



Dynamische Simulation von Charmonium in einem Plasma

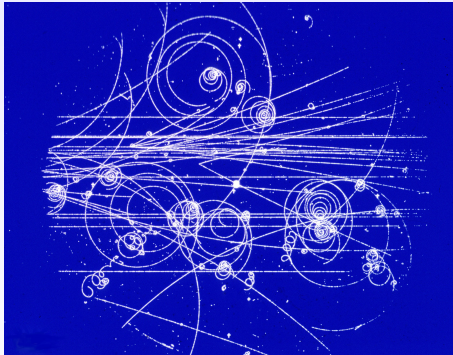
Marcus Tassler

Institut für Theoretische Physik,
WWU Münster

Forschungsseminar Teilchenphysik 26.06.2006



Einleitung



Einleitung



Übersicht

- 1 Charmonium
 - Eigenschaften
 - Bedeutung für die Untersuchung der starken Wechselwirkung



Übersicht

- 1 Charmonium
 - Eigenschaften
 - Bedeutung für die Untersuchung der starken Wechselwirkung

- 2 Dynamische Simulation des Charmoniums
 - Beschreibung des Ansatzes
 - Observablen



Charmonium

Charmonium

- Gebundenes System aus c und \bar{c} -Quark
- Zur Erzeugung werden üblicherweise e^+ , e^- Kollisionen bei Schwerpunktsenergien von 3-4.5 GeV verwendet:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow c\bar{c}$$

(es können hierbei nur Zustände mit den Quantenzahlen des virtuellen Photons $J^P = 1^-$ entstehen)

- Der niedrigste durch obige Reaktion erzeugbare Zustand ist das J/ψ (Quantenzahlen 1^3S_1) mit einer Masse von $3.097 \text{ GeV}/c^2$. Nächste Anregung: ψ (Quantenzahlen 2^3S_1)
- Es treten Resonanzen bis $4.4 \text{ GeV}/c^2$ auf.

Charmonium

Bedeutung für die Untersuchung der starken Wechselwirkung

- Analogie zum Wasserstoffatom bzw. Positronium als einfachste gebundene Systeme der elektromagnetischen Wechselwirkung.
- Eine Vermessung der Anregungsenergien erlaubt Rückschlüsse auf das effektive Potential der starken Wechselwirkung. Die experimentellen Ergebnisse rechtfertigen die Annahme eines Potentials der Form:

$$V = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(r) \hbar c}{r} + kr$$

- Aufgrund der großen Masse der Konstituentenquarks eignet sich das Charmonium als einfaches Modellsystem für nichtrelativistische Näherungen der QCD

Beschreibung des Ansatzes

Klassische Approximation der thermischen QCD im Infraroten

Typischer Expansionsparameter: $\frac{g^2 T}{|\omega|}, \frac{g^2 T}{|p|}$
(nichtverschwindend, groß für $\hbar \rightarrow 0$)

⇒ **Vermutung:** Die schwach koppelnden Theorie wird im Infraroten von klassischer Dynamik ($\hbar \rightarrow 0$) dominiert.

Unterschied zur QCD bei Temperatur 0

Expansionsparameter $g^2 \hbar \Rightarrow$ Klassisches Limit entspricht $g \rightarrow 0$



Beschreibung des Ansatzes

Skalen der thermischen QCD

- $|\mathbf{k}| \sim T$
Der Beitrag thermischer Loops niedriger Ordnung dominiert.
- $|\mathbf{k}| \sim gT$
Zunehmender Beitrag von Termen höherer Ordnung.
Gute Approximation durch die nichtperturbative Dynamik im klassischen Limit $\hbar \rightarrow 0$.
- $|\mathbf{k}| \sim g^2 T$
Beiträge thermischer Loops höherer Ordnung beginnen zu überwiegen. Zusammenbruch der Störungstheorie.



Beschreibung des Ansatzes

Hard-Thermal-Loop Effective Action

- Für $gT \ll \mu \ll T$ gilt für die Besetzungszahl $\frac{T}{\mu}$ der Moden der Eichfelder $1 \ll \frac{T}{\mu} \ll \frac{1}{g}$. Die typische Kopplungsstärke der Selbstwechselwirkung ist von der Größenordnung $\frac{gT}{\mu} \ll 1$.
- Störungstheoretisch sind auf dieser Impulsskala nur Diagramme mit 1-Loop Subgraphen bei hohen internen Impulsen relevant (Hard-Thermal-Loops).
- Durch Ausintegrieren der Hard Thermal Loops für $|k| \gg gT$ kann im Rahmen der Renormierungsgruppe eine effektive Wirkung gewonnen werden, welche sich im Bereich $|k| \sim gT$ in guter Approximation klassisch entwickeln läßt.

Beschreibung des Ansatzes

Dynamische Simulation von Charmonium in einem Plasma

- Für Charmonium liegt die Temperatur T bei der sich das System näherungsweise klassisch behandeln lässt bei $T \approx 2T_c$ (T_c : Deconfinementtemperatur). Dies erlaubt die Untersuchung des Verhaltens von Charmonium in einem Quark-Gluon-Plasma mit klassischen Methoden.
- Zur Lösung des Problems wird die Kontinuumswirkung auf einem nichteuklidischen Gitter diskretisiert und im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ betrachtet. Dies erlaubt die Anwendung des Lagrangeformalismus zur analytischen Ermittlung der Bewegungsgleichungen des räumlich diskretierten Systems. Die Simulation des Systems erfolgt durch iterative Anwendung der Bewegungsgleichungen.



Observablen: Dilepton-Rate

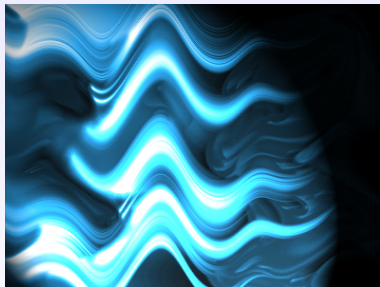
Der Beitrag des Charmoniums zur Dilepton-Rate

Zur Überprüfung der Ergebnisse der Simulation soll insbesondere die errechnete Dilepton-Rate aus dem Zerfall des Charmoniums dienen.

Anmerkung

Ein ursprünglich diskutiertes Signal für die Formierung eines Quark-Gluon-Plasmas ist das starke Abfallen der Dilepton-Rate aus J/ψ -Zerfällen, da durch Aufbrechen der Flux-Tubes zwischen den Quarks die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten gebundener Zustände aus c und \bar{c} -Quarks deutlich reduziert wird.

Die klassische Yang-Mills Theorie



Die klassische Yang-Mills Theorie



Übersicht

- 3 Die Bewegungsgleichungen im Kontinuum
 - Lagrangedichte und Ansatz
 - Bestimmung der Bewegungsgleichungen



Übersicht

- 3 Die Bewegungsgleichungen im Kontinuum
 - Lagrangedichte und Ansatz
 - Bestimmung der Bewegungsgleichungen

- 4 Die klassische Yang-Mills Theorie auf dem Gitter
 - Wilson-Wirkung und Bewegungsgleichungen
 - Simulation und Ergebnisse



Lagrangedichte und Ansatz

Die Lagrangedichte der klassischen Yang-Mills Theorie: SU(N)

$$\mathcal{L}_{YM}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i(x)F^{i\mu\nu}(x)$$

Definitionen

$F_{\mu\nu}^i(x) = \partial_\mu A_\nu^i(x) - \partial_\nu A_\mu^i(x) + gf^{ijk}A_\mu^j(x)A_\nu^k(x)$ (Feld- Tensor)

$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$ (Vertauschungsrelationen der Generatoren)



Lagrangedichte und Ansatz

Die Lagrangedichte der klassischen Yang-Mills Theorie: SU(N)

$$\mathcal{L}_{YM}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i(x)F^{i\mu\nu}(x)$$

Definitionen

$$F_{\mu\nu}^i(x) = \partial_\mu A_\nu^i(x) - \partial_\nu A_\mu^i(x) + gf^{ijk}A_\mu^j(x)A_\nu^k(x) \text{ (Feld- Tensor)}$$

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \text{ (Vertauschungsrelationen der Generatoren)}$$

Die Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}(x)}{\partial (\partial_\mu A^{i\nu}(x))} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} = 0$$



Berechnung des ersten Terms

Ausgangspunkt

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}(x)}{\partial(\partial_\mu A^{i\nu}(x))} = -\frac{1}{4} \partial_\mu \left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}^j(x)}{\partial(\partial_\mu A^{i\nu}(x))} F^{j\alpha\beta}(x) + F_{\alpha\beta}^j(x) \frac{\partial F^{j\alpha\beta}(x)}{\partial(\partial_\mu A^{i\nu}(x))} \right)$$

Feld-Tensor

$$F_{\mu\nu}^i(x) = \partial_\mu A_\nu^i(x) - \partial_\nu A_\mu^i(x) + g f^{ijk} A_\mu^j(x) A_\nu^k(x)$$



Berechnung des ersten Terms

Ausgangspunkt

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}(x)}{\partial(\partial_\mu A^{i\nu}(x))} = -\frac{1}{4} \partial_\mu \left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}^j(x)}{\partial(\partial_\mu A^{i\nu}(x))} F^{j\alpha\beta}(x) + F_{\alpha\beta}^j(x) \frac{\partial F^{j\alpha\beta}(x)}{\partial(\partial_\mu A^{i\nu}(x))} \right)$$

Feld-Tensor

$$F_{\mu\nu}^i(x) = \partial_\mu A_\nu^i(x) - \partial_\nu A_\mu^i(x) + g f^{ijk} A_\mu^j(x) A_\nu^k(x)$$

Ableitungen

$$\frac{\partial(\partial^\sigma A^{j\nu}(x))}{\partial(\partial_\kappa A^{i\mu}(x))} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\kappa A^{i\mu}(x))} g^{\sigma\gamma} \partial_\gamma A^{j\nu}(x) = g^{\sigma\kappa} \delta_{\mu\nu} \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial(\partial_\sigma A_\nu^j(x))}{\partial(\partial_\kappa A^{i\mu}(x))} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\kappa A^{i\mu}(x))} \partial_\sigma g_{\nu\gamma} A^{j\gamma}(x) = g_{\nu\mu} \delta_{\kappa\sigma} \delta_{ij}$$

Berechnung des ersten Terms

Rechnung

Durch Einsetzen folgt:

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}(x)}{\partial (\partial_\mu A^{i\nu}(x))} &= -\frac{1}{4} \partial_\mu (g_{\nu\beta} \delta_{\alpha\mu} \delta_{ij} - g_{\nu\alpha} \delta_{\beta\mu} \delta_{ij}(x)) F^{j\alpha\beta}(x) \\
 &\quad -\frac{1}{4} \partial_\mu (g^{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} \delta_{ij} - g^{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha} \delta_{ij}) F_{\alpha\beta}^j(x) \\
 &= -\frac{1}{2} \partial_\mu (F_{\nu}^{i\mu}(x) - F_{\nu}^i{}^\mu(x)) \\
 &= -\frac{1}{2} \partial_\mu g^{\mu\gamma} (F_{\gamma\nu}^i(x) - F_{\nu\gamma}^i(x)) = \partial^\gamma F_{\nu\gamma}^i(x)
 \end{aligned}$$

(Unter Verwendung von $F_{\nu\gamma}^i(x) = -F_{\gamma\nu}^i(x)$ im letzten Schritt)



Berechnung des zweiten Terms

Ausgangspunkt

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}^j(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} F^{j\alpha\beta}(x) + F_{\alpha\beta}^j(x) \frac{\partial F^{j\alpha\beta}(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} \right)$$

Feld-Tensor

$$F_{\mu\nu}^i(x) = \partial_\mu A_\nu^i(x) - \partial_\nu A_\mu^i(x) + g f^{ijk} A_\mu^j(x) A_\nu^k(x)$$



Berechnung des zweiten Terms

Ausgangspunkt

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}^j(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} F^{j\alpha\beta}(x) + F_{\alpha\beta}^j(x) \frac{\partial F^{j\alpha\beta}(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} \right)$$

Feld-Tensor

$$F_{\mu\nu}^i(x) = \partial_\mu A_\nu^i(x) - \partial_\nu A_\mu^i(x) + g f^{ijk} A_\mu^j(x) A_\nu^k(x)$$

Ableitungen

$$\frac{\partial A^{j\nu}(x)}{\partial A^{i\mu}(x)} = \delta_{\mu\nu} \delta_{ij}, \quad \frac{\partial A_\nu^j(x)}{\partial A^{i\mu}(x)} = g_{\nu\gamma} \frac{\partial A^{j\gamma}(y)}{\partial A^{i\mu}(x)} = g_{\nu\mu} \delta_{ij}$$



Berechnung des zweiten Terms

Rechnung (Teil 1)

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}^j(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} = g \left[f^{jkl} g_{\alpha\nu} \delta_{ik} A_{\beta}^l(x) + f^{jkl} A_{\alpha}^k(x) g_{\beta\nu} \delta_{il} \right]$$

⇒

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\alpha\beta}^j(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} F^{j\alpha\beta}(x) &= g \left[f^{jil} A_{\beta}^l(x) F_{\nu}^{j\beta}(x) + f^{jki} A_{\alpha}^k(x) F_{\nu}^{j\alpha}(x) \right] \\ &= g \left[f^{jli} A_{\alpha}^l(x) g^{\alpha\gamma} (-F_{\nu\gamma}^j(x) + F_{\gamma\nu}^j(x)) \right] \\ &= 2g g^{\alpha\gamma} \left[f^{jli} A_{\alpha}^l(x) F_{\gamma\nu}^j(x) \right] \\ &= 2g \left[f^{jli} A^{l\gamma}(x) F_{\gamma\nu}^j(x) \right] \end{aligned}$$

Berechnung des zweiten Terms

Rechnung (Teil 2)

$$\frac{\partial F^{j\alpha\beta}(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} = g \left[f^{jkl} \delta_{\alpha\nu} \delta_{ik} A^{l\beta}(x) + f^{jkl} A^{k\alpha}(x) \delta_{\beta\nu} \delta_{il} \right]$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}^j(x) \frac{\partial F^{j\alpha\beta}(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} &= g \left[f^{jil} A^{l\beta}(x) F_{\nu\beta}^j(x) + f^{jki} A^{k\alpha}(x) F_{\alpha\nu}^j(x) \right] \\ &= 2g \left[f^{jli} A^{l\beta}(x) F_{\beta\nu}^j(x) \right] \end{aligned}$$



Berechnung des zweiten Terms

Rechnung (Teil 2)

$$\frac{\partial F^{j\alpha\beta}(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} = g \left[f^{jkl} \delta_{\alpha\nu} \delta_{ik} A^{l\beta}(x) + f^{jkl} A^{k\alpha}(x) \delta_{\beta\nu} \delta_{il} \right]$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}^j(x) \frac{\partial F^{j\alpha\beta}(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} &= g \left[f^{jil} A^{l\beta}(x) F_{\nu\beta}^j(x) + f^{jki} A^{k\alpha}(x) F_{\alpha\nu}^j(x) \right] \\ &= 2g \left[f^{jli} A^{l\beta}(x) F_{\beta\nu}^j(x) \right] \end{aligned}$$

Der 2. Term der Euler-Lagrange Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} = -g \left[f^{jli} A^{l\beta}(x) F_{\beta\nu}^j(x) \right]$$



Die Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen

Bisherige Ergebnisse

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}(x)}{\partial (\partial_\mu A^{i\nu}(x))} = \partial^\gamma F_{\nu\gamma}^i(x) = \partial_\gamma F_\nu^i{}^\gamma(x)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} = -g \left[f^{jli} A^{l\beta}(x) F_{\beta\nu}^j(x) \right] = -g \left[f^{ilj} A_\beta^l(x) F_\nu^j{}^\beta(x) \right]$$



Die Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen

Bisherige Ergebnisse

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}(x)}{\partial (\partial_\mu A^{i\nu}(x))} = \partial^\gamma F_{\nu\gamma}^i(x) = \partial_\gamma F_\nu^i{}^\gamma(x)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}(x)}{\partial A^{i\nu}(x)} = -g \left[f^{jli} A^{l\beta}(x) F_{\beta\nu}^j(x) \right] = -g \left[f^{ilj} A_\beta^l(x) F_\nu^j{}^\beta(x) \right]$$

Die Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen

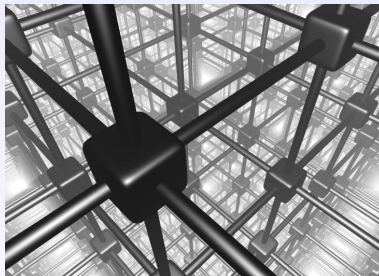
$$\partial_\mu F_\nu^i{}^\mu(x) + g f^{ilj} A_\beta^l(x) F_\nu^j{}^\beta(x) = 0$$

Durch Multiplikation mit $g^{\gamma\nu}$ und Summation über ν folgt:

$$(D_\mu F^{\gamma\mu}(x))^i \equiv \partial_\mu F^{i\gamma\mu}(x) + g f^{ilj} A_\beta^l(x) F^{j\gamma\beta}(x) = 0$$



Die klassische Yang-Mills Theorie auf dem Gitter



Die klassische Yang-Mills Theorie auf dem Gitter



Wilson-Wirkung

Die Wilson-Wirkung

$$S_{YM} = \beta \frac{a}{\Delta t} \sum_{\square_t} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr} U_{\square_t}\right) - \beta \frac{\Delta t}{a} \sum_{\square_r} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr} U_{\square_r}\right)$$

Definitionen

$\sum_{\square_t} = \sum_x \sum_i$ und $U_{\square_t} = U_{\square_{0i}}$
(Summe über Plaquetten mit zeitlichen Links)

$\sum_{\square_r} = \sum_x \sum_{1 \leq i < j \leq 3}$ und $U_{\square_r} = U_{\square_{ij}}$
(Summe über räumliche Plaquetten)

$U_{\square_{\mu\nu}}(x) = U_\nu(x) U_\mu(x + \Delta_\nu \hat{\nu}) U_\nu^+(x + \Delta_\mu \hat{\mu}) U_\mu^+(x)$ (Plaquette)

$U_\mu(x) = e^{igA_\mu^a(x)T^a \Delta_\mu}$ mit $\Delta_{1,2,3} = a$ und $\Delta_0 = \Delta t$ (Link)



Eichung und zeitlicher Kontinuumsübergang

Eichung

Temporale Eichung: $A_0^a(x) = 0 \Rightarrow U_0(x) = \underline{1}$

Es folgt: $U_{\square 0i}(x) = U_i(x)U_i^+(x + \hat{t}\Delta t)$



Eichung und zeitlicher Kontinuumsübergang

Eichung

Temporale Eichung: $A_0^a(x) = 0 \Rightarrow U_0(x) = \underline{1}$

Es folgt: $U_{\square 0i}(x) = U_i(x)U_i^+(x + \hat{t}\Delta t)$

Formulierung als dynamische Theorie

Die Theorie wird im zeitlichen Kontinuumsübergang $\Delta t \rightarrow 0$ betrachtet. Dies ermöglicht die Verwendung des klassischen Hamiltonschen bzw. Lagrange-Formalismus zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen.



Definition der E-Felder und Bewegungsgleichungen

Definition der E-Felder

$$E_i^a(x) = -i \frac{2}{ag} \text{Tr}(T^a \dot{U}_i(x) U_i^+(x))$$

Herleitung der Bewegungsgleichungen für die Linkvariablen

Mit $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta_{a,b}$ folgt zunächst allgemein:

$$\begin{aligned} \dot{U}_i(x) U_i^+(x) &= M(x) + iag E_i^a(x) T^a \\ \Rightarrow \dot{U}_i(x) &= (M(x) + iag E_i^a(x) T^a) U_i(x) \end{aligned}$$

Mit $\text{Tr}(T^a M(x)) = 0$ [$\forall a$]. Für $\Delta t \rightarrow 0$ muß $M(x)$ verschwinden.

\Rightarrow Bewegungsgleichungen der Linkvariablen

$$\dot{U}_i(x) = iag E_i^a(x) T^a U_i(x)$$

Eigenschaften der E-Felder

Die E-Felder im Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$

Aus der Definition $U_i(x) = e^{igaA_i^a(x)T^a}$ folgt im Kontinuumsübergang $a \rightarrow 0$:

$$U_i(x) = \underline{1} + igaA_i^a(x)T^a$$

Die zeitliche Ableitung ergibt: $\partial_0 U_i(x) = iga\partial_0 A_i^a(x)T^a$

Die Bewegungsgleichung $\dot{U}_i(x) = iagE_i^a(x)T^a U_i(x)$ lautet im Kontinuumsübergang wegen $U_i(x) \rightarrow \underline{1}$ hingegen :

$$\partial_0 U_i(x) = igaE_i^a(x)T^a$$

Die E-Felder $E_i^a(x)$ auf dem Gitter entsprechen also im Kontinuumslimites den physikalischen E-Feldern $\partial_0 A_i^a(x)$.

Der kinetische Anteil der Wilson-Wirkung

Der kinetische Anteil der Wilson-Wirkung

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\dot{U}_i^+(x)\dot{U}_i(x)) &= \text{Tr} \left[\frac{U_i^+(x + \hat{t}\Delta t) - U_i^+(x)}{\Delta t} \frac{U_i(x + \hat{t}\Delta t) - U_i(x)}{\Delta t} \right] \\ &= \frac{2}{(\Delta t)^2} [N - \text{ReTr}(U_i^+(x + \hat{t}\Delta t)U_i(x))] = \frac{2}{(\Delta t)^2} [N - \text{ReTr}U_{\square_{0i}}(x)] \end{aligned}$$

⇒ Die Wilson-Wirkung für $\Delta t \rightarrow 0$

$$S_{YM} = \frac{\beta a}{2N} \int dt \sum_{x^0=t,i} \text{Tr}(\dot{U}_i^+(x)\dot{U}_i(x)) - \frac{\beta}{a} \int dt \sum_{\square_r(t)} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr}U_{\square_r} \right)$$



Der kinetische Anteil der Wilson-Wirkung

Der kinetische Anteil der Wilson-Wirkung

Mit $\dot{U}_i(x) = iagE_i^a(x)T^aU_i(x)$ folgt:

$$\text{Tr}(\dot{U}_i^+(x)\dot{U}_i(x)) = \frac{a^2g^2}{2}E_i^a(x)E_i^a(x)$$

⇒ Wilson-Wirkung

Mit $\beta = \frac{2N}{g^2}$ ergibt sich die Wilson-Wirkung:

$$S_{YM} = \int dt \sum_{x^0=t,i} a^3 \frac{E_i^a(x)E_i^a(x)}{2} - \frac{2N}{g^2a} \int dt \sum_{\square_r(t)} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr}U_{\square_r} \right)$$



Die Bewegungsgleichungen der E-Felder

Ausgangspunkt

$$S_{YM} = \frac{a}{g^2} \int dt \sum_{x,i} \text{Tr}(\dot{U}_i^+(x,t)\dot{U}_i(x,t)) - \frac{2N}{g^2 a} \int dt \sum_{\square_r(t)} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr}U_{\square_r}\right)$$

Erinnerung

Die Parameter $U_{i(ab)}(x,t)$, $U_{i(ab)}^*(x,t)$ sind aufgrund der Unitarität von U abhängig.

Für eine Lagrangedichte $L(x_1, \dots, x_n)$ mit untereinander abhängigen Parametern x_i ist allgemein folgende Gleichung zu lösen:

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(t)}{\partial \dot{x}_i(t)} - \frac{\partial L(t)}{\partial x_i(t)} \right) dx_i(t) = 0$$

Die Bewegungsgleichungen der E-Felder

Variationsansatz

Der Ansatz bei Variation nach $U_{i(ab)}(x, t)$ und $U_{i(ab)}^*(x, t)$ lautet somit:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial \dot{U}_{i(ab)}(x, t)} - \frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial U_{i(ab)}(x, t)} \right) \delta U_{i(ab)}(x, t) +$$
$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial \dot{U}_{i(ab)}^*(x, t)} - \frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial U_{i(ab)}^*(x, t)} \right) \delta U_{i(ab)}^*(x, t) = 0$$

Variationen

Die Variation $U_i(x, t) + \delta U_i(x, t)$ der Linkvariablen erfolgt über den Subraum der unitären Matrizen.

Wegen $U_i(x, t) + \delta U_i(x, t) = e^{idq_a(x, t)T^a} U_i(x, t)$ folgt:
 $\delta U_i(x, t) = idq_a(x, t)T^a U_i(x, t)$



Die Bewegungsgleichungen der E-Felder

Zu lösende Gleichungen

Aufgrund der Unabhängigkeit der Parameter $dq_a(x, t)$ ergeben sich $N^2 - 1$ zu lösende Variationsgleichungen der Form:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial \dot{U}_{i(ab)}(x, t)} - \frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial U_{i(ab)}(x, t)} \right) (T^n U_i(x, t))_{ab} -$$
$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial \dot{U}_{i(ab)}^*(x, t)} - \frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial U_{i(ab)}^*(x, t)} \right) (U_i^+(x, t) T^n)_{ba} = 0$$



Berechnung der ersten Terme

Rechnung

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial \dot{U}_{i(ab)}^{(*)}(x,t)} &= \frac{a}{g^2} \frac{\partial}{\partial \dot{U}_{i(ab)}^{(*)}(x,t)} \text{Tr}(\dot{U}_j^+(x,t) \dot{U}_j(x,t)) \\
 &= \frac{a}{g^2} \frac{\partial}{\partial \dot{U}_{i(ab)}^{(*)}(x,t)} \dot{U}_{j(dc)}^*(x,t) \dot{U}_{j(dc)}(x,t) \\
 &= \left(\frac{a}{g^2} \dot{U}_{i(ab)}^* \right)^{(*)} (x,t) = \left(-i \frac{a^2}{g} E_i^a(x,t) (U_i^+(x,t) T^a)_{(ba)} \right)^{(*)}
 \end{aligned}$$

Ergebnis

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial \dot{U}_{i(ab)}^{(*)}(x,t)} = \mp i \frac{a^2}{g} \left[\dot{E}_i^a(x,t) (U_i^+(x,t) T^a)_{(ba)} + E_i^a(x,t) (\dot{U}_i^+(x,t) T^a)_{(ba)} \right]^{(*)}$$

Berechnung der verbleibenden Terme

Verbleibende Terme

Es verbleibt noch die Untersuchung der Ausdrücke:

$$\frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial U_{i(ab)}^{(*)}(x, t)} = \frac{2}{ag^2} \frac{\partial}{\partial U_{i(ab)}^{(*)}(x, t)} \sum_{\square_r(t)} \text{ReTr} U_{\square_r}$$

Ansatz

Es sind nur Plaquetten welche den Link $x \rightarrow x + a\hat{i}$ enthalten zu berücksichtigen. Alle Plaquetten schließen an den Punkt x an. Der Ausdruck formt sich somit um zu:

$$\frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial U_{i(ab)}^{(*)}(x, t)} = \frac{2}{ag^2} \frac{\partial}{\partial U_{i(ab)}^{(*)}(x, t)} \sum_{|j| \neq i} \text{ReTr} U_{\square_{ij}}(x, t)$$

Berechnung der verbleibenden Terme

Rechnung

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{ag^2} \sum_{|j| \neq |i|} \frac{\partial \text{ReTr} U_{\square ij(cd)}(x, t)}{\partial U_{i(ab)}(x, t)} = \frac{1}{ag^2} \sum_{|j| \neq |i|} \frac{\partial (\text{Tr} U_{\square ij(cd)}^+(x, t))}{\partial U_{i(ab)}(x, t)} \\
 &= \frac{1}{ag^2} \sum_{|j| \neq |i|} \frac{\partial U_{i(cd)}(x, t) U_{j(de)}(x + \hat{i}, t) U_{i(fe)}^*(x + \hat{j}, t) U_{j(cf)}^*(x, t)}{\partial U_{i(ab)}(x, t)} \\
 &= \frac{1}{ag^2} \sum_{|j| \neq |i|} S_{ij(ba)}^+(x, t)
 \end{aligned}$$

$$\text{Allgemein: } \frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial U_{i(ab)}^{(*)}(x, t)} = \frac{1}{ag^2} \sum_{|j| \neq |i|} S_{ij(ba)}^{+(*)}(x, t)$$

Definition

$$S_{ij}(x, t) \equiv U_j(x, t) U_i(x + \hat{j}, t) U_j^+(x + \hat{i}, t)$$



Variationsgleichung

Einsetzen aller Ausdrücke in die Variationsgleichung

$$\left(-\frac{ia^2}{g} \left[\dot{E}_i^a U_i^+ T^a + E_i^a \dot{U}_i^+ T^a \right] - \frac{1}{ag^2} \sum_{|j| \neq |i|} S_{ij}^+ \right)_{ba} (T^n U_i)_{ab} -$$

$$\left(\frac{ia^2}{g} \left[\dot{E}_i^a T^a U_i + E_i^a T^a \dot{U}_i \right] - \frac{1}{ag^2} \sum_{|j| \neq |i|} S_{ij} \right)_{ab} (U_i^+ T^n)_{ba} = 0$$

⇒ Zusammenfassung

$$-\frac{ia^2}{g} \left[2\dot{E}_i^a \text{Tr} (T^n T^a) + E_i^a \text{Tr} (T^n U_i \dot{U}_i^+ T^a + h.c.) \right] =$$

$$-\frac{1}{ag^2} \sum_{|j| \neq |i|} \text{Tr} (S_{ij} U_i^+ T^n - h.c.)$$

Variationsgleichung

Vereinfachung

Durch Einsetzen von \dot{U}_i folgt im zweiten Ausdruck:

$$E_i^a \text{Tr} \left(T^n U_i \dot{U}_i^+ T^a \right) = -iga E_i^a E_i^b \text{Tr} \left(T^n T^b T^a \right)$$

Wertet man die Spur $\text{Tr}(T^n T^b T^a) = \text{Tr}(T^a T^n T^b)$ in der adjungierten Repräsentation mit $T_{ac}^b = if^{abc}$ aus, so zeigt sich über $f^{abc} = -f^{cba}$:

$$\text{Tr}(T^a T^n T^b) = -if^{cad} f^{dne} f^{ebc} = if^{cbe} f^{end} f^{dac} = -\text{Tr}(T^b T^n T^a)$$

Die Spur wird somit bei Summation über a und b verschwinden. Dasselbe gilt für den hermitesch konjugierten Term in der Bewegungsgleichung.

Bewegungsgleichungen

Variationsgleichung

$$-\frac{2ia^2}{g} \dot{E}_i^a \text{Tr}(T^n T^a) = -\frac{1}{ag^2} \sum_{|j| \neq |i|} \text{Tr}(S_{ij} U_i^+ T^n - h.c.)$$

Bewegungsgleichungen

Verwendet man schließlich noch $S_{ij} U_i^+(x, t) = U_{\square ij}(x, t)$ und die Beziehung $\text{Tr}(T^n T^a) = \frac{1}{2} \delta_{an}$ so ergibt sich:

$$\dot{E}_i^n(x, t) = \frac{2}{a^3 g} \sum_{|j| \neq |i|} \text{ImTr}(T^n U_{\square ij}(x, t))$$



Das Gaußsche-Gesetz

Ausgangspunkt

$$S_{YM} = \beta \frac{a}{dt} \sum_{\square_t} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr} U_{\square_t} \right) + \dots$$

mit Plaquette $U_{\square_{\mu\nu}}(x) = U_\nu(x) U_\mu(x + \Delta_\nu \hat{\nu}) U_\nu^+(x + \Delta_\mu \hat{\mu}) U_\mu^+(x)$

Variation nach zeitlichen Links

Bisher sind aufgrund der Wahl einer temporalen Eichung die Bewegungsgleichungen bei Variation nach den zeitlichen Links unberücksichtigt geblieben.



Das Gaußsche-Gesetz

Variationsgleichung

$$\frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial U_{0(mn)}(x,t)} \delta U_{0(mn)}(x,t) + \frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial U_{0(mn)}^*(x,t)} \delta U_{0(mn)}^*(x,t) = 0$$

mit $dU_{0(mn)}(x,t) = (idq_a(x,t)T^a U_0(x,t))_{mn}$

Partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{YM}(t)}{\partial U_{0(mn)}^*(x,t)} &= -\beta \frac{a}{Ndt} \sum_i \left(\frac{\partial \text{ReTr} U_{0i}(x,t)}{\partial U_{0(mn)}^*(x,t)} + \frac{\partial \text{ReTr} U_{0i}(x - \hat{i}, t)}{\partial U_{0(mn)}^*(x,t)} \right) \\ &= -\beta \frac{a}{Ndt} \sum_i [(U_i(x, t + dt) U_0^+(x + \hat{i}, t) U_i^+(x, t))_{nm} + \\ &\quad (U_i^+(x - \hat{i}, t + dt) U_0^+(x - \hat{i}, t) U_i(x - \hat{i}, t))_{nm}]^{(*)} \end{aligned}$$

Das Gaußsche-Gesetz

⇒ Variationsgleichung in temporaler Eichung

$$T_{mn}^a \sum_i [U_i(x, t + dt)U_i^+(x, t) + U_i^+(x - \hat{i}, t + dt)U_i(x - \hat{i}, t)]_{nm} - c.c. = 0$$

$$\Rightarrow \text{ImTr}T^a \sum_i (U_i(x, t + dt)U_i^+(x, t) + U_i^+(x - \hat{i}, t + dt)U_i(x - \hat{i}, t)) = 0$$

Über $\dot{U}_i(x) = iE_i^a(x)T^a U_i(x)$ und $\text{Tr}T^a = 0$ folgt schließlich:

$$\text{ImTr}T^a \sum_i (E_i^a(x, t)T^a - U_i^+(x - \hat{i}, t)E_i^a(x, t)T^a U_i^+(x - \hat{i}, t)) = 0$$

Gaußsches Gesetz

$$\sum_i (E_i^a(x, t)T^a - U_i^+(x - \hat{i}, t)E_i^a(x - \hat{i}, t)T^a U_i^+(x - \hat{i}, t)) = 0$$



Realisierung des Gaußschen-Gesetzes

Praktische Realisierung des Gaußschen-Gesetzes

Initialisierung: Die Links $U_i(x, 0)$ werden als Einheitsmatrix gewählt und die E-Felder $E_i^a(x, 0)$ über eine Gaußverteilung initialisiert.

Beseitigung der Gaußverletzung: Nach jeder Anwendung der Bewegungsgleichungen wird die Gaußverletzung der E-Felder über

$$E_i(x, t) \rightarrow E_i(x, t) + \gamma(U_i C(x + \hat{i}, t) U_i^+ - C(x, t))$$

reduziert. ($C(x, t)$: Gaußverletzung, $E_i(x, t) = E_i^a(x, t) T^a$)

Das Gitter wird durch Anwendung der Bewegungsgleichungen und Projektion auf die Gauß-Hyperfläche thermalisiert.

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Mit $dt \rightarrow a dt$ und $E_i^a \rightarrow a^2 g E_i^a$ lautet die Wilson Wirkung:

$$S_{YM} = \int dt \sum_{x^0=t,i} \frac{1}{g^2} \frac{E_i^a(x) E_i^a(x)}{2} - \frac{2N}{g^2} \int dt \sum_{\square_r(t)} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr} U_{\square_r} \right)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\dot{U}_i(x) = i E_i^a(x) T^a U_i(x) \quad (\text{Linkvariablen})$$

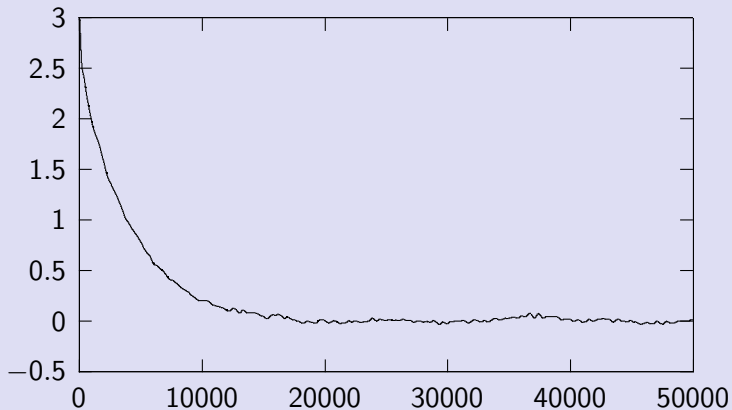
$$\dot{E}_i^n(x, t) = 2 \sum_{|j| \neq |i|} \text{ImTr} (T^n U_{\square_{ij}}(x, t)) \quad (\text{E - Felder})$$

Das Gaußsche-Gesetz ist gegeben durch:

$$\sum_i (E_i^a(x, t) T^a - U_i^+(x - \hat{i}, t) E_i^a(x - \hat{i}, t) T^a U_i^+(x - \hat{i}, t)) = 0$$

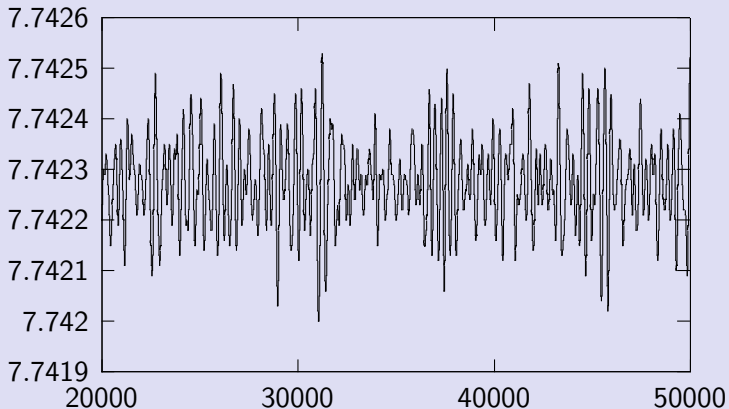
Thermalisierung

$\text{Re}(\text{Tr}(U))$: SU(3), Gitter: 10x10x10, $\Delta t = 0.01$



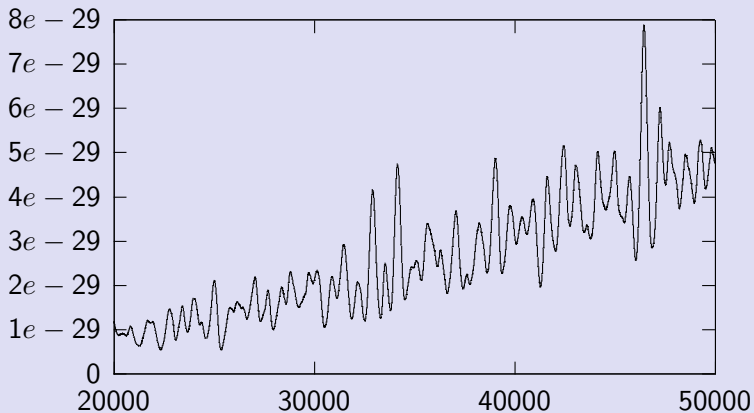
Stabilität

Hamiltondichte: SU(3), Gitter: 10x10x10, $\Delta t = 0.01$



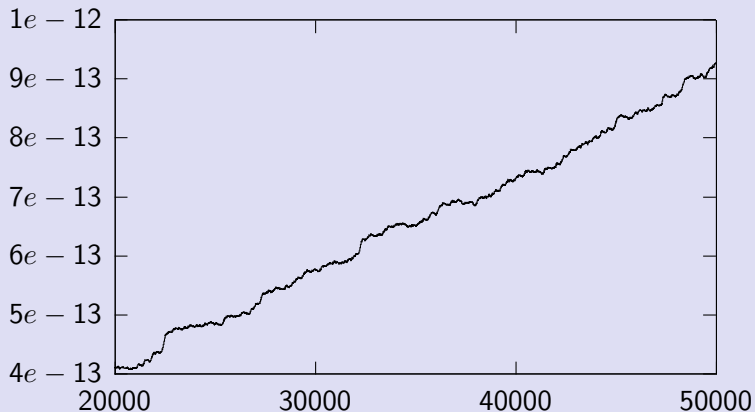
Gauß

Gauß-Verletzung: SU(3), Gitter: $10 \times 10 \times 10$, $\Delta t = 0.01$

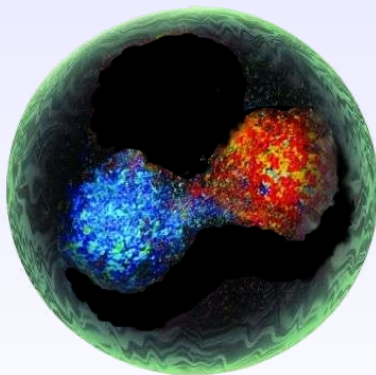


Numerische Fehler

Unitaritätsverletzung: SU(3), Gitter: 10x10x10, $\Delta t = 0.01$



Berücksichtigung der Quarks



Berücksichtigung der Quarks



Übersicht

- 5 NRQCD
 - Ansatz
 - Lagrangedichte und Diskretisierung



Übersicht

- 5 NRQCD
 - Ansatz
 - Lagrangedichte und Diskretisierung

- 6 Berücksichtigung der Hard-Thermal-Loops
 - Die effektive Hard-Thermal-Loop Theorie



Der NRQCD Ansatz

Idee: Berücksichtigung der Quarks in klassischer NRQCD

Der einfachste Weg die schweren c-Quarks zu berücksichtigen besteht in der Verwendung der Lagrangedichte der nichtrelativistischen QCD zur Herleitung der klassischen Bewegungsgleichungen.

Ausgangspunkt der NRQCD im Kontinuum

Fermionischer Teil der QCD- Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(iD\gamma - M)\psi \quad \text{mit} \quad D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$$

mit ultraviolettem Cutoff $\Lambda \lesssim M$ zum Ausschließen relativistischer schwerer Quarks aus der Theorie.

(Impulse schwerer Quarks in Mesonen: $p \sim Mv \ll M$)

Lagrangedichte

Anwendung der Renormierungsgruppe

Durch Ausintegrieren der Impulsskalen oberhalb Λ ergibt sich in führender Ordnung $1/\Lambda$ die ursprüngliche Lagrangedichte mit renormierten Quarkmassen und Ladungen. In höherer Ordnung treten nichtrenormierbare Terme auf:

$$\frac{c_1 g}{\Lambda} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \psi + \frac{c_2 g}{\Lambda^2} \bar{\psi} i \partial_\mu F^{\mu\nu} \gamma_\nu + \frac{c_3 g^2}{\Lambda^2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2 + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right)$$



Lagrangedichte

Foldy-Wouthuysen-Tani Transformation

Durch Anwendung der FWT-Transformation können Quark und Antiquarkfelder in einer Expansion nach $\frac{1}{M}$ separiert werden. Die Transformation des Dirac-Terms liefert:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(iD\gamma - M)\psi &\rightarrow \psi^+ \left(iD_t - M + \frac{D^2}{2M} \right) \psi \\ &+ \psi^+ \left(\frac{g}{2M} \vec{\sigma} \vec{B} + \frac{g}{8M^2} \nabla \cdot \vec{E} + \frac{D^4}{8M^3} + \dots \right) \psi \end{aligned}$$

(\vec{E} , \vec{B} : chromoelektrische und chromomagnetische Felder)



Lagrangedichte

Die Lagrangedichte der NRQCD

Bei Expansion nach $p/\Lambda \sim p/M \sim v$ ergibt sich bis zur Ordnung v^2 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{NR} &= -\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \psi^\dagger \left(iD_t + \frac{D^2}{2M} \right) \psi \\
 &+ \psi^\dagger \left(c_1 \frac{D^4}{8M^3} + c_2 \frac{g}{2M} \vec{\sigma} \vec{B} \right) \psi \\
 &+ \psi^\dagger \left(c_3 \frac{g}{8M^2} \nabla \cdot \vec{E} + c_4 \frac{ig}{8M^2} \vec{\sigma} \left[\vec{D} \times \vec{E} - \vec{E} \times \vec{D} \right] \right) \psi \\
 &+ qq\text{-Terme} + q\bar{q}\text{-Terme} + \dots
 \end{aligned}$$



Lagrangedichte

Anmerkung: Schrödingergleichung der Quark-Greensfunktion

Die Quark-Greensfunktion erfüllt eine Schrödinger-Gleichung der Form:

$$\left(iD_t + \frac{D^2}{2M} + \dots \right) G(x, x') = \delta^4(x - x')$$



Diskretisierung

Gitterwirkung der NRQCD in 1.Ordnung

Die diskretisierte Gitterwirkung der NRQCD lautet:

$$S_{NR} = \sum_{\vec{x},t} \psi_{\vec{x},t}^+ \left(\Delta_4 - \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j \Delta_{-j}}{2M} \right) \psi_{\vec{x},t} + S_{Wilson}$$

Klassische Bewegungsgleichungen

Die klassischen Bewegungsgleichungen ergeben sich erneut im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ durch Variation nach den Feldern.



Die effektive Hard-Thermal-Loop Theorie

Die effektive Hard-Thermal-Loop Theorie

Eine korrekte thermische Behandlung des Charmoniums erfordert eine Berücksichtigung der Hard-Thermal-Loops. Die effektive HTL-Theorie kann als Satz kinematischer Gleichung für Eichfelder mit einem induzierten Strom j harter Eichteilchen formuliert werden.

$$D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

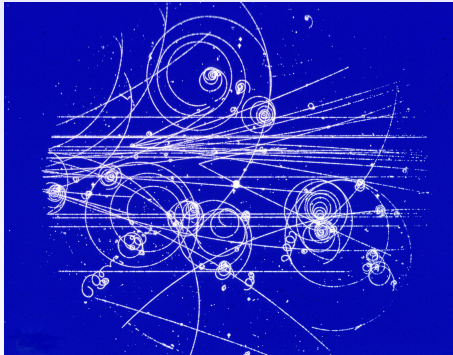
$$j^\nu(x) = 2gn \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} v^\nu \delta n(\vec{p}, x)$$

$$v^\mu D_\mu \delta n(\vec{p}, x) = -g\vec{v} \cdot \vec{E} \frac{dn_0(|p|)}{d|p|}$$

($\delta n = \delta n_a T^a$: Abweichung der harten Teilchen von Bose-Verteilung n_0 , $v^\mu = (1, \vec{v})$ Geschwindigkeit der Teilchen)



Zusammenfassung



Zusammenfassung



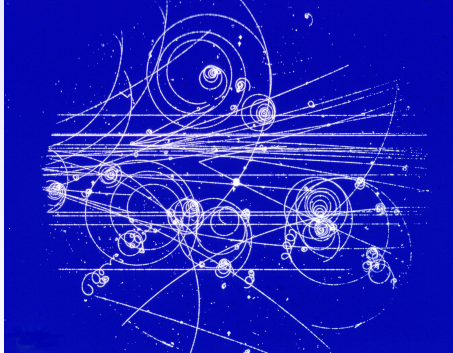
Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Die im Infrarotbereich der schwach koppelnden thermischen QCD dominante klassische Dynamik ($\hbar \rightarrow 0$) erlaubt eine dynamische Simulation des Charmoniums bei einer Temperatur von $T \sim 2T_c$.
- Die Simulation erfolgt durch räumliche Diskretisierung des Problems und Ableitung exakter Bewegungsgleichungen über den Lagrange- bzw. Hamiltonformalismus zur Entwicklung der Gitterkonfiguration
- Die Berücksichtigung der Quarks erfolgt zunächst analog zur NRQCD und soll schließlich im Rahmen einer effektiven Hard-Thermal-Loop Theorie erfolgen



Fragen



Fragen?

