Übungen zur Quantentheorie (Diplomstudiengang)

WS 97/98 Blatt 1

Aufgabe 1.1 (20 Punkte): Radialfunktionen des Wasserstoffatoms

Die Eigenfunktionen negativer Energie (gebundene Zustände) des H-Atoms wurden in Physik IV konstruiert in der Form

$$\begin{aligned} \psi_{N,l,m}(r,\vartheta,\varphi) &= \frac{1}{r} f_{N,l}(r) Y_{l,m}(\vartheta,\varphi) \\ f_{N,l}(r) &= C_{N,l} e^{-\kappa_N r} (\kappa_N r)^{l+1} L_n^{2l+1}(2\kappa_N r) \end{aligned}$$

mit $Y_{l,m}$ = Kugelfunktionen, $C_{N,l}$ = Normierungsfaktoren, L_n^{2l+1} = zugeordnete Laguerresche Polynome, $\kappa_N = \frac{1}{Na}$ (a = Bohrscher Radius) und $n = N-l-1$.

a) Geben Sie die Energieeigenwerte zu diesen Eigenfunktionen an. Wiederholen Sie die Bedeutung der „Quantenzahlen“ N, l, m und deren Wertebereiche.

b) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$G^{(p)}(x,t) = (1-t)^{-(p+1)} e^{-\left(\frac{xt}{1-t}\right)}$$

Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\left[x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (p+1-x)\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} \right] G^{(p)}(x,t) = 0$$

ist und daß daher die Koeffizienten L_n^p ihrer Reihenentwicklung um $t=0$ in der Form

$$G^{(p)}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^p(x)}{(n+p)!} t^n \qquad (1)$$

die bei $x=0$ regulären Lösungen der Dgl.

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + (p+1-x)\frac{d}{dx} + n \right] L_n^p(x) = 0$$

sind. Prüfen Sie nach, daß dies genau die auf $x = 2\kappa_N r$ und $p = 2l+1$ umgeschriebene Dgl. der reduzierten Radialfunktion $L_n^{2l+1}(2\kappa_N r)$ des Wasserstoffproblems ist. Die Funktion $G^{(p)}(x,t)$ ist daher „erzeugende Funktion“ der zugeordneten Laguerre-Polynome $L_n^p(x)$ im Sinne von Gl. (1) (und definiert zugleich deren konventionelle Normierung).

c) Berechnen Sie mittels dieser erzeugenden Funktion die Normierungsfaktoren $|C_{N,l}|$, die benötigt werden, um

$$\int_0^\infty dr |f_{N,l}(r)|^2 = 1$$

sicherzustellen.
Hinweis: Werten Sie das Integral

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x^{2l+2} G^{(2l+1)}(x,s) G^{(2l+1)}(x,t)$$

einerseits mittels der Entwicklung (1) als Potenzreihe in s und t, andererseits direkt anhand der geschlossenen Form von $G^{(2l+1)}$ mit anschließender Reihenentwicklung nach s und t aus und vergleichen Sie die Koeffizienten der beiden Reihendarstellungen.