Beweisen Sie mit Resultaten aus b) und d) die Beziehung

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\alpha}\,\vec{\sigma}\right) = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)\mathbb{1} - i\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\alpha} \cdot \vec{\sigma} \quad \text{mit} \quad \hat{\alpha} = \frac{\vec{\alpha}}{\alpha}.$$

f) Benutzen Sie b) und e), um die Formel

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\alpha\,\sigma_3\right)\sigma_1 \exp\left(\frac{i}{2}\alpha\,\sigma_3\right) = (\cos\alpha)\sigma_1 + (\sin\alpha)\sigma_2$$

zu zeigen.

Aufgabe 10: Lenz-Vektor (6 Punkte)

a) Der Lenzsche Vektor ist definiert durch

$$\vec{A} := \frac{1}{2m}\left(\vec{P} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{P}\right) - \gamma\frac{1}{R}\vec{Q}.$$

Rechnen Sie die Kommutatorrelation $[L_j, A_k] = i\hbar\,\varepsilon_{jkl}\,A_l$ nach.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Form

$$\vec{A} = \frac{1}{m}\left(\vec{P}^{\,2}\vec{Q} - (\vec{P} \cdot \vec{Q})\vec{P}\right) - \gamma\frac{1}{R}\vec{Q}$$

des Lenz-Vektors, dass $[A_j, A_k] = -\frac{2i\hbar}{m}\,H\,\varepsilon_{jkl}\,L_l$ mit $H = \frac{1}{2m}\vec{P}^{\,2} - \gamma\frac{1}{R}$ gilt.

Aufgabe 11: Wasserstoff im Magnetfeld (2 Punkte)

Der Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms im Magnetfeld ist in Coulomb-Eichung und unter Vernachlässigung des diamagnetischen Terms durch

$$H = \frac{1}{2m}\vec{P}^{\,2} + \frac{e_0}{2m}\vec{L}\cdot\vec{B}$$

gegeben. Zeigen Sie für ein konstantes homogenes Magnetfeld $\vec{B} = (0,0,B)$, dass die Beziehungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L_x &= -\omega_L L_y\\ \frac{d}{dt}L_y &= \omega_L L_x\\ \frac{d}{dt}L_z &= 0\end{aligned}$$

mit $\omega_L = \frac{e_0 B}{2m}$ erfüllt sind. Rechnen Sie im Heisenberg-Bild. Was besagen diese Gleichungen?