Übungen zur Quantentheorie I (WS 2002/2003)

Blatt 9

Aufgabe 32: Variationsrechung I (4 Punkte)

Führen Sie das Variationsverfahren für ein Teilchen der Masse m im Potenzial

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad x \leq 0 \quad \text{und} \\ cx & \text{mit} \quad c > 0 \quad \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

durch. Verwenden Sie als Testfunktion

$$u_\alpha(x) = xe^{-\alpha x}$$

und variieren Sie $\alpha > 0$. Warum ist dieser Ansatz plausibel? Eine exakte Rechnung liefert für die Grundzustandsenergie den Wert $E_0 = 2,338 \cdot \left(\frac{c^2\hbar^2}{2m}\right)^{\frac{1}{3}}$. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit diesem Wert. Begründen Sie, warum Ihr Wert größer ist als der exakte.

Aufgabe 33: Messwahrscheinlichkeiten eines 2-Teilchen-Zustands (5 Punkte)

Betrachten Sie normierte 1-Teilchenzustände $\psi_a(x)$ und $\psi_b(x)$ in einer Dimension.

a) Bestimmen Sie die normierte 2-Teilchenwellenfunktion $\psi(x_1, x_2)$ mit einem Teilchen im Zustand a und einem Teilchen im Zustand b für

- **i)** unterscheidbare Teilchen, wobei das erste Teilchen im Zustand a sein soll,
- **ii)** Bosonen,
- **iii)** Fermionen.

b) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, mindestens ein Teilchen im Intervall $[r, s]$, $r, s \in \mathbb{R}$, zu finden?

c) Vergleichen Sie diese Wahrscheinlichkeiten für den Fall, dass ψ_a der Grundzustand eines harmonischen Oszillators mit dem Zentrum an der Stelle $x = 0$ und ψ_b der Grundzustand eines harmonischen Oszillators zentriert um $x = L$ ist. Dabei soll L groß sein und $r = -s$ klein gegenüber L. Es es nicht unbedingt erforderlich die Integrale geschlossen auszurechnen, sondern zum Vergleich der Wahrscheinlichkeiten genügt es, die Differenz nach oben abzuschätzen.

Aufgabe 34: Variationsrechung II (4 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Ritzschen Variationsverfahren eine obere Schranke für die Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms. Berechnen Sie dazu

$$E_0 = \inf_\psi \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle},$$

wobei H der Hamiltion-Operator des H-Atoms $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{\gamma}{r}$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie als Lösungsansatz die Gaußfunktion $\psi(\vec{r}, \lambda) = Ne^{-\lambda r^2}$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!