Stochastische Aspekte der kosmischen Hintergrundstrahlung

Michael Wilczek

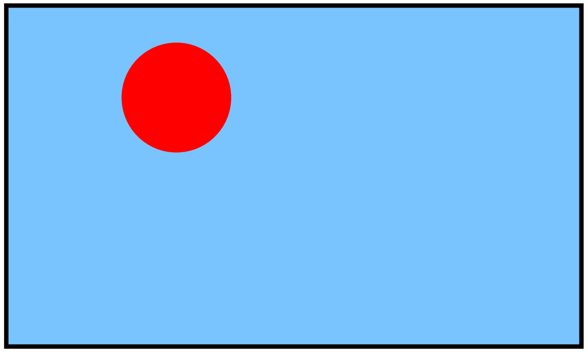
mwilczek@web.de

Institut für Theoretische Physik, WWU Münster

Überblick

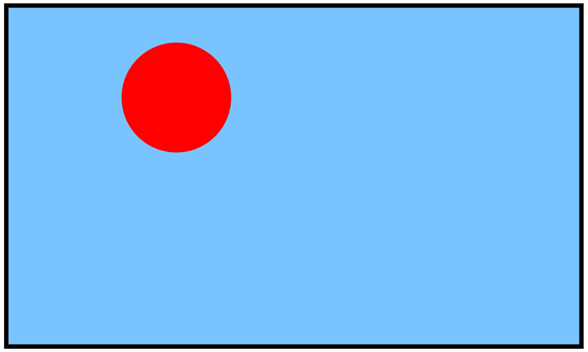
- die Fokker-Planck Gleichung
- die kosmische Hintergrundstrahlung (CMB)
- stochastische Analyse der CMB

Brownsche Bewegung



- betrachte Teilchen der Masse m in Flüssigkeit, unter Einfluß von Reibung

Brownsche Bewegung

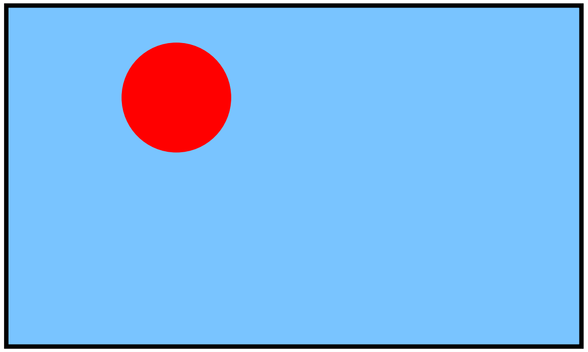


- betrachte Teilchen der Masse m in Flüssigkeit, unter Einfluß von Reibung

- deterministische Bewegungsgleichung:

$$m\dot{v} + \alpha v = 0$$

Brownsche Bewegung



- ▷ betrachte Teilchen der Masse m in Flüssigkeit, unter Einfluß von Reibung

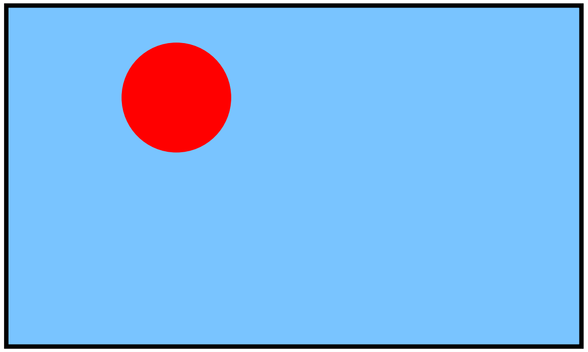
- ▷ deterministische Bewegungsgleichung:

$$m\dot{v} + \alpha v = 0$$

- ▷ Lösung:

$$v(t) = v(0)\ e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

Brownsche Bewegung



- ▷ betrachte Teilchen der Masse m in Flüssigkeit, unter Einfluß von Reibung
- ▷ deterministische Bewegungsgleichung:

$$m\dot{v} + \alpha v = 0$$

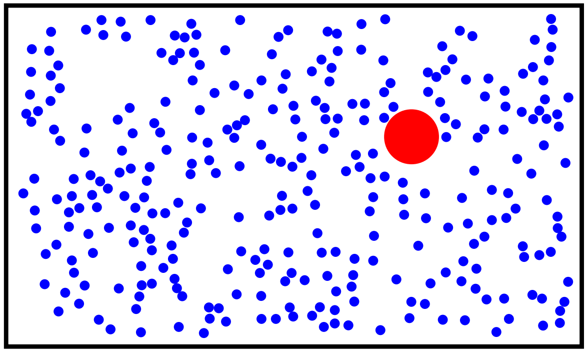
- ▷ Lösung:

$$v(t) = v(0)\ e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

- ▷ verliert Gültigkeit, wenn Teilchen kleiner wird

Brownsche Bewegung

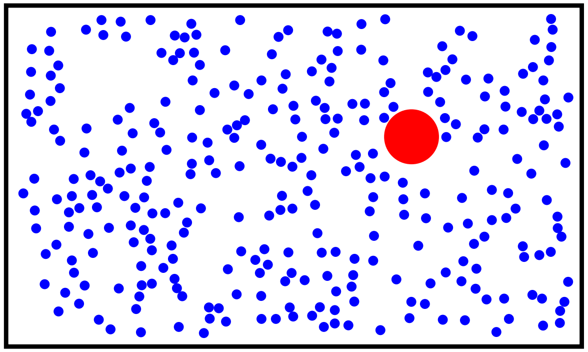
▷ Gleichverteilungssatz:



$$\frac{1}{2}m < v^2 >= \frac{1}{2}kT$$

Brownsche Bewegung

▷ Gleichverteilungssatz:

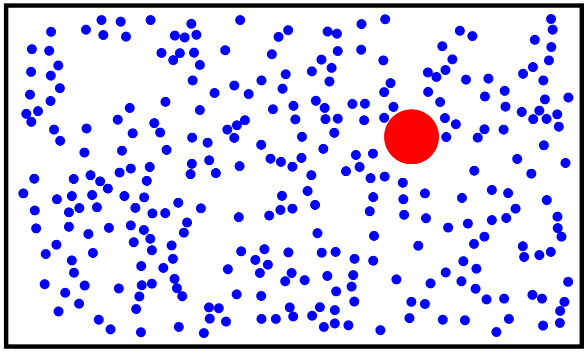


$$\frac{1}{2}m < v^2 >= \frac{1}{2}kT$$

$$v_{th} = \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

Brownsche Bewegung

▷ Gleichverteilungssatz:



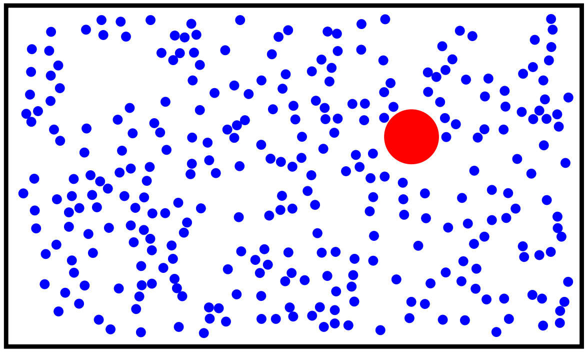
$$\frac{1}{2}m < v^2 >= \frac{1}{2}kT$$

$$v_{th} = \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

▷ daher: stochastische Betrachtung notwendig:

Brownsche Bewegung

▷ Gleichverteilungssatz:



$$\frac{1}{2}m < v^2 >= \frac{1}{2}kT$$

$$v_{th} = \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

▷ daher: stochastische Betrachtung notwendig:

$$F = F_r(t) + F_f(t) = -\alpha v(t) + F_f(t)$$

Brownsche Bewegung

- stochastische Differentialgleichung:

$$\dot{v} + \gamma v = \Gamma(t)$$

mit $\Gamma(t) = F_f(t)/m$ und $\gamma = \alpha/m$

Brownsche Bewegung

- stochastische Differentialgleichung:

$$\dot{v} + \gamma v = \Gamma(t)$$

mit $\Gamma(t) = F_f(t)/m$ und $\gamma = \alpha/m$

- Langevin-Kraft $\Gamma(t)$

$$\begin{aligned} < \Gamma(t) > &= 0 \\ < \Gamma(t)\Gamma(t') > &= \frac{2\gamma kT}{m}\delta(t-t') \end{aligned}$$

Brownsche Bewegung

- stochastische Differentialgleichung:

$$\dot{v} + \gamma v = \Gamma(t)$$

mit $\Gamma(t) = F_f(t)/m$ und $\gamma = \alpha/m$

- Langevin-Kraft $\Gamma(t)$

$$\begin{aligned} < \Gamma(t) > &= 0 \\ < \Gamma(t)\Gamma(t') > &= \frac{2\gamma kT}{m}\delta(t - t') \end{aligned}$$

- $v(t)$ wird zur stochastischen Größe

Brownsche Bewegung

- stochastische Differentialgleichung:

$$\dot{v} + \gamma v = \Gamma(t)$$

mit $\Gamma(t) = F_f(t)/m$ und $\gamma = \alpha/m$

- Langevin-Kraft $\Gamma(t)$

$$\begin{aligned} < \Gamma(t) > &= 0 \\ < \Gamma(t)\Gamma(t') > &= \frac{2\gamma kT}{m}\delta(t-t') \end{aligned}$$

- $v(t)$ wird zur stochastischen Größe
- interessant: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) $P(v,t)$

Brownsche Bewegung

- Antwort: Fokker-Planck Gleichung:

$$\frac{\partial P(v,t)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial\, vP(v,t)}{\partial v} + \gamma \frac{kT}{m} \frac{\partial^2 P(v,t)}{\partial v^2}$$

Brownsche Bewegung

- Antwort: Fokker-Planck Gleichung:

$$\frac{\partial P(v,t)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial\, vP(v,t)}{\partial v} + \gamma \frac{kT}{m} \frac{\partial^2 P(v,t)}{\partial v^2}$$

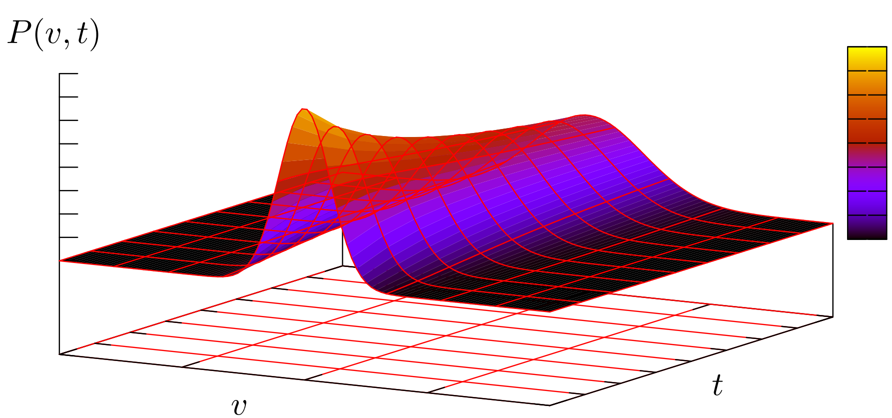
- partielle DGL, Evolutionsgleichung für PDF

Brownsche Bewegung

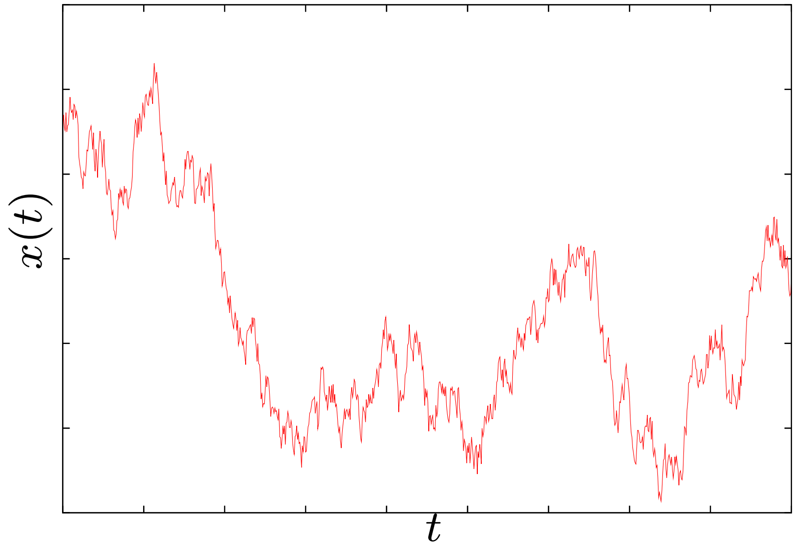
- Antwort: Fokker-Planck Gleichung:

$$\frac{\partial P(v,t)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial\, vP(v,t)}{\partial v} + \gamma \frac{kT}{m} \frac{\partial^2 P(v,t)}{\partial v^2}$$

- partielle DGL, Evolutionsgleichung für PDF
- qualitativ:

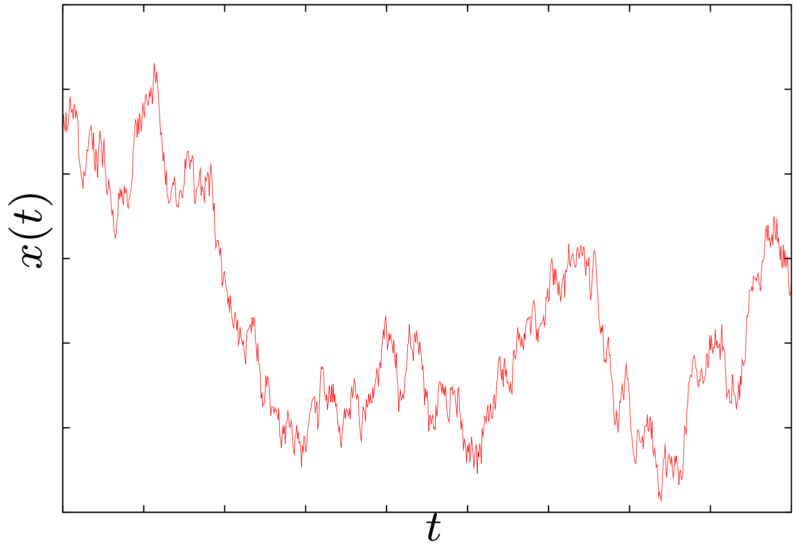


Grundlagen



- betrachte kontinuierliche, zeitabhängige Zufallsvariable $x(t)$

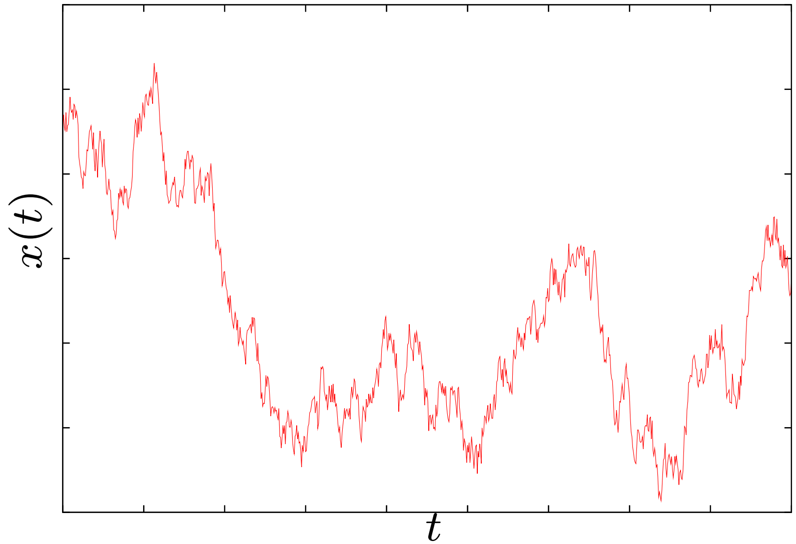
Grundlagen



- ▷ betrachte kontinuierliche, zeitabhängige Zufallsvariable $x(t)$

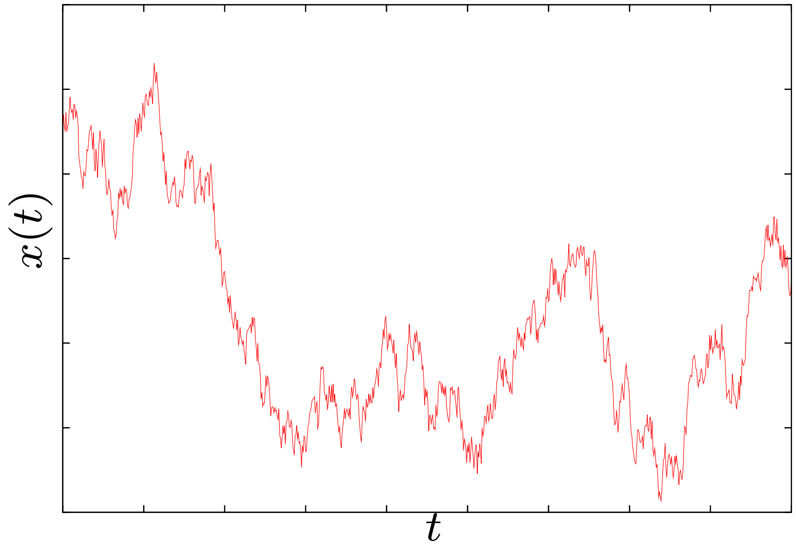
- ▷ $x(t) \Rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $P(x,t)$

Grundlagen



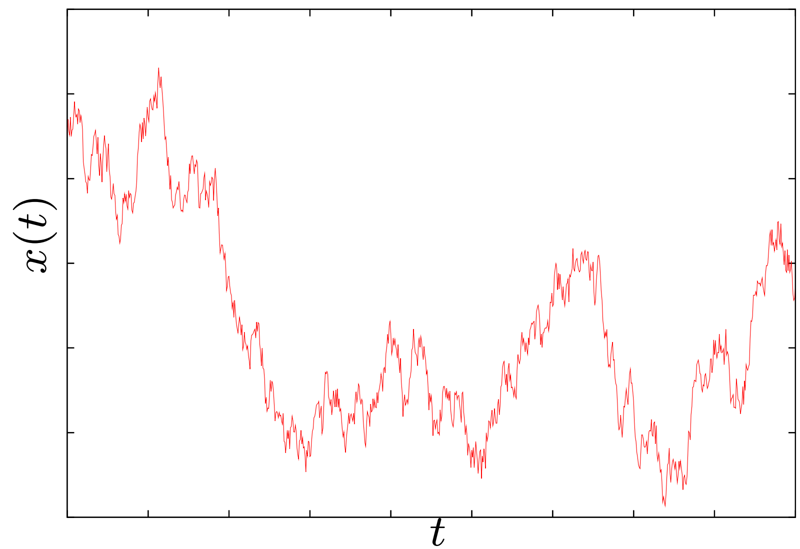
- betrachte kontinuierliche, zeitabhängige Zufallsvariable $x(t)$
- $x(t) \Rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $P(x,t)$
- Verbundwahrscheinlichkeit $P(x_3,t_3;x_2,t_2;x_1,t_1)$ mit $x_i = x(t_i)$

Grundlagen



- betrachte kontinuierliche, zeitabhängige Zufallsvariable $x(t)$
- $x(t) \Rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $P(x,t)$
- Verbundwahrscheinlichkeit $P(x_3,t_3;x_2,t_2;x_1,t_1)$ mit $x_i = x(t_i)$
- bedingte Wahrscheinlichkeit $P(x_2,t_2|x_1,t_1) = \frac{P(x_2,t_2;x_1,t_1)}{P(x_1,t_1)}$

Grundlagen



▷ betrachte kontinuierliche, zeitabhängige Zufallsvariable $x(t)$

▷ $x(t) \Rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $P(x,t)$

▷ Verbundwahrscheinlichkeit $P(x_3,t_3;x_2,t_2;x_1,t_1)$ mit $x_i = x(t_i)$

▷ bedingte Wahrscheinlichkeit $P(x_2,t_2|x_1,t_1) = \frac{P(x_2,t_2;x_1,t_1)}{P(x_1,t_1)}$
$\Leftrightarrow P(x_2,t_2;x_1,t_1) = P(x_2,t_2|x_1,t_1)P(x_1,t_1)$

Markov Prozess

Definition:

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, ..., x_1, t_1) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

betrachte:

$$\begin{aligned} P(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1) &= P(x_3, t_3 | x_2, t_2) P(x_2, t_2; x_1, t_1) \\ &= P(x_3, t_3 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1) \end{aligned}$$

$$\int P(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1) dx_2 = P(x_3, t_3; x_1, t_1)$$

Markov Prozess

$$P(x_3,t_3;x_1,t_1) = \int P(x_3,t_3|x_2,t_2)P(x_2,t_2|x_1,t_1)P(x_1,t_1)dx_2$$

$$\boxed{P(x_3,t_3|x_1,t_1) = \int P(x_3,t_3|x_2,t_2)P(x_2,t_2|x_1,t_1)dx_2}$$

Chapman-Kolmogorov Gleichung

Fokker-Planck Gleichung

▷ Idee: partielle Differentialgleichung für PDF

Fokker-Planck Gleichung

- Idee: partielle Differentialgleichung für PDF
- Integration liefert zeitliche Entwicklung der PDF

Fokker-Planck Gleichung

- ▷ Idee: partielle Differentialgleichung für PDF
- ▷ Integration liefert zeitliche Entwicklung der PDF
- ▷ Herleitung aus der Kramers-Moyal Entwicklung:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x,t) P(x,t)$$

Fokker-Planck Gleichung

- ▷ Idee: partielle Differentialgleichung für PDF
- ▷ Integration liefert zeitliche Entwicklung der PDF
- ▷ Herleitung aus der Kramers-Moyal Entwicklung:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x,t) P(x,t)$$

- ▷ PDF ist vollständig durch zwei Entwicklungskoeffizienten charakterisiert

FPG: Herleitung

Identität:

$$P(x,t+\tau|x',t) = \int \delta(y-x)P(y,t+\tau|x't)dy$$

formale Taylorentwicklung der Deltafunktion:

$$\begin{aligned}\delta(y-x) &= \delta(x'-x+y-x') \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-x')^n}{n!}(-\frac{\partial}{\partial x})^n \delta(x'-x)\end{aligned}$$

Definition Momente:

$$M_n = \int (y-x')^n P(y,t+\tau|x',t)dy$$

FPG: Herleitung

einsetzen und Identifizierung der Momente

$$P(x,t+\tau|x',t) \quad = \quad \left[1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\frac{\partial}{\partial x})^n M_n(x',t,\tau)\right]\delta(x'-x)$$

mit

$$P(x,t+\tau) = \int P(x,t+\tau|x',t)P(x',t)dx'$$

$$P(x,t+\tau) - P(x,t) = \frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\tau + O(\tau^2)$$

und

$$M_n(x,t,\tau)/n! = D^{(n)}(x,t)\tau + O(\tau^2)$$

FPG: Herleitung

folgt schließlich

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x,t) P(x,t)$$

Kramers-Moyal Entwicklung

FPG: Herleitung

folgt schließlich

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x,t) P(x,t)$$

Kramers-Moyal Entwicklung

- partielle DGL für die Entwicklung der PDF

FPG: Herleitung

folgt schließlich

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x,t) P(x,t)$$

Kramers-Moyal Entwicklung

- ▷ partielle DGL für die Entwicklung der PDF
- ▷ Problem: unendlich hohe Ordnungen

FPG: Herleitung

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x,t) P(x,t)$$

FPG: Herleitung

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x,t) P(x,t)$$

- Pawula Theorem: Wenn bei der Kramers-Moyal-Entwicklung der vierte Term verschwindet, verschwinden auch der dritte Term sowie alle höheren Ordnungen.
- bei gaußverteilter Fluktuationskraft erfüllt

FPG: Herleitung

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n D^{(n)}(x,t) P(x,t)$$

- <u>Pawula Theorem:</u> Wenn bei der Kramers-Moyal-Entwicklung der vierte Term verschwindet, verschwinden auch der dritte Term sowie alle höheren Ordnungen.
- bei gaußverteilter Fluktuationskraft erfüllt

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x,t) P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x,t) P(x,t)$$

Fokker-Planck Gleichung

FPG: Bemerkungen

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x,t)P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x,t)P(x,t)$$

Fokker-Planck Gleichung

FPG: Bemerkungen

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x,t) P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x,t) P(x,t)$$

Fokker-Planck Gleichung

- partielle DGL zweiter Ordnung

FPG: Bemerkungen

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x,t) P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x,t) P(x,t)$$

Fokker-Planck Gleichung

- partielle DGL zweiter Ordnung
- PDF ist vollständig durch Drift- und Diffusionskoeffizienten bestimmt

FPG: Bemerkungen

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x,t) P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x,t) P(x,t)$$

Fokker-Planck Gleichung

- partielle DGL zweiter Ordnung
- PDF ist vollständig durch Drift- und Diffusionskoeffizienten bestimmt
- FPG analytisch lösbar z.B. im Falle von:
  - Wienerprozess: zeitlich stationär, verschwindender Diffusionskoeffizient
  - Ornstein-Uhlenbeckprozess: linearer Drift-, konstanter Diffusionskoeffizient

FPG: Anwendung auf Daten

- Ziel: Schätzung der Drift- und Diffusionskoeffizienten

$$D^{(n)}(x,t) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \to 0} M_n = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \to 0} \int (y - x')^n P(y, t+\tau | x', t) dy$$

FPG: Anwendung auf Daten

- Ziel: Schätzung der Drift- und Diffusionskoeffizienten

$$D^{(n)}(x,t) = \frac{1}{n!}\lim_{\tau\to 0} M_n = \frac{1}{n!}\lim_{\tau\to 0}\int (y-x')^n P(y,t+\tau|x',t)dy$$

- Problem: reale Prozesse sind meist nur eingeschränkt markovsch (vgl. Brownsche Bewegung)

FPG: Anwendung auf Daten

- Ziel: Schätzung der Drift- und Diffusionskoeffizienten

$$D^{(n)}(x,t) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \to 0} M_n = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \to 0} \int (y-x')^n P(y,t+\tau|x',t)dy$$

- Problem: reale Prozesse sind meist nur eingeschränkt markovsch (vgl. Brownsche Bewegung)
- Problem: Daten sind nur endlich aufgelöst

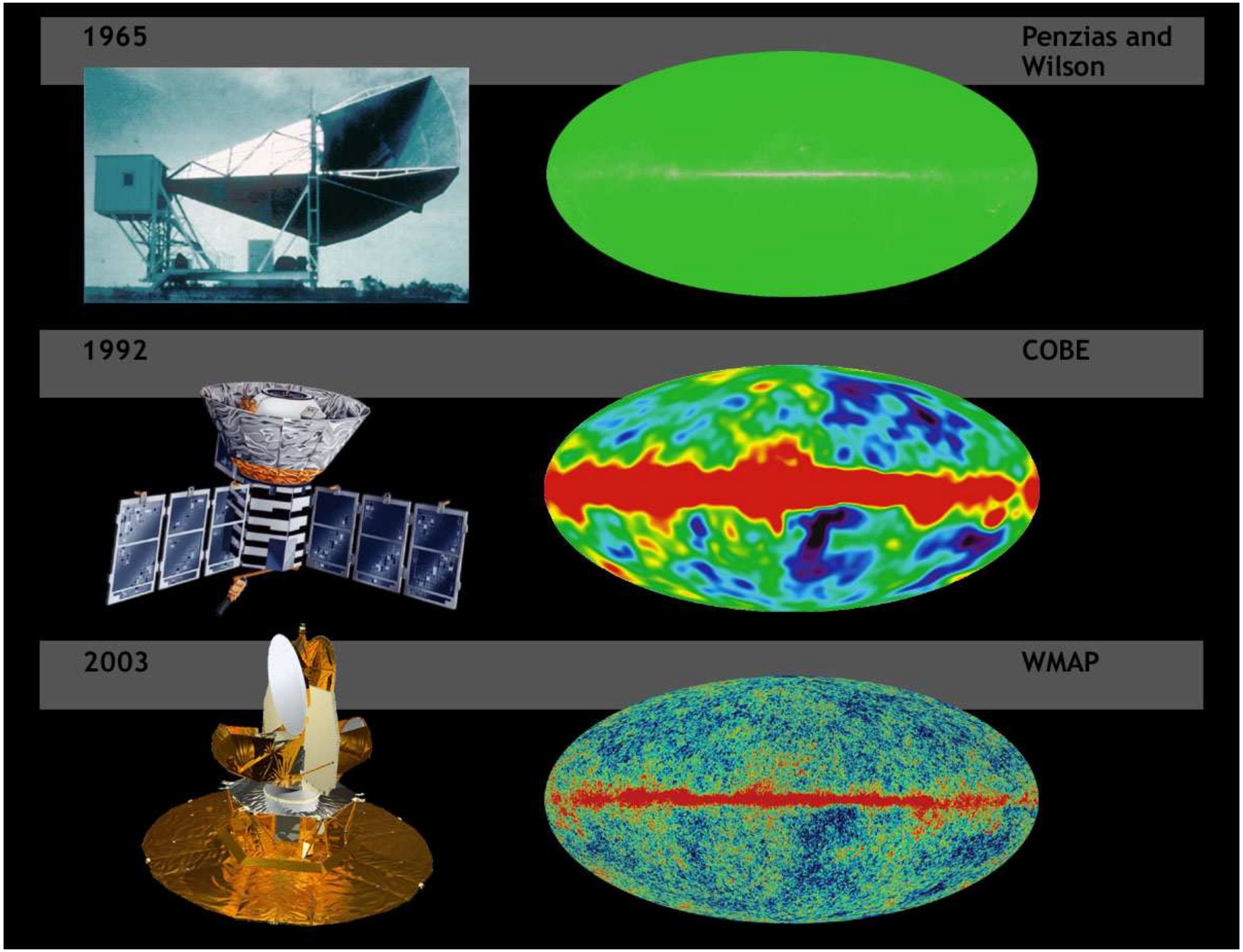
FPG: Anwendungsbeispiele

- turbulente Strömung (Friedrich/ Peinke)
- Devisenhandel, Aktienmarkt
- Windfelder
- Kristallwachstum
- kosmische Hintergrundstrahlung

CMB: Entdeckung und Erforschung

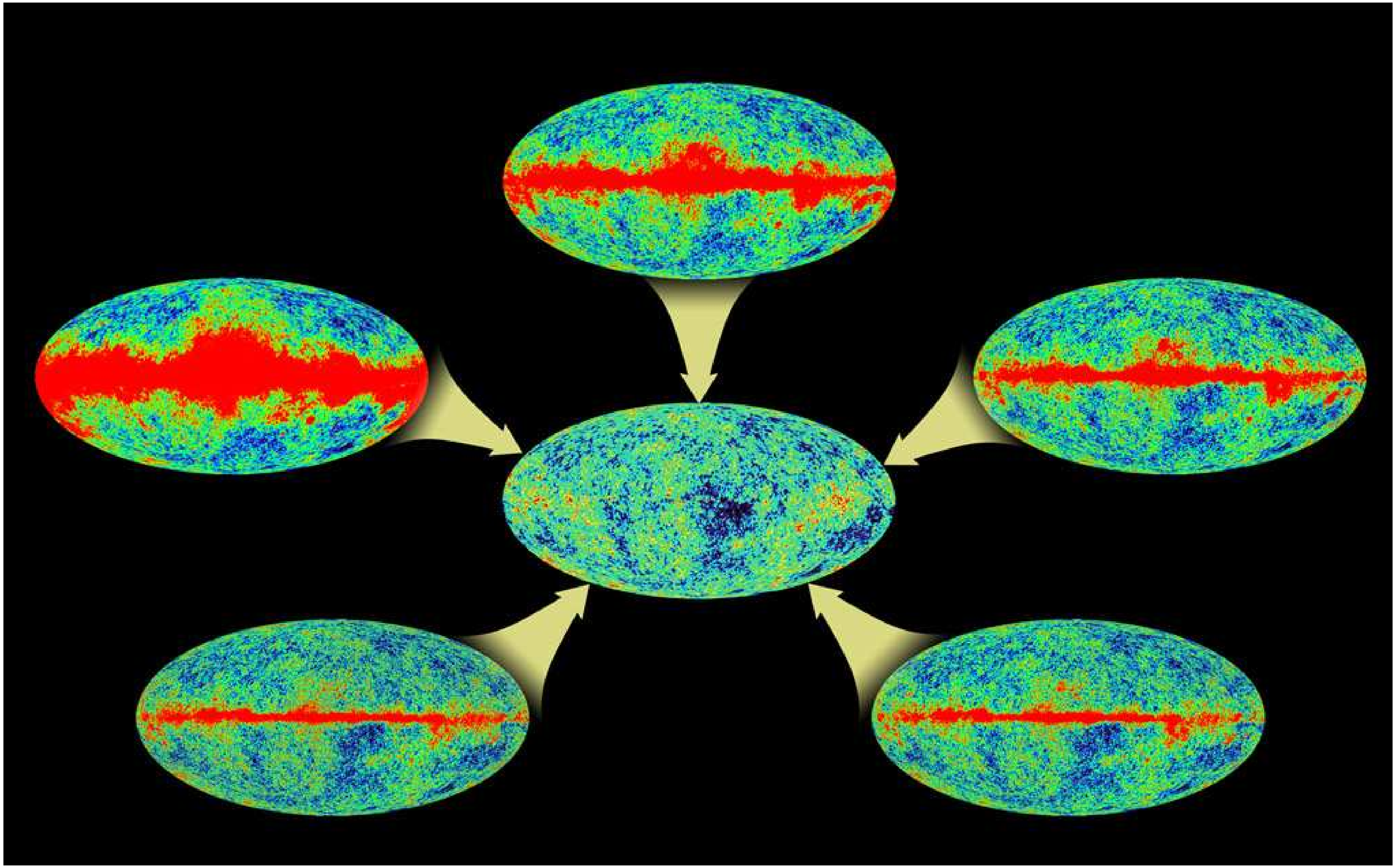
- ▷ Mikrowellenstrahlung erfüllt gesamten Himmel nahezu isotrop
- ▷ Schwarzkörperstrahlung mit Maximum bei $T = 2.725$ K
- ▷ 1948 vorhergesagt von George Gamow ($T = 5$ K)
- ▷ weitere Berechnungen 1950 von Alpher und Herman
- ▷ erste Beobachtung 1965 durch Penzias und Wilson, Bell Telephone Laboratories,New Jersey
- ▷ Deutung durch Dicke und Wilkinson
- ▷ zahlreiche Boden-, Ballon- und Satellitengestütze Forschungsmissionen, z.b. COBE und WMAP

CMB: Erforschung und Entdeckung



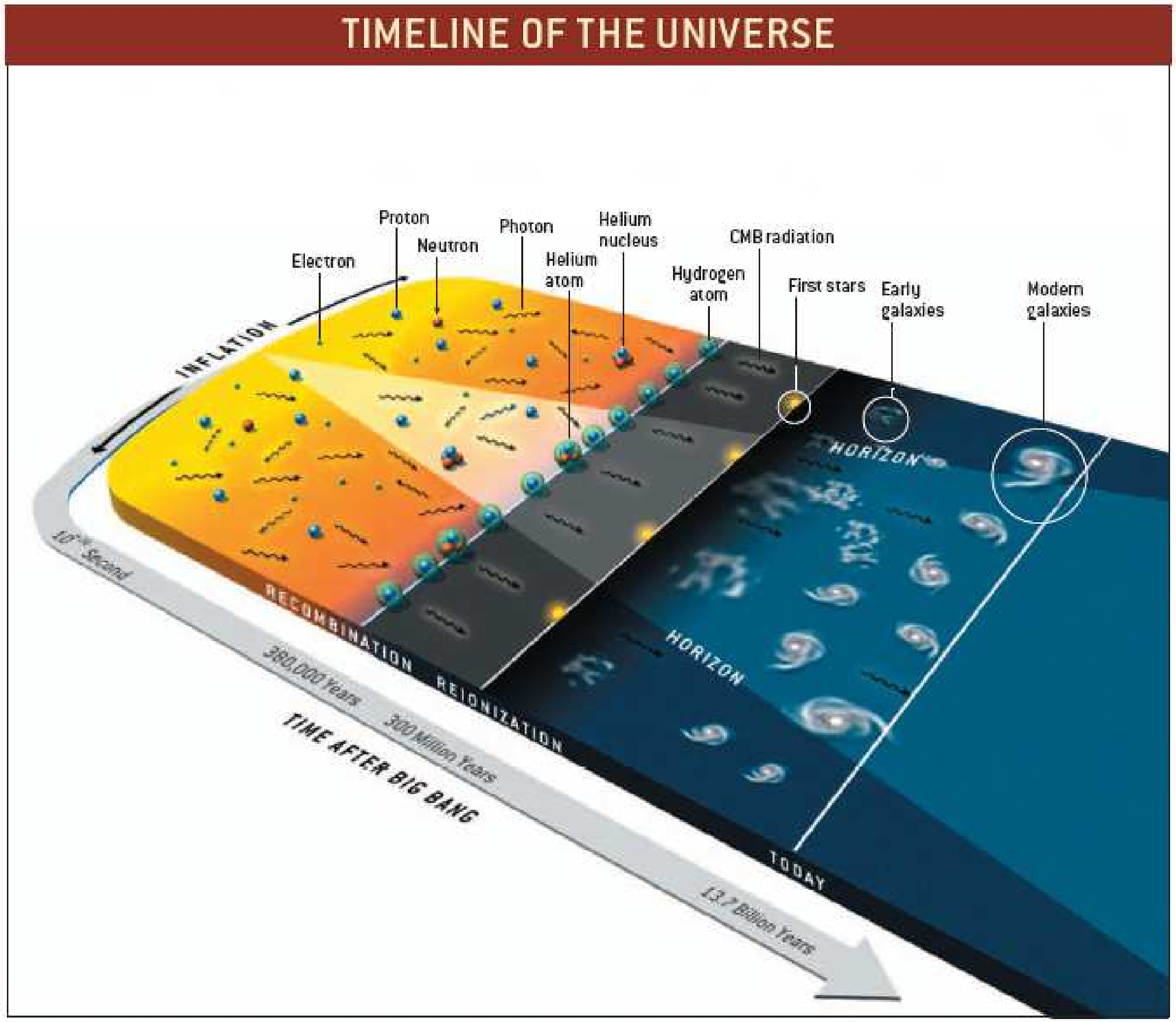
NASA/WMAP Science Team, map.gsfc.nasa.gov

CMB: WMAP data



NASA/WMAP Science Team, map.gsfc.nasa.gov

CMB: Entstehung



Wayne Hu, Martin White, Scientific American 02/04

CMB: Entstehung

- zu Beginn: heißes Plasma aus Protonen, Elektronen und Photonen

CMB: Entstehung

- zu Beginn: heißes Plasma aus Protonen, Elektronen und Photonen
- Entstehung von Wasserstoff wird durch Strahlung verhindert

CMB: Entstehung

- zu Beginn: heißes Plasma aus Protonen, Elektronen und Photonen
- Entstehung von Wasserstoff wird durch Strahlung verhindert
- Universum expandiert

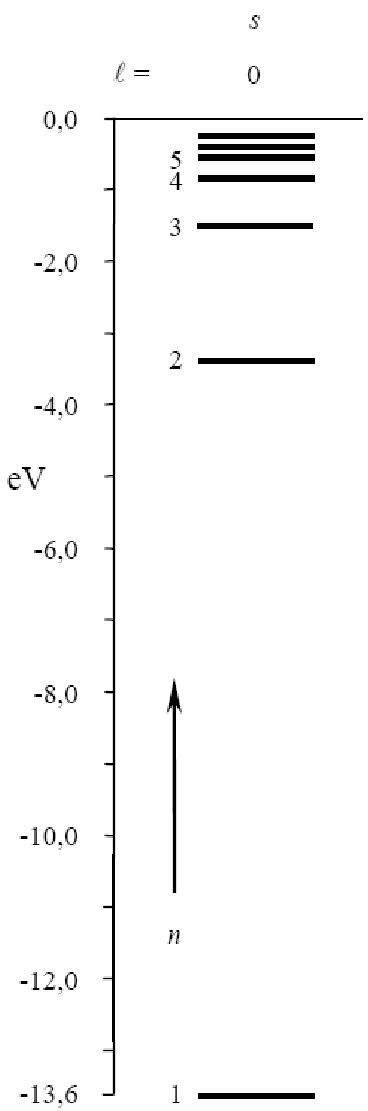
CMB: Entstehung

- zu Beginn: heißes Plasma aus Protonen, Elektronen und Photonen
- Entstehung von Wasserstoff wird durch Strahlung verhindert
- Universum expandiert
- Expansion streckt Photonenwellenlänge

CMB: Entstehung

- zu Beginn: heißes Plasma aus Protonen, Elektronen und Photonen
- Entstehung von Wasserstoff wird durch Strahlung verhindert
- Universum expandiert
- Expansion streckt Photonenwellenlänge
- Rekombination wird möglich

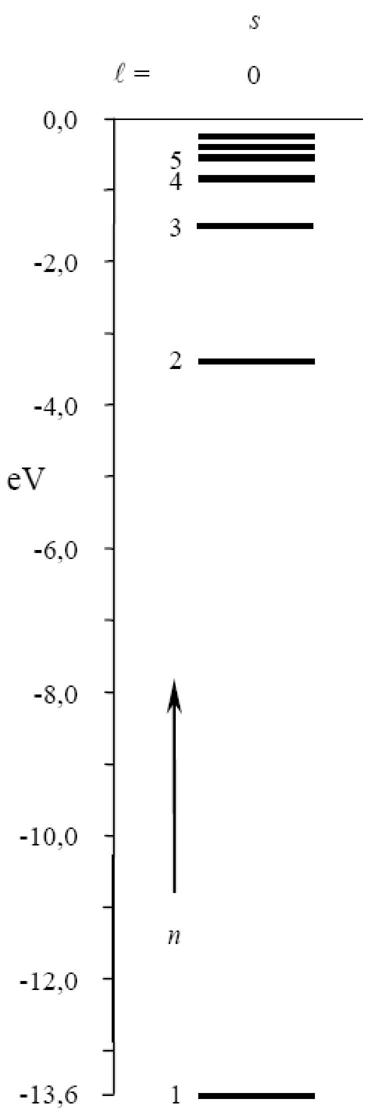
CMB: Entstehung



- kein Nettozuwachs durch Rekombination in den Grundzustand:

$$
\begin{aligned}
p + e^- &\longrightarrow H + \gamma \\
H + \gamma &\longrightarrow p + e^-
\end{aligned}
$$

CMB: Entstehung

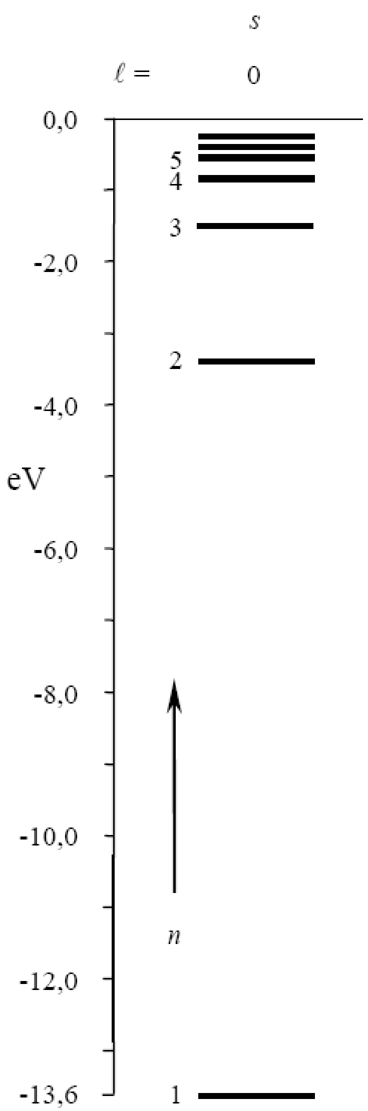


- kein Nettozuwachs durch Rekombination in den Grundzustand:

$$p + e^- \longrightarrow H + \gamma$$
$$H + \gamma \longrightarrow p + e^-$$

- Übergang von $2s$ zu $1s$ mit einem Photon verboten

CMB: Entstehung



- kein Nettozuwachs durch Rekombination in den Grundzustand:

$$\begin{aligned} p + e^- &\longrightarrow H + \gamma \\ H + \gamma &\longrightarrow p + e^- \end{aligned}$$

- Übergang von $2s$ zu $1s$ mit einem Photon verboten
- aber: 2-Photonprozess möglich:

$$H^{(2s)} \longrightarrow H^{(1s)} + 2\gamma$$

CMB: Entstehung

- Universum wird „durchsichtig“

CMB: Entstehung

- Universum wird „durchsichtig“
- surface of last scattering: 380 kyr nach dem Urknall

CMB: Entstehung

- Universum wird „durchsichtig“
- surface of last scattering: 380 kyr nach dem Urknall
- Photonen strömen wechselwirkungsfrei durch das All

$$\Rightarrow \text{CMB}$$

CMB: Anisotropien

- nahezu isotrope Mikrowellenstrahlung bei $T = 2.725$K
- aber: Temperaturfluktuationen im Bereich von $1 : 100000$
- Anisotropien sind auf verschiedenen Skalen unterschiedlich stark ausgeprägt
- interessant: Ursprung und räumliche Verteilung dieser Fluktuationen

CMB: Ursprung der Anisotropien

- betrachte Fluid aus Baryonen, Photonen, dunkler Energie und dunkler Materie vor der Rekombination

CMB: Ursprung der Anisotropien

- betrachte Fluid aus Baryonen, Photonen, dunkler Energie und dunkler Materie vor der Rekombination
- dunkle Materie krümmt die Raumzeit

CMB: Ursprung der Anisotropien

- betrachte Fluid aus Baryonen, Photonen, dunkler Energie und dunkler Materie vor der Rekombination
- dunkle Materie krümmt die Raumzeit
- Photonen sammeln sich in Potentialmulden

CMB: Ursprung der Anisotropien

- betrachte Fluid aus Baryonen, Photonen, dunkler Energie und dunkler Materie vor der Rekombination
- dunkle Materie krümmt die Raumzeit
- Photonen sammeln sich in Potentialmulden
- Gravitation vs. Strahlungsdruck

CMB: Ursprung der Anisotropien

- betrachte Fluid aus Baryonen, Photonen, dunkler Energie und dunkler Materie vor der Rekombination
- dunkle Materie krümmt die Raumzeit
- Photonen sammeln sich in Potentialmulden
- Gravitation vs. Strahlungsdruck
- volles Problem: relativistische Rechnung für Photonenverteilung

CMB: Ursprung der Anisotropien

- betrachte Fluid aus Baryonen, Photonen, dunkler Energie und dunkler Materie vor der Rekombination
- dunkle Materie krümmt die Raumzeit
- Photonen sammeln sich in Potentialmulden
- Gravitation vs. Strahlungsdruck
- volles Problem: relativistische Rechnung für Photonenverteilung
- Vereinfachung: betrachte lineare Pertubationen
  $\Rightarrow$ Pertubationen zerfallen in Normalmoden

CMB: akustische Oszillationen

konformale „Zeit“:

$$\eta = \int_0^t \frac{c}{a(t')} dt$$

Schallgeschwindigkeit:

$$c_S = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = \frac{c}{\sqrt{3(1+R)}}$$

wobei

$$R = \frac{3\rho_B}{4\rho_\gamma} = 3 \cdot 10^4 \, a \, \Omega_B \, h^2$$

„Baryon-Photon-Verhältnis“

CMB: akustische Oszillationen

- Temperaturfluktuationen $\theta_0 = \frac{\Delta T}{T}$
- einfache Bewegungsgleichung für Pertubationen:

$$\boxed{\ddot{\theta}_0 + k^2\, c_S^2\, \theta_0 \approx -k^2\, c^2\, \Psi - \ddot{\Phi}}$$

- getriebener harmonischer Oszillator mit
  - Ψ: Newtonsches Gravitationspotential
  - $\Phi = -\Psi$: Pertubationen in der Raumzeit
- letztlich: ebene Wellen

CMB: akustische Oszillationen

$$\ddot{\theta}_0 + k^2\, c_S^2\, \theta_0 \approx -k^2\, c^2\, \Psi - \ddot{\Phi}$$

Vereinfachungen:

- statisches Potential
- niedrige Baryonendichte: $c_S = \frac{c}{\sqrt{3}}$

Lösung unter geeigneten Anfangsbedingungen:

$$\theta_0(\eta) = \frac{1}{3}\Psi \cos(k c_s \eta) - \Psi$$

$\Rightarrow$ Fluid führt akustische Oszillationen aus

CMB: akustische Oszillationen

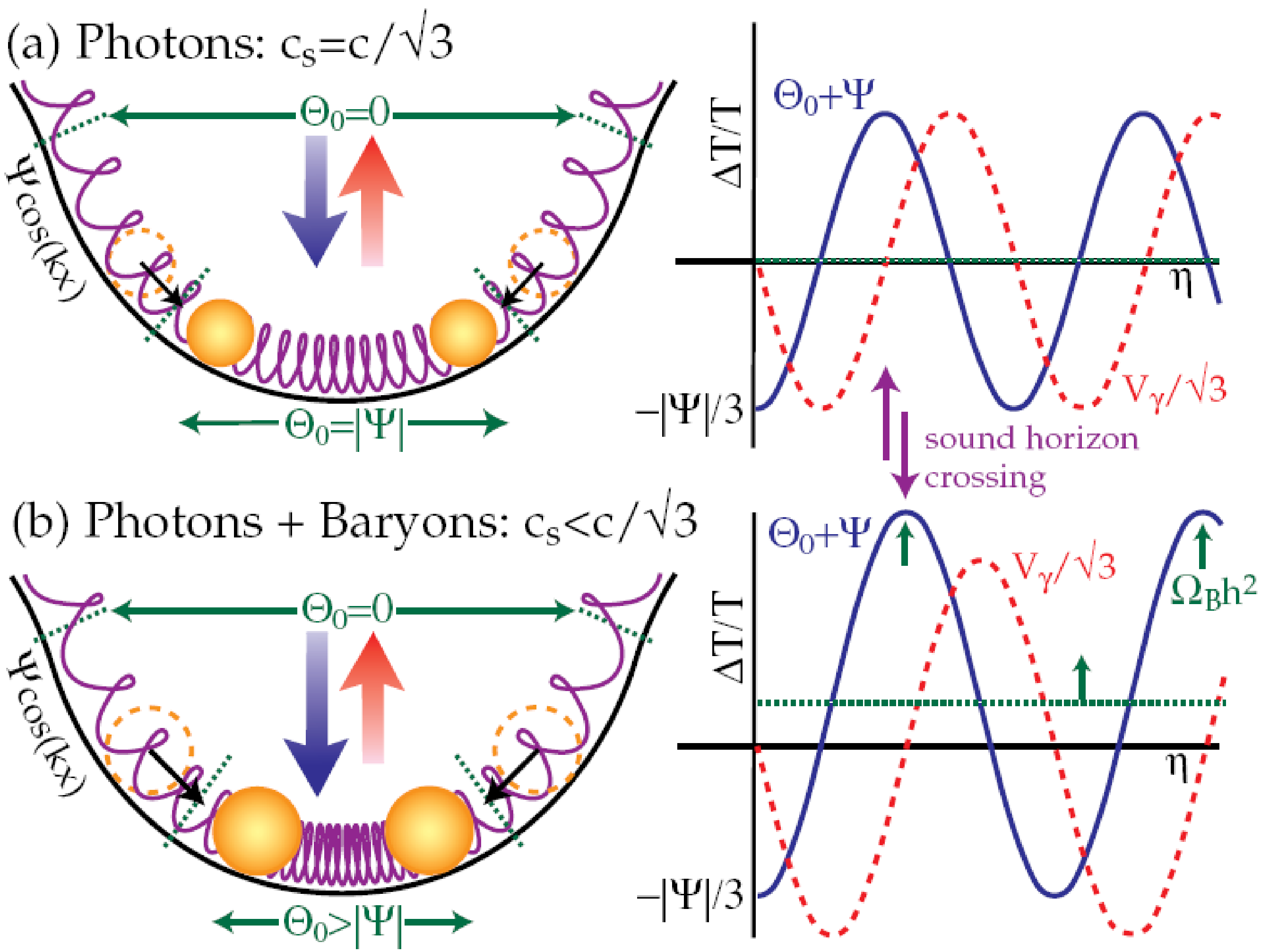
$$\theta_0(\eta) = \frac{1}{3}\Psi\cos(kc_s\eta) - \Psi$$

- surface of last scattering: η_*, Rekombination
- kritische Wellenlänge:

$$k = \frac{\pi}{c_s\eta_*}$$

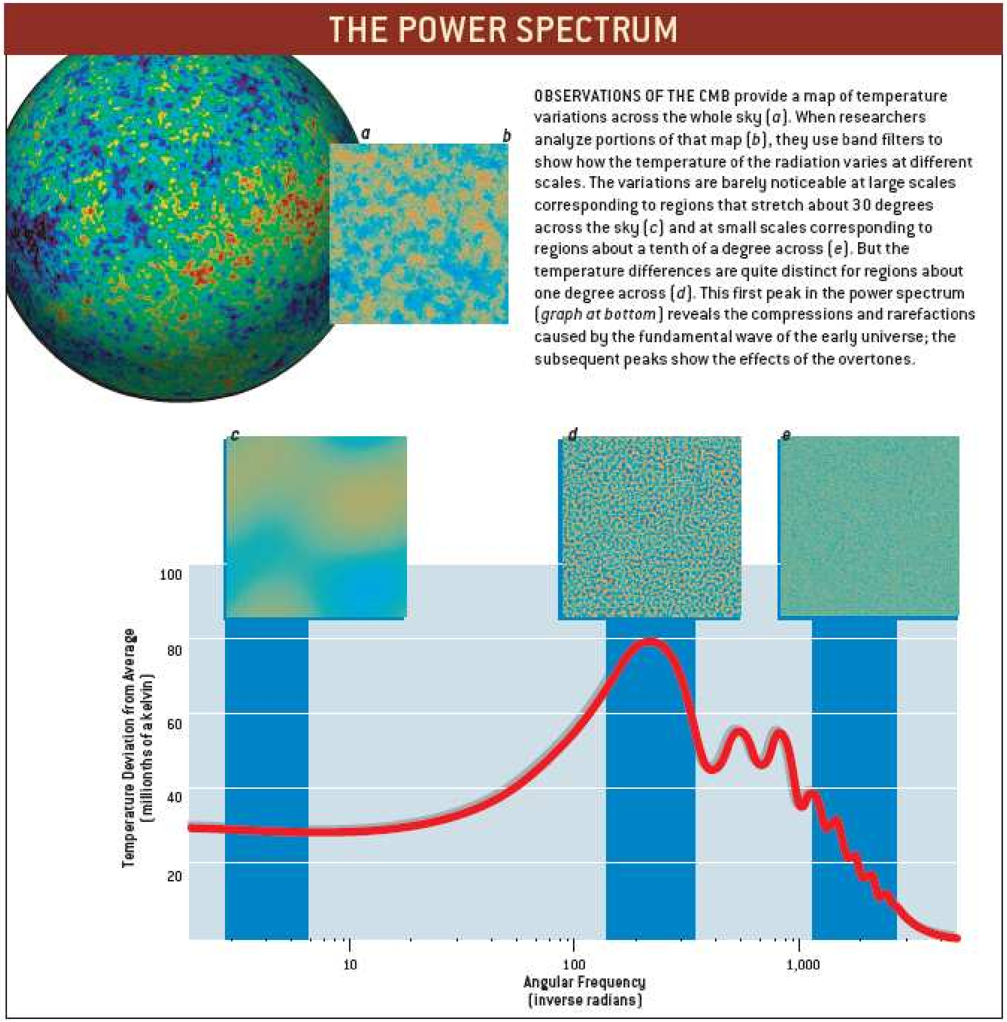
- Pertubationen mit größerer Wellenlänge unterdrückt
- Prozess friert durch Rekombination ein
- Oszillationen im CMB Spektrum sichtbar

CMB: akustische Oszillationen schematisch



Hu, Sugiyama, Silk, astro-ph/9504057

CMB: Powerspektrum



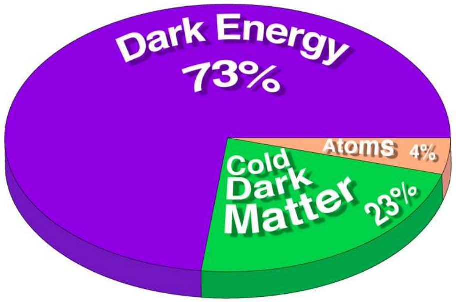
Wayne Hu, Martin White, Scientific American 02/04

CMB: Powerspektrum und kosmische Parameter

- CMB ist eine starke Stütze für Inflationstheorie

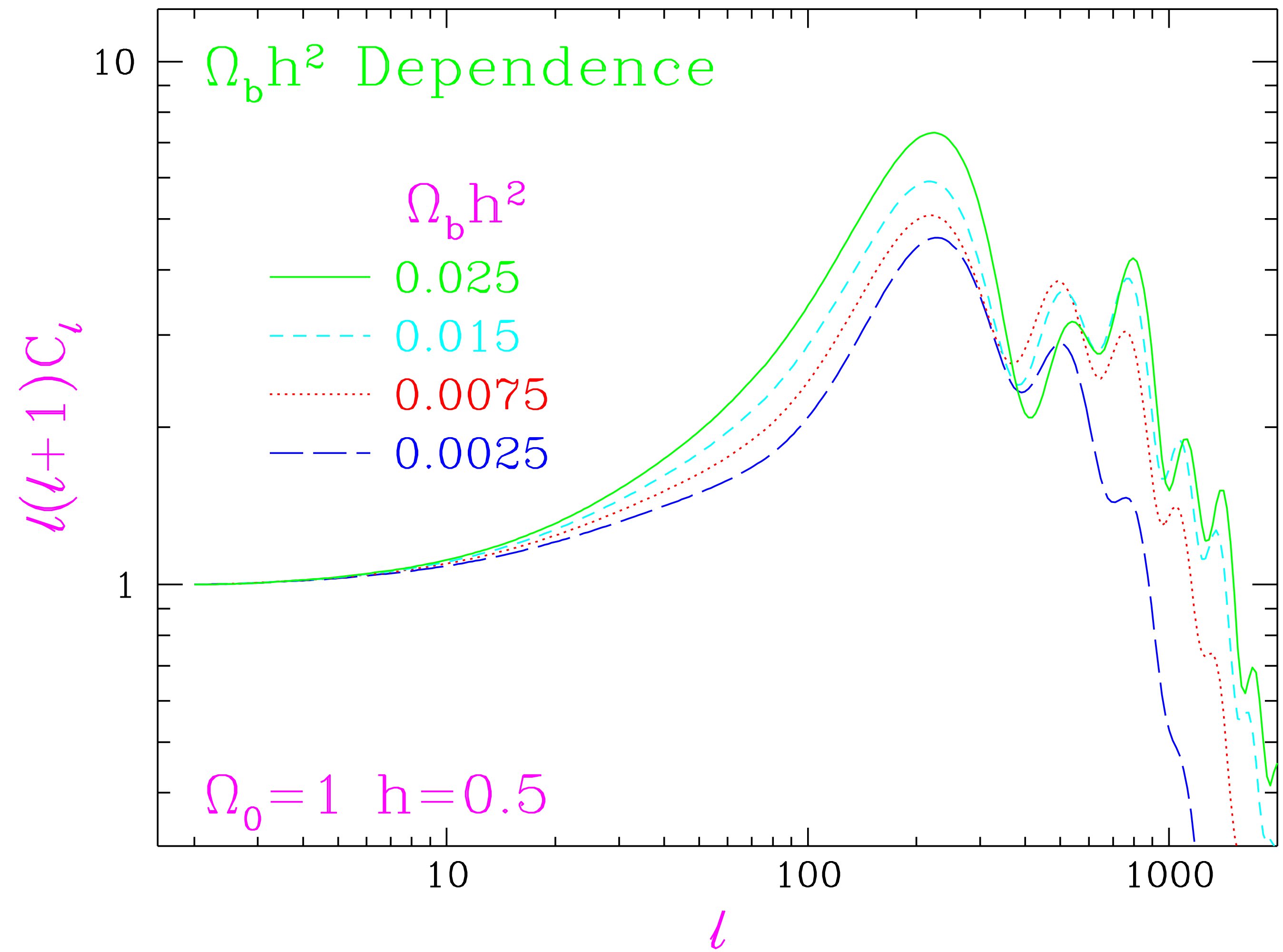
CMB: Powerspektrum und kosmische Parameter

- CMB ist eine starke Stütze für Inflationstheorie
- kosmische Parameter sind im Powerspektrum codiert, z.B.
  - Baryonendichte
  - Massendichte
  - Raumkrümmung
  - Zusammensetzung des Universums



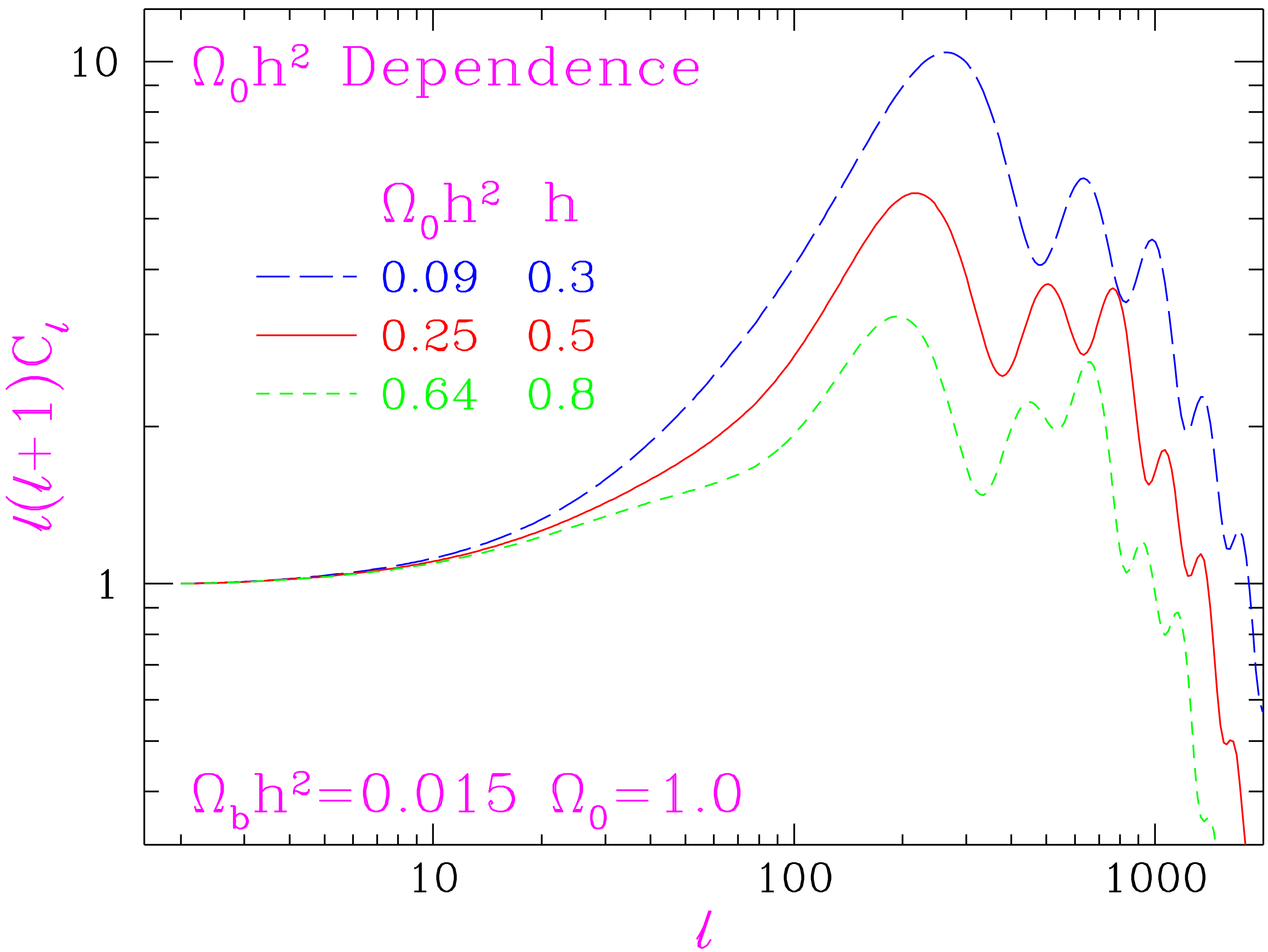
NASA/WMAP Science Team

CMB: Baryonendichte



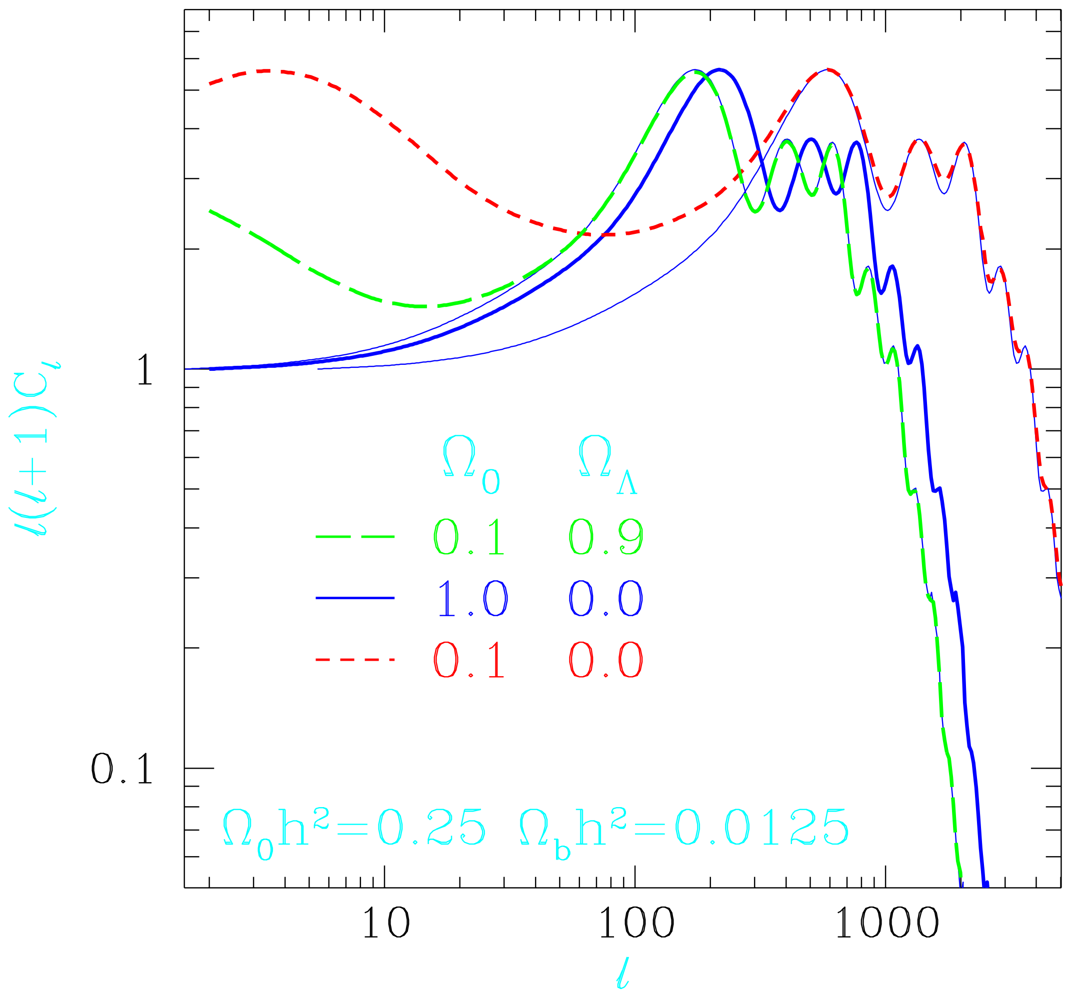
Wayne Hu, background.uchicago.edu

CMB: Massendichte



Wayne Hu, background.uchicago.edu

CMB: Raumzeitkrümmung



Wayne Hu, background.uchicago.edu

CMB und FPG: Motivation

- traditionelle Analysemethode: Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen

CMB und FPG: Motivation

- traditionelle Analysemethode: Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen
- Powerspektrum enthält nicht die gesamte Information

CMB und FPG: Motivation

- traditionelle Analysemethode: Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen
- Powerspektrum enthält nicht die gesamte Information
- alternativer Zugang: stochastische Analyse via FPG

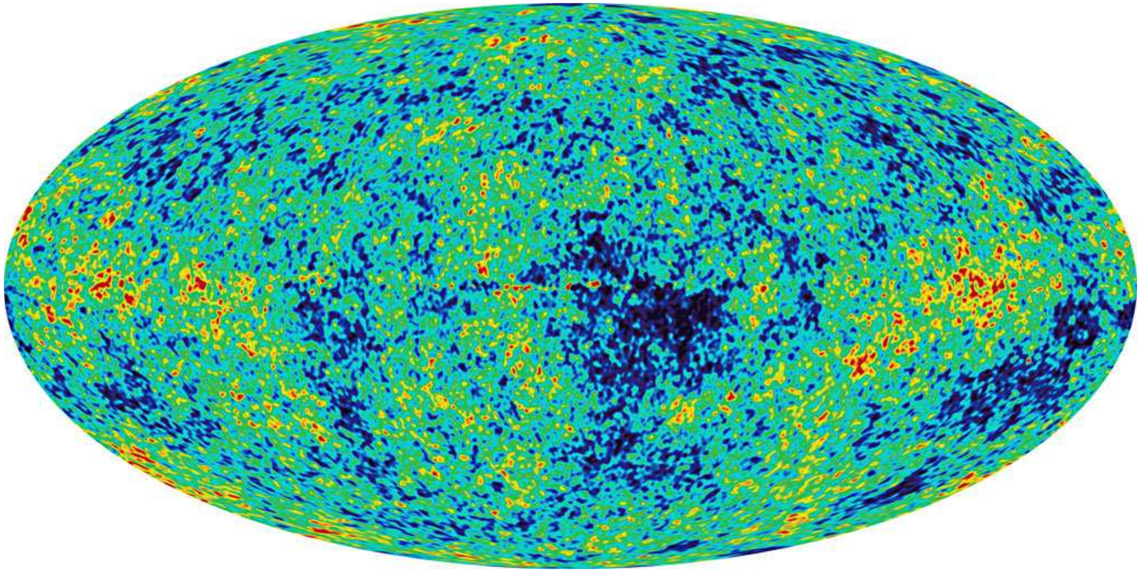
CMB und FPG: Motivation

- traditionelle Analysemethode: Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen
- Powerspektrum enthält nicht die gesamte Information
- alternativer Zugang: stochastische Analyse via FPG
- interessant: Verteilung der Temperaturinkremente

CMB und FPG: Motivation

- traditionelle Analysemethode: Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen
- Powerspektrum enthält nicht die gesamte Information
- alternativer Zugang: stochastische Analyse via FPG
- interessant: Verteilung der Temperaturinkremente
- Temperaturverteilung gaußsch, Verteilung der Inkremente zeigt Abweichungen

CMB und FPG: die Daten



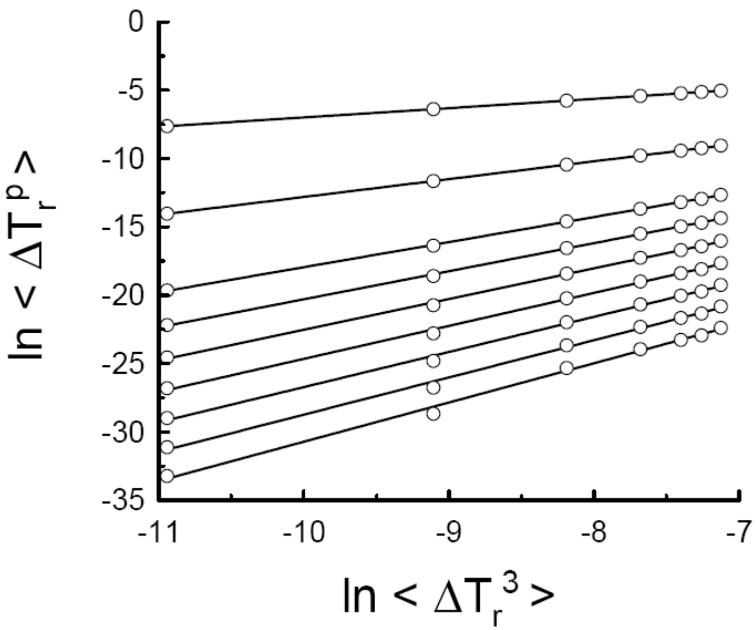
- gewichtete, gefilterte Linearkombination aus 5 Karten
- ca. $3 \cdot 10^6$ Pixel
- Auflösung ca. 1°, prinzipiell 0.2°

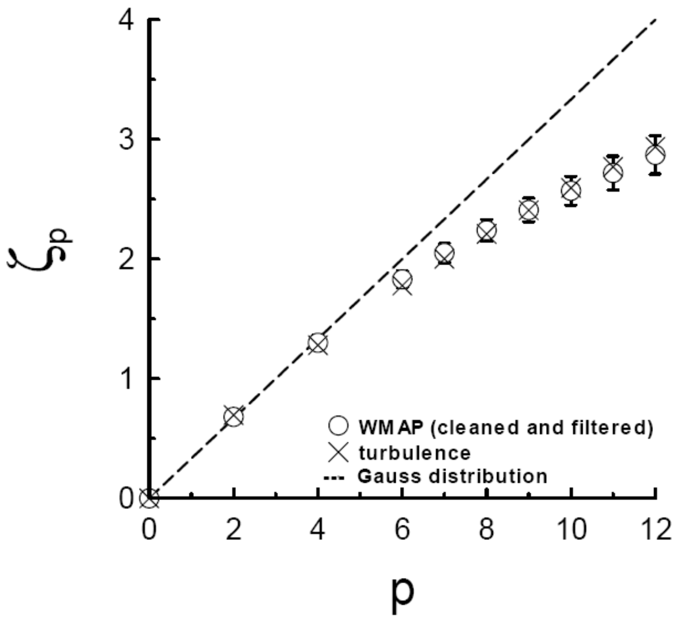
CMB: Abweichungen der Inkremente

betrachte Skalierungsverhalten

$$\langle |\Delta T_r|^p \rangle = \langle |\Delta T_r|^3 \rangle^{\zeta_p}$$

bei Gaußverteilung: $\zeta_p = \frac{p}{3}$



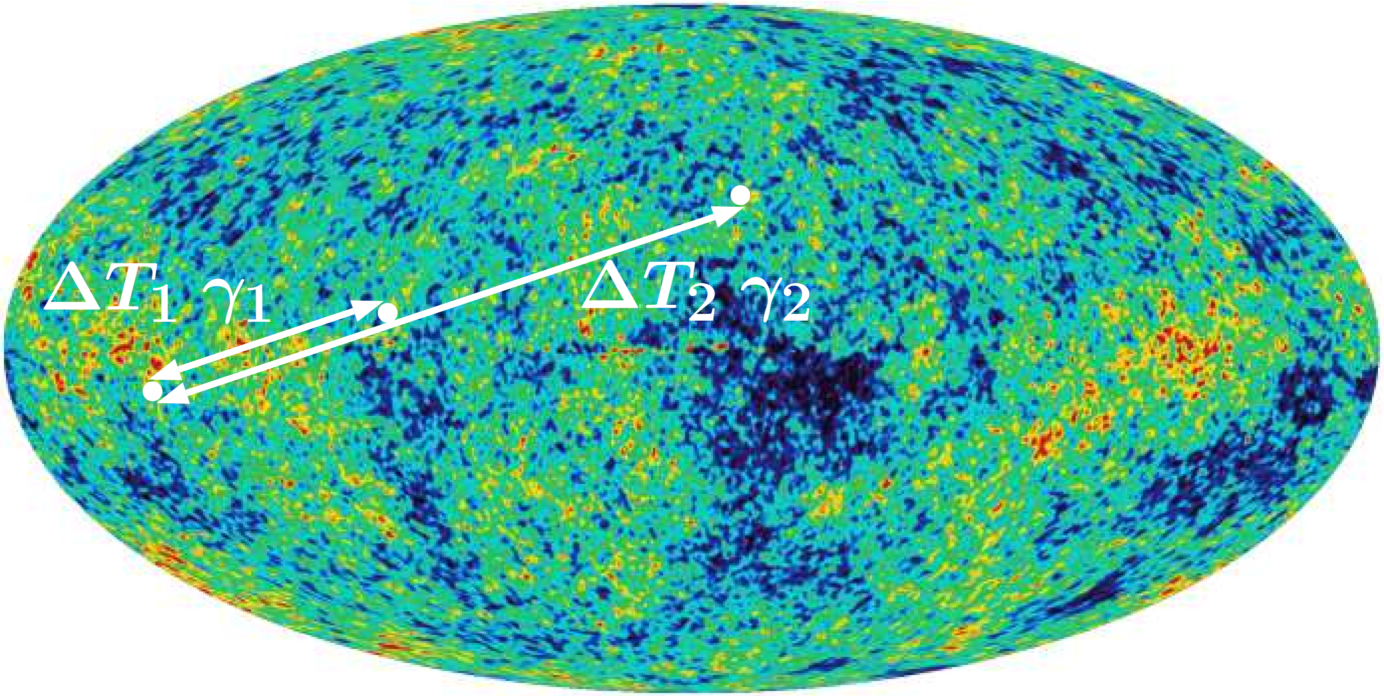


Sreenivasan et al.

CMB und FPG: das Ziel

- Evolutionsgleichung für Winkel und Temperaturfluktuationen
- Fokker-Planck Gleichung für $P(\Delta T, \gamma)$
- Drift- und Diffusionskoeffizienten aus den Daten schätzen
- bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\Delta T_2, \gamma_2 | \Delta T_1, \gamma_1)$

CMB und FPG: die Methode



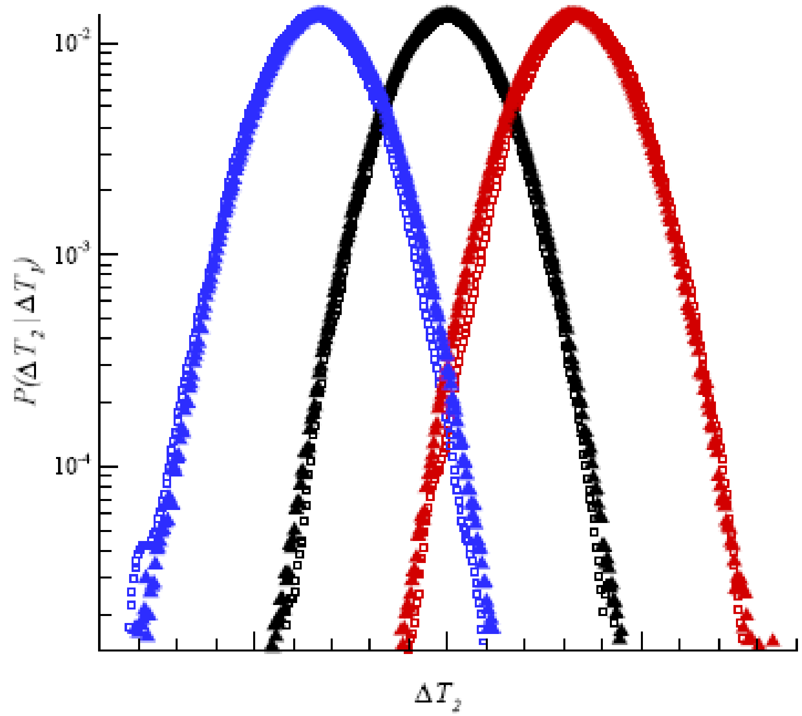
- erstelle bin mit $\Delta T_2, \gamma_2$ und $\Delta T_1, \gamma_1$
- berechne $P(\Delta T_2, \gamma_2 | \Delta T_1, \gamma_1)$

CMB und FPG: Chapman-Kolmogorov Gleichung

$$P(\Delta T_2, \gamma_2 | \Delta T_1, \gamma_1) = \int P(\Delta T_2, \gamma_2 | \Delta T_3, \gamma_3) P(\Delta T_3, \gamma_3 | \Delta T_1, \gamma_1) d\Delta T_3$$

CMB und FPG: Chapman-Kolmogorov Gleichung

$$P(\Delta T_2, \gamma_2 | \Delta T_1, \gamma_1) = \int P(\Delta T_2, \gamma_2 | \Delta T_3, \gamma_3) P(\Delta T_3, \gamma_3 | \Delta T_1, \gamma_1) d\Delta T_3$$



Ghasemi et al.:

$\Delta T_1 = -0.761$ mK $\gamma_1 = 8^\circ$

$\Delta T_1 = 0$ mK $\gamma_1 = 1^\circ$

$\Delta T_1 = 0.761$ mK $\gamma_1 = 3^\circ$

CMB und FPG: Koeffizienten

▷ nächstes Ziel: Drift- und Diffusionskoeffizienten schätzen

CMB und FPG: Koeffizienten

- nächstes Ziel: Drift- und Diffusionskoeffizienten schätzen
- Problem: kein reiner Markovprozess

CMB und FPG: Koeffizienten

- nächstes Ziel: Drift- und Diffusionskoeffizienten schätzen
- Problem: kein reiner Markovprozess
- Markoveigenschaft bricht bei endlichem Winkel zusammen

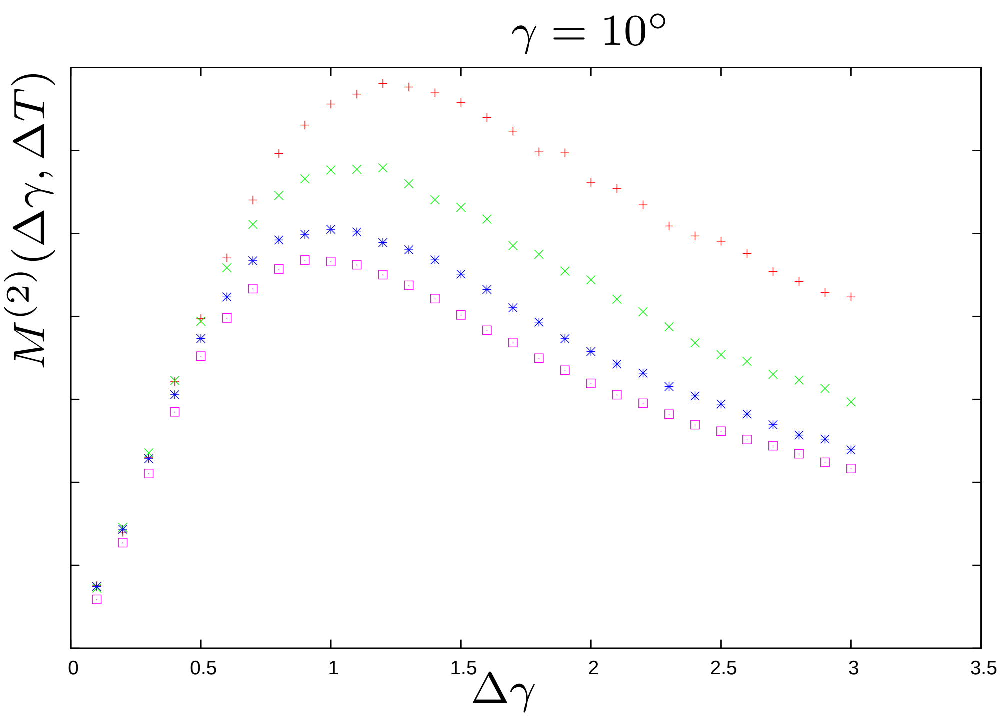
CMB und FPG: Koeffizienten

- nächstes Ziel: Drift- und Diffusionskoeffizienten schätzen
- Problem: kein reiner Markovprozess
- Markoveigenschaft bricht bei endlichem Winkel zusammen
- aber:

$$D^{(k)}(\Delta T, \gamma) = \frac{1}{k!} \lim_{\Delta\gamma \to 0} M^{(k)}$$

$$M^{(k)} = \frac{1}{\Delta\gamma} \int d\Delta T' (\Delta T' - \Delta T)^k P(\Delta T', \gamma + \Delta\gamma | \Delta T, \gamma)$$

CMB und FPG: Koeffizienten



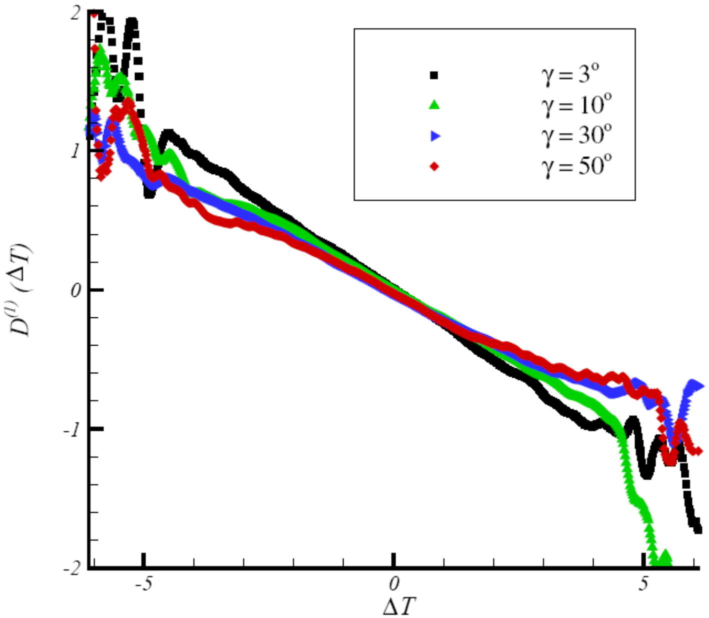
- Lösung: bestimme Markovwinkel
- extrapoliere zum Markovwinkel
- Ghasemi et al.: Markovwinkel entspricht dem Partikelhorizont

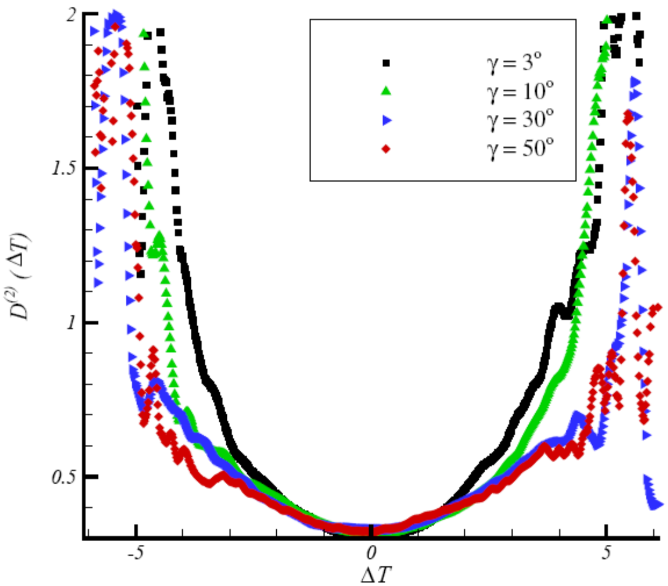
CMB und Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}P(\Delta T,\gamma) = \left(-\frac{\partial}{\partial\Delta T}D^{(1)}(\Delta T,\gamma) + \frac{\partial^2}{\partial\Delta T^2}D^{(2)}(\Delta T,\gamma)\right)P(\Delta T,\gamma)$$

CMB und Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}P(\Delta T,\gamma) = \left(-\frac{\partial}{\partial\Delta T}D^{(1)}(\Delta T,\gamma) + \frac{\partial^2}{\partial\Delta T^2}D^{(2)}(\Delta T,\gamma)\right)P(\Delta T,\gamma)$$





Ghasemi et al.

CMB und Fokker-Planck Gleichung

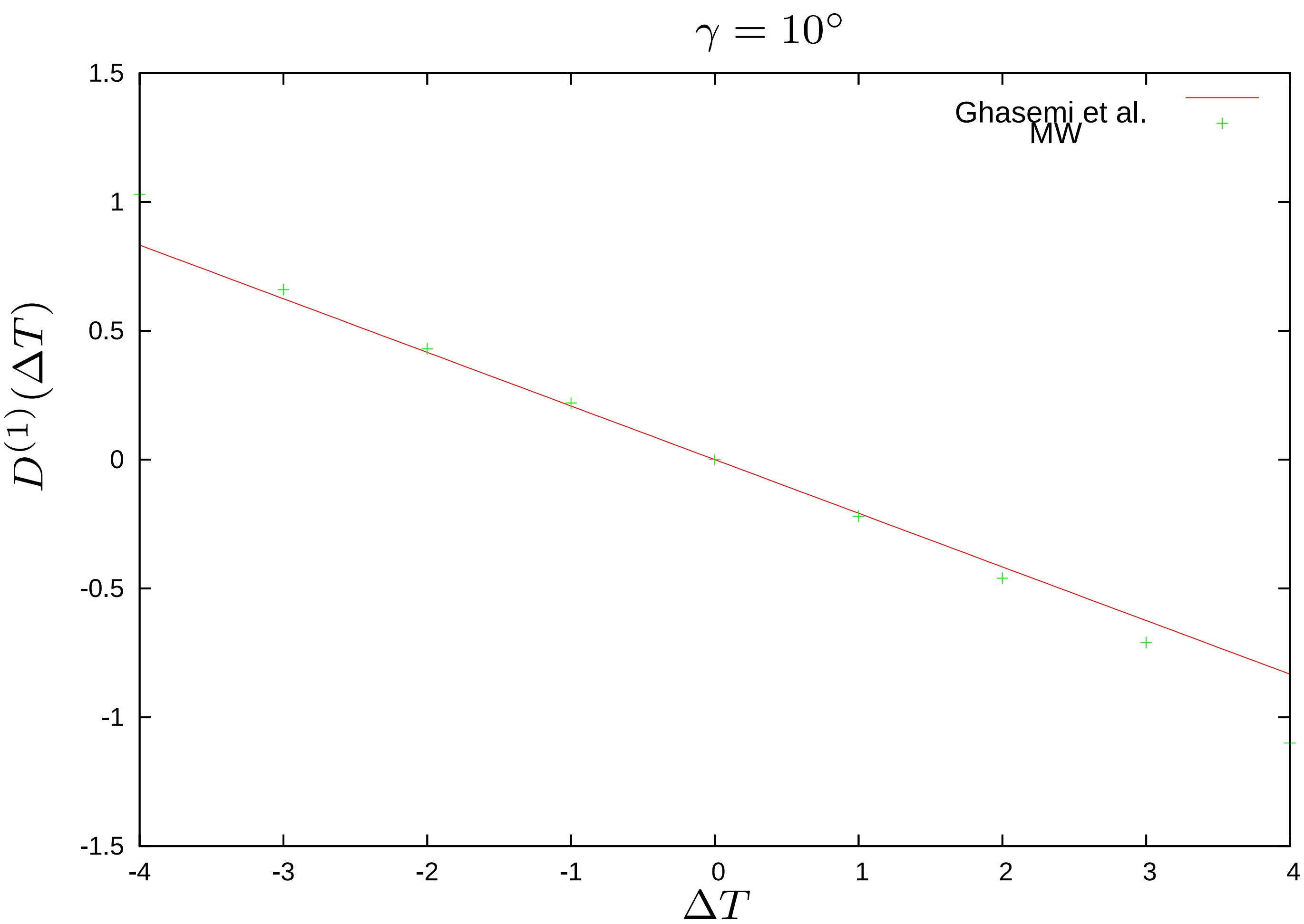
$$\frac{\partial}{\partial\gamma}P(\Delta T,\gamma) = \left(-\frac{\partial}{\partial\Delta T}D^{(1)}(\Delta T,\gamma) + \frac{\partial^2}{\partial\Delta T^2}D^{(2)}(\Delta T,\gamma)\right)P(\Delta T,\gamma)$$

Drift- und Diffusionskoeffizienten:

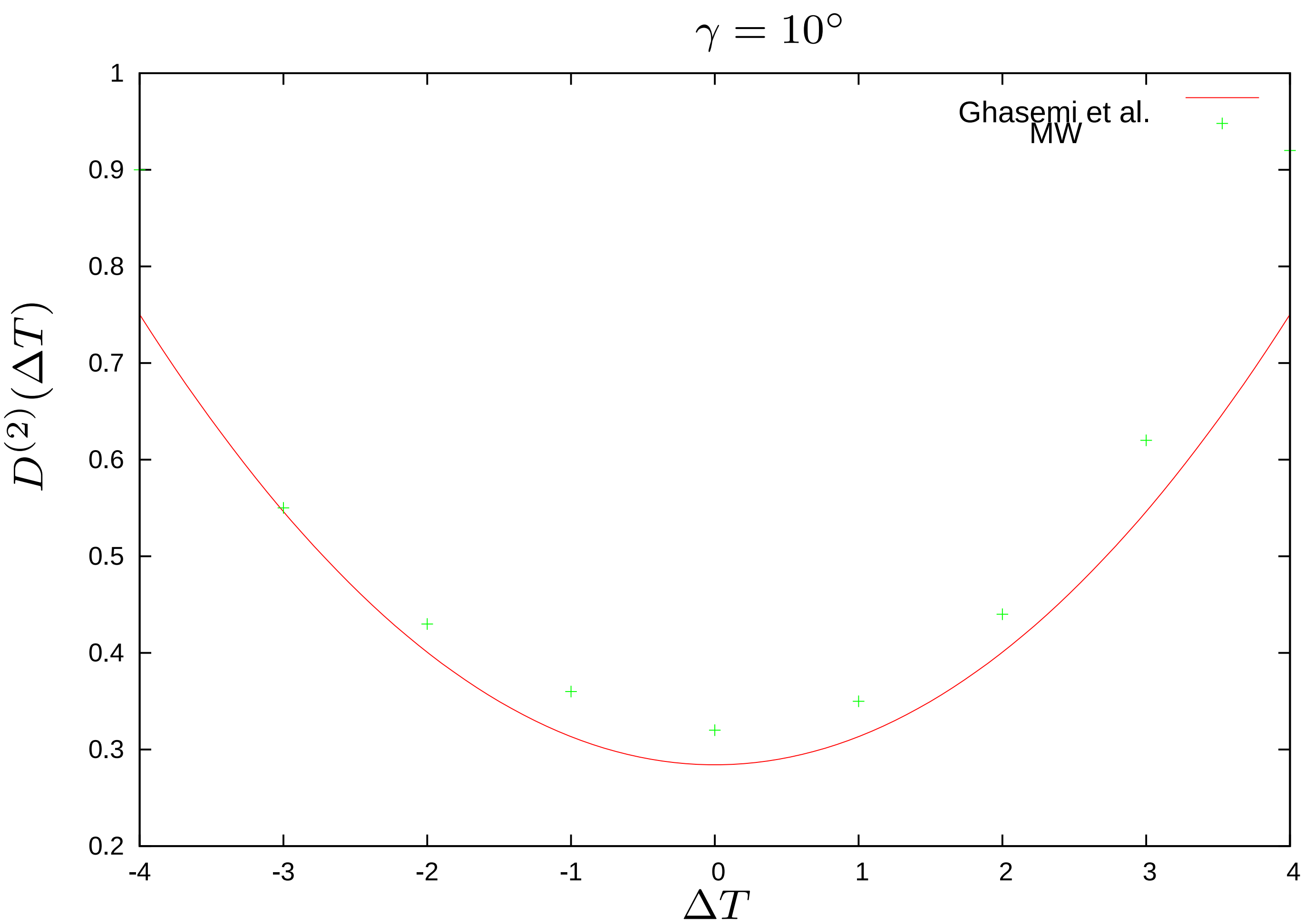
$$\begin{aligned} D^{(1)}(\Delta T,\gamma) &= (-0.190 - \frac{0.182}{\gamma})\Delta T \\ D^{(2)}(\Delta T,\gamma) &= (0.021 + 0.025\exp(-\frac{\gamma}{8.896}))\Delta T^2 + 0.279 + \frac{0.014}{\gamma^{0.429}} \end{aligned}$$

Ghasemi et al.

CMB und Fokker-Planck Gleichung: $D^{(1)}$



CMB und Fokker-Planck Gleichung: $D^{(2)}$



CMB und Fokker-Planck Gleichung

- CMB führt auf nichttriviale FPG

CMB und Fokker-Planck Gleichung

- CMB führt auf nichttriviale FPG
- (schwache) Abweichungen von Gaußverteilung

CMB und Fokker-Planck Gleichung

- CMB führt auf nichttriviale FPG
- (schwache) Abweichungen von Gaußverteilung
- zusätliche Information zum Powerspektrum gewonnen

CMB und Fokker-Planck Gleichung

- CMB führt auf nichttriviale FPG
- (schwache) Abweichungen von Gaußverteilung
- zusätliche Information zum Powerspektrum gewonnen
- Ziel: Verknüpfung von Statistik und Physik

CMB und FPG: Ausblick

- analog FPG für $P(T, \varphi)$

CMB und FPG: Ausblick

- analog FPG für $P(T,\varphi)$
- Äquivalenz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varphi}P(T,\varphi) &= \left(-\frac{\partial}{\partial T}D^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial T^2}D^{(2)}\right)P(T,\varphi)\\ \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial\varphi}T(\varphi) &= D^{(1)}(T) + \sqrt{D^{(2)}(T)}f(\varphi)\end{aligned}$$

- $f(\varphi)$ Langevin Kraft

CMB und FPG: Ausblick

- analog FPG für $P(T,\varphi)$
- Äquivalenz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varphi}P(T,\varphi) &= \left(-\frac{\partial}{\partial T}D^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial T^2}D^{(2)}\right)P(T,\varphi)\\ \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial\varphi}T(\varphi) &= D^{(1)}(T)+\sqrt{D^{(2)}(T)}f(\varphi)\end{aligned}$$

- $f(\varphi)$ Langevin Kraft
- Möglichkeit zur Reproduktion einer Karte mit ähnlichen statistischen Eigenschaften

CMB und FPG: Ausblick

- analog FPG für $P(T, \varphi)$
- Äquivalenz:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \varphi} P(T, \varphi) &= \left(-\frac{\partial}{\partial T} D^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial T^2} D^{(2)} \right) P(T, \varphi) \\
\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} T(\varphi) &= D^{(1)}(T) + \sqrt{D^{(2)}(T)} f(\varphi)
\end{aligned}
$$

- $f(\varphi)$ Langevin Kraft
- Möglichkeit zur Reproduktion einer Karte mit ähnlichen statistischen Eigenschaften
- Zusammenhang: Drift-/Diffusionskoeffizienten mit c_l

Referenzen

[1] H. Risken, „The Fokker-Planck Equation“, Springer, Berlin, 1984
[2] W. Hu, M. White, „The Cosmic Symphony“, Scientific American, 02/04
[3] D. Scott, G.F. Smoot, arXiv: astro-ph/0406567 v1, 24.6.2004
[4] W. Hu et al., arXiv: astro-ph/9504057, 18.4.1995
[5] NASA/WMAP Science Team, map.gsfc.nasa,gov
[6] W. Hu, background.uchicago.edu
[7] A. Bershadskii, K.R. Sreenivasan, arXiv: astro-ph/0311444 v1, 19.11.2003
[8] F. Ghasemi et al., arXiv: astro-ph/031227 v1, 9.12.2003