Übungen zur Quantentheorie I (WS 2002/2003)

Blatt 4

Aufgabe 12: Pauli-Gleichung und Kontinuitätsgleichung (3 Punkte)

Bestimmen Sie für die Pauli-Gleichung den erhaltenen Wahrscheinlichkeitsstrom. Zeigen Sie die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung.

Aufgabe 13: Pauligleichung (homogenes Magnetfeld) (4 Punkte)

Betrachten Sie die Pauli-Gleichung für den Fall eines räumlich homogenen Magnetfeldes in z-Richtung. Das Magnetfeld sei zeitlich veränderlich. Zeigen Sie, dass sich die Wellenfunktion als Produkt einer Ortsraum- und einer Spinwellenfunktion schreiben lässt. Welcher Gleichung genügt die Spinwellenfunktion?

Aufgabe 14: Spin-Resonanz (5 Punkte)

Der Spin eines Elektrons präzediert in einem homogenen statischen Magnetfeld $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$ mit der Zyklotron-Frequenz $\omega_0 = eB_0/m$ um die Richtung des $\vec{B}_0$-Felds. Zeigen Sie, dass die z-Komponente des Elektronspins unter dem Einfluss eines zweiten veränderlichen Magnetfeldes $\vec{B}_1 = B_1(\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$ im Resonanzfall, d.h. $\omega \approx \omega_0$, oszilliert.
Hinweis: Stellen Sie die Pauli-Gleichung für die Spinwellenfunktion $|\chi(t)\rangle = a(t)\,|\uparrow\rangle + b(t)\,|\downarrow\rangle$ auf und verwenden Sie die Abkürzungen $\omega_0 = eB_0/m$ und $\omega_1 = eB_1/m$. Transformieren Sie die Pauli-Gleichung in ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotierendes Koordinatensystem mit dem Ansatz $|\chi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\omega t S_z}|\tilde{\chi}(t)\rangle$. Lösen Sie die resultierende Gleichung unter Verwendung geeigneter Randbedingungen. Untersuchen Sie den Resonanzfall.

Aufgabe 15: Eichtransformationen (3 Punkte)

Die Eichtransformationen des Vektorpotenzials und des skalaren Potenzials sind durch

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r},t) \quad \text{und} \quad \Phi'(\vec{r},t) = \Phi(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\vec{r},t)$$

gegeben. Die Wellenfunktion transformiert sich gemäss

$$\psi'(\vec{r},t) = e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda(\vec{r},t)}\psi(\vec{r},t).$$

Dabei ist $\Lambda(\vec{r},t)$ die sogenannte Eichfunktion und genügend häufig differenzierbar.

a) Zeigen Sie, dass für $\psi'(\vec{r},t)$ die Schrödinger-Gleichung mit dem eichtransformierten Hamiltonoperator H' gilt.

b) Wie transformieren sich die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\vec{r},t)$ und der Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*(\vec{r},t)\vec{\nabla}\psi(\vec{r},t) - \left(\vec{\nabla}\psi^*(\vec{r},t)\right)\psi(\vec{r},t)\right) - \frac{e}{m}\vec{A}(\vec{r},t)\,\psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)?$$

Behält die Kontinuitätsgleichung im transformierten System ihre Gültigkeit?