

# Effektive Feldtheorie

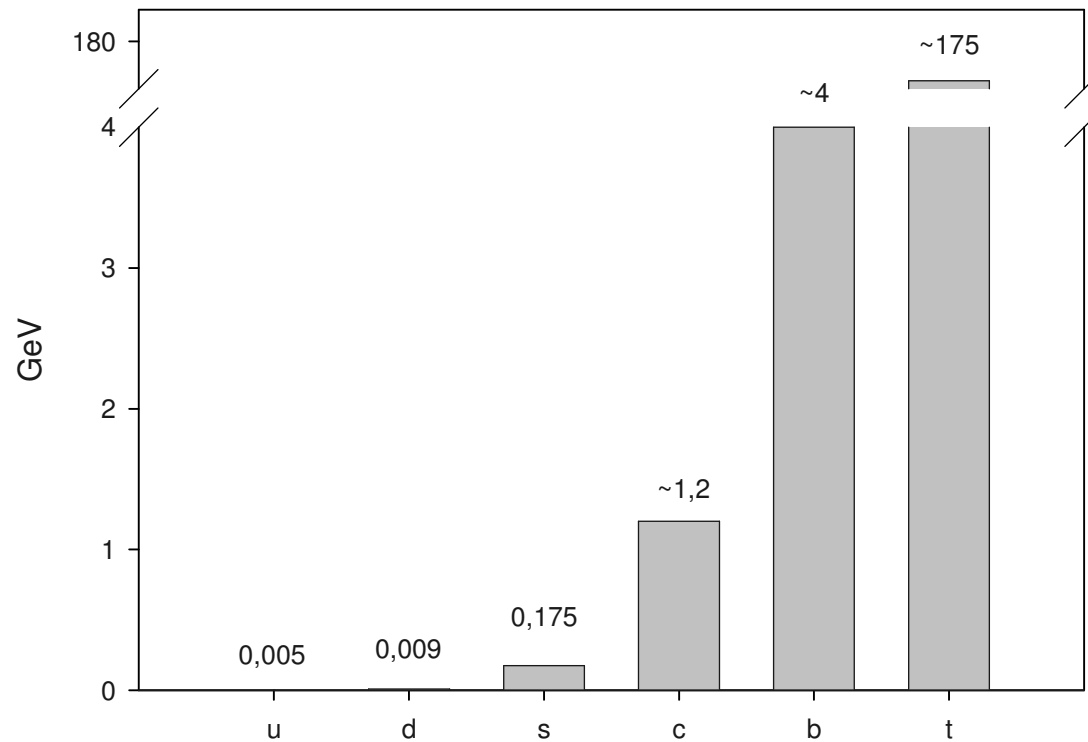
28. Juni 2005

Peter Hofmann

# 1 Grundlagen

- ▶ typische Situation :

Existenz mehrerer weit voneinander entfernter Energieskalen



## 1.1 Ziele

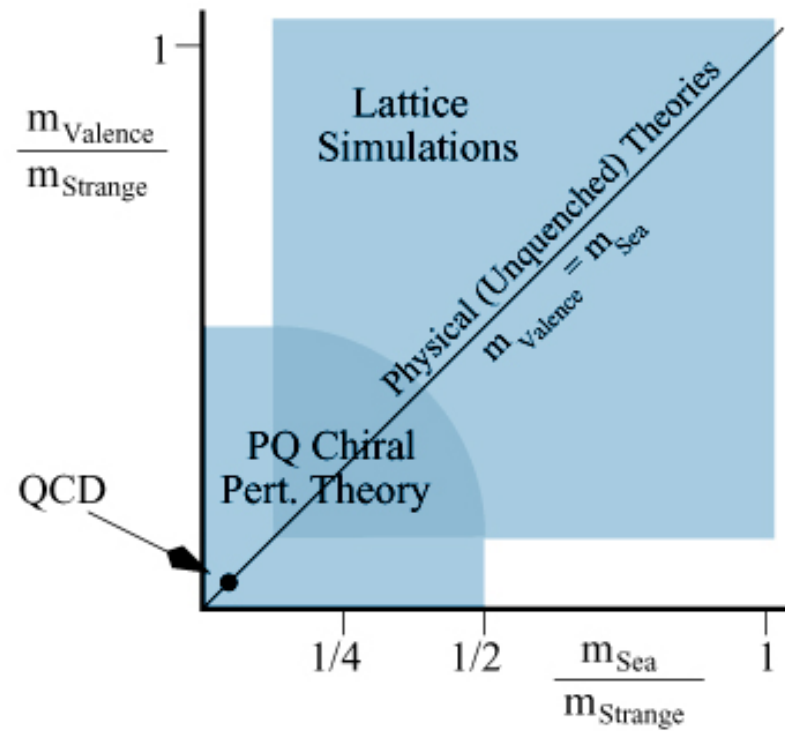
- ▶ Isolation der eigentlich interessanten Phänomene
- ▶ Beschreibung durch eine effektive Feldtheorie
  - Konzentration auf die **wichtigen** physikalischen Prozesse
  - Berücksichtigung **geeigneter** Freiheitsgrade

## 1.2 Wozu braucht man effektive Feldtheorien ?

- ▶ Die Verwendung einer EFT ist häufig nicht notwendig aber :
  - Erhebliche Vereinfachung der Beschreibung eines Prozesses durch Konzentration auf die wichtigsten Aspekte
  
- ▶ Beispiel QCD bei niedrigen Energien :
  - Probleme der QCD :
    - nichtabelsche Symmetrie, Confinement
  - relevante Freiheitsgrade :
    - Pionen
  - Lösung : chirale Störungstheorie

## 1.3 Einschränkungen von EFT's

- ▶ nur innerhalb eines begrenzten Energiebereichs gültig
- ▶ Beispiel PQ $\chi$ PT, Quelle : S.Sharpe arXiv:hep-lat/0310012



## 1.4 Beispiele für EFT's

- ▶ Fermi Theorie für die schwache Wechselwirkung
- ▶ Euler-Heisenberg Theorie für die Photon-Photon Streuung
- ▶ Heavy-Quark Effective Theory (HQET)
- ▶ Nichtrelativistische QCD (NRQCD)
- ▶ BCS
- ▶ (Standardmodell)
- ▶ (Allgemeine Relativitätstheorie)
- ▶ ...

## 1.5 Euler-Heisenberg Theorie

- ▶ Gültig für  $E_\gamma \ll m_e$
- ▶ Symmetrien :  $U(1)$ , Lorentz Invarianz, Paritätserhaltung
- ▶ Allgemeinste Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{a}{m_e^4}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 + \frac{b}{m_e^4}F^{\mu\nu}F_{\nu\sigma}F^{\sigma\rho}F_{\rho\mu} + \mathcal{O}(F^6/m_e^8)$$

- ▶ Bestimmung von  $a$  und  $b$ 
  - Experimentell
  - Berechnung eines Prozesses mit  $\mathcal{L}_{eff}$  und exakt in der vollen QED

$$a = -\frac{\alpha^2}{36}, \quad b = \frac{7\alpha^2}{90}$$

## 2 Konstruktion von EFT's

### 2.1 Allgemeine Prinzipien

- ▶ Die Dynamik bei niedrigen Energien (großen Längenskalen) hängt nicht von der Dynamik bei hohen Energien (kleinen Längenskalen) ab.
- ▶ Im Fall sehr großer Energiedifferenzen :

$$0 \leftarrow m \ll E \ll M \rightarrow \infty$$

- ▶ Ersetzung nichtlokaler WW durch eine Summe lokaler (nichtrenormierbarer) WW



- ▶ Entwicklung nach Potenzen von

$$\frac{E}{M}$$

- ▶ Die EFT beschreibt die Niederenergiephysik bis zur gewünschten Präzision :

$$\delta \approx \left( \frac{E}{M} \right)^d$$

- ▶ Die Hochenergiephysik bestimmt nur die Größe der Niederenergie Kopplungen und der Symmetrien der EFT.

## 2.2 Bottom Up (Weinberg)

- ▶ Konstruktion aufgrund von **Symmetrieprinzipien**
- ▶ grundlegende Theorie braucht nicht bekannt zu sein
- ▶ „Theorem“ von Steven Weinberg (1979) :  
*„if one writes down the most general possible Lagrangian, including **all** terms consistent with assumed symmetry principles, and then calculates S-matrix elements with this Lagrangian to any order of perturbation theory, the result will simply be the most general S-matrix consistent with analyticity, perturbative unitarity, cluster decomposition and the assumed symmetry principles” [1]*

- ▶ Konstruktionsprinzip einer EFT für Impulse  $p < \Lambda$ :
  1. Identifikation der relevanten Freiheitsgrade und Symmetrien des Problems.
  2. Konstruktion der allgemeinsten Lagrangedichte mit den geforderten Symmetrien.
  3. Sortierung der Terme in  $\mathcal{L}$  nach ihrer Impulsdimension (power counting)
  4. Bestimmung der Niederenergiekoeffizienten (Matching)
- ▶ Anwendung der Standardmethoden der Quantenfeldtheorie auf  $\mathcal{L}$

## 2.3 Top Down (Wilson)

- ▶ Ausgangspunkt fundamentale Theorie
- ▶ Identifikation des interessanten Energiebereiches und der relevanten Freiheitsgrade
- ▶ Ausintegration schwerer Freiheitsgrade (Teilchen) der fundamentalen Theorie (mit Masse  $M$ )
- ▶ Operatorproduktentwicklung der nichtlokalen Wechselwirkung
- ▶ Matching
  - bei  $\mu = M$  müssen die S-Matrix Elemente der leichten Teilchen in beiden Theorien übereinstimmen
- ▶ power counting

- ▶ **Ausintegration** der schweren Felder im Funktionalintegral

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_L \int \mathcal{D}\phi_H e^{i \int d^D x \mathcal{L}(\phi_L, \phi_H)} = \int \mathcal{D}\phi_L e^{i \int d^D x \mathcal{L}_{eff}(\phi_L)}$$

- ▶ Die Effektive Lagrangedichte ist definiert durch

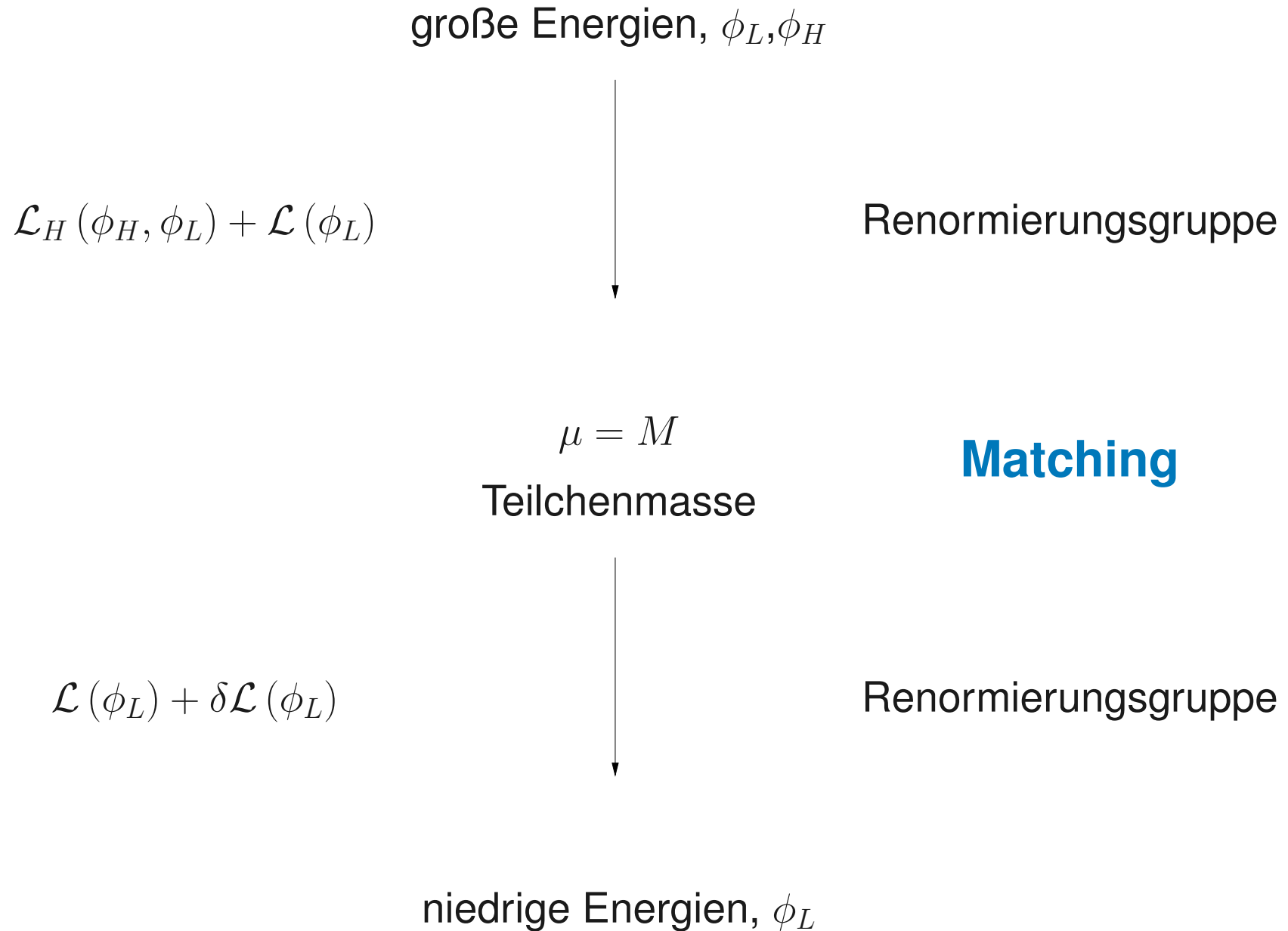
$$\int d^D x \mathcal{L}_{eff}(\phi_L) = -i \ln \int \mathcal{D}\phi_H e^{i \int d^D x \mathcal{L}(\phi_L, \phi_H)}$$

- ▶ Reihendarstellung der nichtlokalen WW durch

**lokale Operatoren**  $O_i(\phi_L)$

$$\int d^D x \mathcal{L}_{eff}(\phi_L) \equiv \int d^D x \sum_i c_i O_i(\phi_L)$$

## 2.4 Hierarchie von EFT's



# 3 Chirale Störungstheorie

## 3.1 Chirale Symmetrie in der QCD

- ▶ euklidische QCD-Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{q}_f (\gamma_\mu D_\mu + \mathbf{m}) q_f + \frac{1}{4} (F_a^{\mu\nu})^2$$

- ▶ chirale Symmetrie im Grenzfall  $\mathbf{m} = 0$ ,
- ▶ Beschränkung auf die drei leichtesten Flavours (u,d,s)

$$\mathcal{L}^l = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f \gamma_\mu D_\mu q_f + \frac{1}{4} (F_a^{\mu\nu})^2$$

- ▶ Projektoren  $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$  und  $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$

$$q_{f,R} = P_R q_f \quad \text{und} \quad \bar{q}_{f,R} = \bar{q}_f P_L$$

$$q_{f,L} = P_L q_f \quad \text{und} \quad \bar{q}_{f,L} = \bar{q}_f P_R$$

- ▶ Vollständige Entkopplung der links- und rechtshändigen Anteile von  $\mathcal{L}^l$

$$\mathcal{L}^l = \sum_{f=u,d,s} \{ \bar{q}_{f,R} \gamma_\mu D_\mu q_{f,R} + \bar{q}_{f,L} \gamma_\mu D_\mu q_{f,L} \} + \frac{1}{4} (F_a^{\mu\nu})^2$$

- ▶ Spontane Brechung der chiralen Symmetrie :

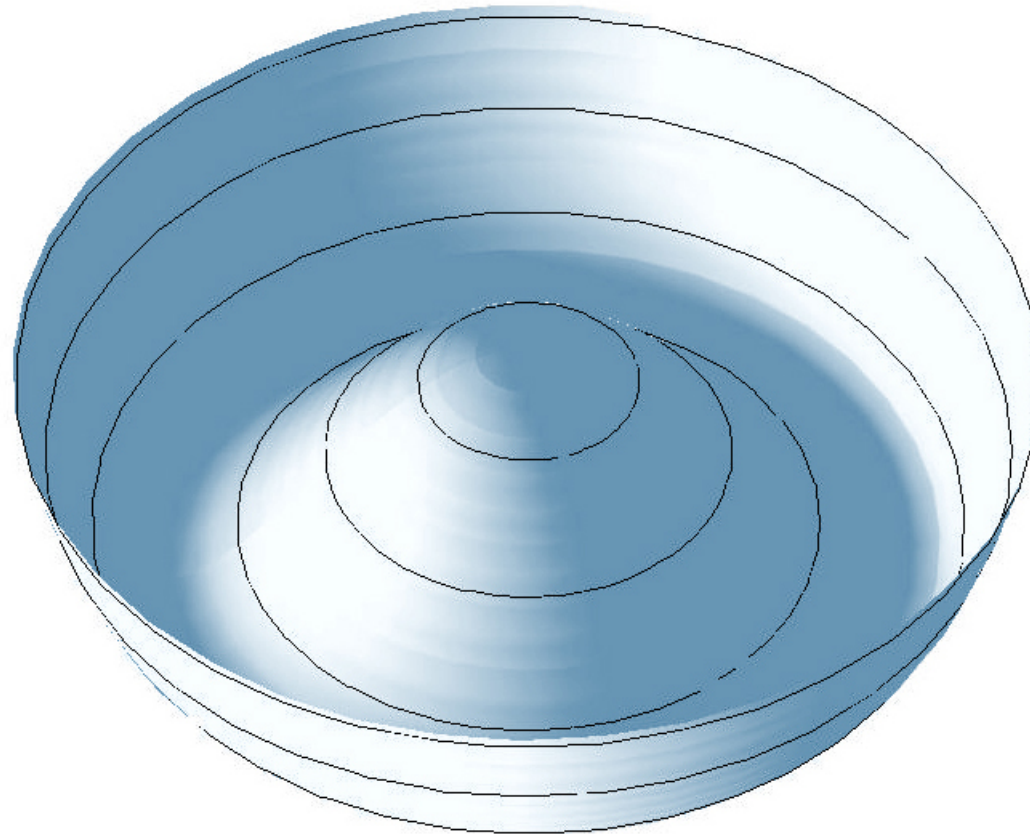
$$G \equiv SU(3) \otimes SU(3) \rightarrow H \equiv SU(3)_V$$

- ▶ Das Vakuum ist nur invariant unter der Symmetriegruppe  $H$



## 3.2 Goldstone Theorem

- ▶ 8 masselose Goldstonebosonen  $\phi^a$ ,  $a \in \{1, \dots, 8\}$  im Raum der Nebengruppe  $G/H$



- ▶ Darstellung der Nebengruppe  $u(\phi) \equiv (u_L(\phi), u_R(\phi)) \in G$
- ▶ Chirale Transformation  $g \equiv (g_L, g_R) \in G$  mit  $h(\phi, g) \in H$

$$u_L \rightarrow g_L u_L(\phi) h^\dagger(\phi, g), \quad u_R \rightarrow g_R u_R(\phi) h^\dagger(\phi, g)$$

- ▶ Die Matrix der Goldstonebosonenfelder ist invariant unter chiralen Transformationen

$$U(\phi) \equiv u_R(\phi) u_L(\phi), \quad \text{mit} \quad U(\phi) \rightarrow g_R U(\phi) g_L^\dagger$$

### 3.3 Relevante Freiheitsgrade

- ▶ Typische Parametrisierung

$$U(\phi) \equiv \exp\left(\frac{i}{F_0}\phi^a\lambda^a\right)$$

- ▶ Allgemeinste chiral invariante Lagrangedichte ( $U^\dagger U = 1$ )

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \dots$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4}\text{Tr}(\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) + \dots$$

- ▶ Power Counting :

$$U = \mathcal{O}(p^0), \quad \partial_\mu U = \mathcal{O}(p)$$

## 3.4 Loop-Beiträge und Power Counting

- ▶ Beliebiger Prozess mit externen Impulsen und Energien von der Größenordnung  $Q < \Lambda_{QCD}$
- ▶ Chirale Dimension eines Diagramms

$$\mathcal{A} = \int (d^4p)^L \frac{1}{(p^2)^I} \prod_i (p^{d_i})^{V_i}$$

$$D = \sum_i V_i d_i - 2I + 4L$$

- ▶ Für jede Divergenz existiert ein Gegenterm in  $\mathcal{L}$
- ▶ Endliches Resultat in jeder Ordnung von  $D$

## 3.5 Explizite Symmetriebrechung

1. Quarkmassen  $\mathbf{m} \neq 0$  : für  $N_f = 2$  kleine Störung für  $\mathbf{m} \approx 0$

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}^0 + \sum_f \bar{q}_f \mathbf{m} q_f$$

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}$$

2. Elektroschwache Wechselwirkung kann störungstheoretisch behandelt werden.
3. Gittereffekte kleine Störung für  $a \approx 0$

## 3.6 Analogie zum Ferromagneten

- ▶ Vergleich mit Heisenberg Ferromagnet :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \sum_a \mu \vec{\mathbf{S}}_a \cdot \vec{H}$$

- ▶  $\mathbf{H}_0$  invariant unter  $O(3)$
- ▶ Symmetriebrechung durch externes Feld  $\vec{H}$
- ▶  $\mathbf{m}$  entspricht externem Feld  $\vec{H}$
- ▶ Quarkkondensat  $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$  entspricht der (spontanen  $\vec{H} = 0$ ) Magnetisierung

## 3.7 Massenterm

- ▶  $\mathcal{L}_{QCD}$  wäre invariant unter chiralen Transformationen

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}^0 + \sum_f \bar{q}_f \mathbf{m} q_f$$

falls

$$\mathbf{m} \rightarrow u_R \mathbf{m} u_L^\dagger$$

- ▶ Konstruktion der allgemeinsten chiral invarianten Lagrangedichte mit

$$U, \quad \partial_\mu U, \quad \mathbf{m}$$

- ▶ Power Counting mit  $\mathbf{m} = \mathcal{O}(p^2)$ ,  $U = \mathcal{O}(p^0)$  und  $\partial_\mu U = \mathcal{O}(p)$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger) + \frac{F_0^2}{4} 2B_0 \text{Tr} (\mathbf{m} U^\dagger + U \mathbf{m})$$

### 3.8 Symanzik Improvement und Gittereffekte

- ▶ Impuls cut-off  $p = \frac{\pi}{a}$  als neue Energieskala
- ▶ Effektive Kontinuums-Theorie mit  $S_0 \equiv S_{QCD}$

$$S_{eff} = S_0 + a S_1 + a^2 S_2 + \dots$$

- ▶ Der Pauli Term

$$a S_1 = a c_{SW} \bar{q} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} q$$

transformiert sich unter chiralen Transformationen genauso,  
wie der Massenterm

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger) + \frac{F_0^2}{4} B_0 \text{Tr} (\mathbf{m} U^\dagger + U \mathbf{m}) + \frac{F_0^2}{4} 2W_0 c_{SW} a \text{Tr} (U^\dagger + U)$$



## 4 Bestimmung der LEC's

- Lagrangedichte der Chiralen Störungstheorie bis  $\mathcal{O}(p^4)$

$$\chi = 2B_0 \mathbf{m}, \quad \rho = 2W_0 a$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle \\ & - L_1 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle^2 - L_2 \langle \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \rangle^2 - L_3 \langle (\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger)^2 \rangle \\ & + L_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle + W_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle \\ & + L_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \rangle + W_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger (\rho U^\dagger + U \rho^\dagger) \rangle \\ & - L_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle^2 - W_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle - W'_6 \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle^2 \\ & - L_7 \langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \rangle^2 - W_7 \langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \rangle \langle \rho U^\dagger - U \rho^\dagger \rangle - W'_7 \langle \rho U^\dagger - U \rho^\dagger \rangle^2 \\ & - L_8 \langle \chi U^\dagger \chi U^\dagger + U \chi^\dagger U \chi^\dagger \rangle - W_8 \langle \chi U^\dagger \rho U^\dagger + U \rho^\dagger U \chi^\dagger \rangle \\ & - W'_8 \langle \rho U^\dagger \rho U^\dagger + U \rho^\dagger U \rho^\dagger \rangle \end{aligned}$$

## 4.1 Experimentelle Bestimmung der LEC's

LEC	Wert $\cdot 10^{-3}$	Quelle
$L_1^r$	$0,65 \pm 0,28$	$\pi\pi$ -Streuung
$L_2^r$	$1,90 \pm 0,26$	und
$L_3^r$	$-3,06 \pm 0,92$	$K \rightarrow \pi\pi l\nu$
$L_4^r$	$0 \pm 0,5$	$N_c \rightarrow \infty$
$L_5^r$	$2,3 \pm 0,2$	$F_k/F_\pi$
$L_6^r$	$0 \pm 0,3$	$N_c \rightarrow \infty$
$L_7^r$	$-0,4 \pm 0,15$	$\eta - \eta'$ Mischung
$L_8^r$	$1,1 \pm 0,3$	$M_K^2/M_\pi^2, L_5^r$

Quelle : „*Effective Lagrangians for the Standard Model*“, Springer 1997

## 4.2 Gitter QCD Simulationen

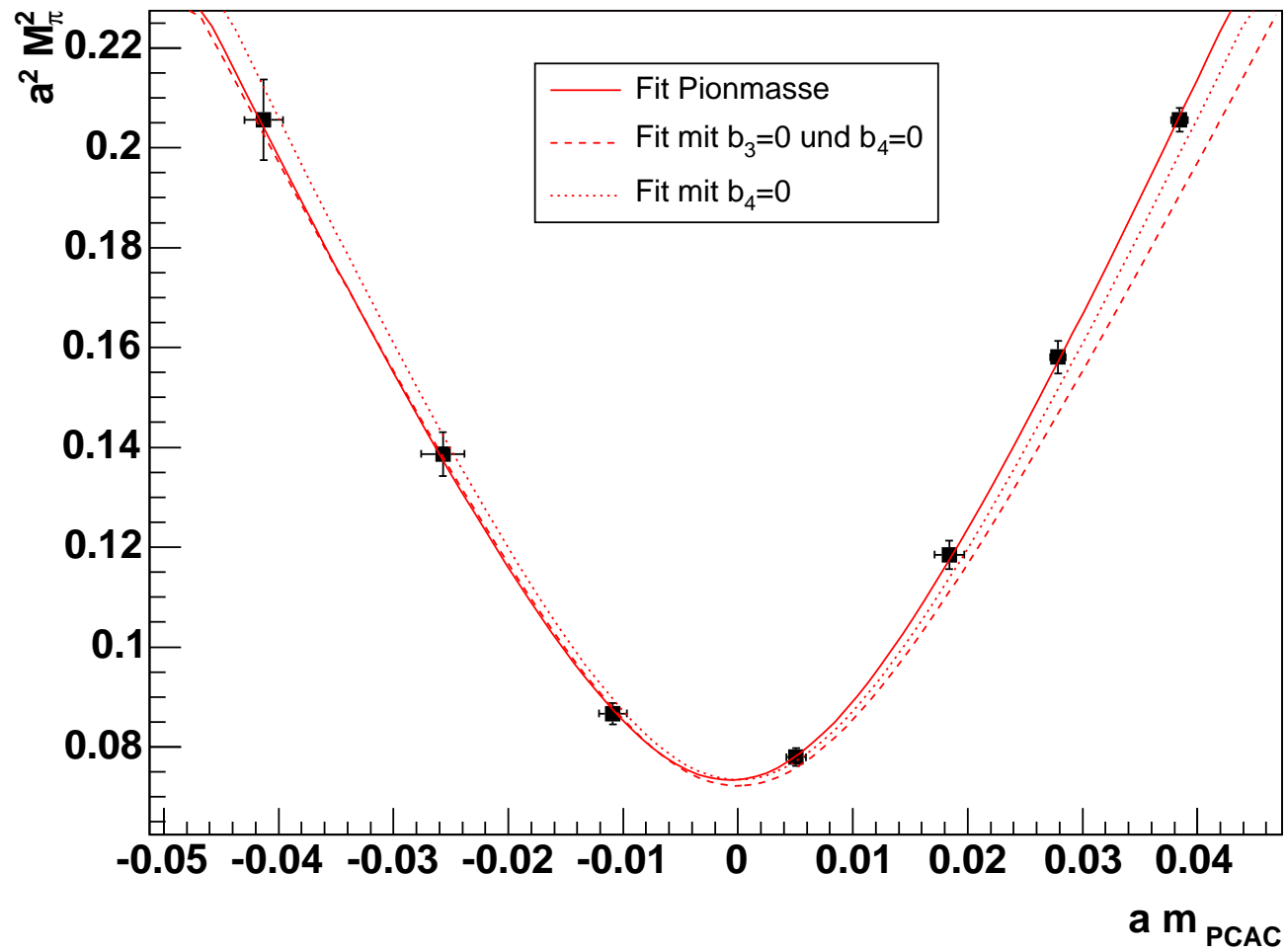
### ► Pionmasse in $tm\chi$ PT

$$m_{\pi\pm}^2 = \bar{\chi} + \frac{1}{32\pi^2 F_0^2} \bar{\chi}^2 \ln \frac{\bar{\chi}}{\Lambda^2} + \frac{8}{F_0^2} (-L_{45} + 2L_{68}) \bar{\chi}^2 \\ + \frac{8}{F_0^2} (L_{45} - W_{45} - 2L_{68} + W_{68}) \chi_{PCAC} \rho$$

### ► Pionzerfallskonstante in $tm\chi$ PT

$$\frac{F_\pi}{F_0} = 1 - \frac{1}{16\pi^2 F_0^2} \bar{\chi} \ln \frac{\bar{\chi}}{\Lambda^2} + \frac{4}{F_0^2} \left\{ L_{45} \bar{\chi} + (-L_{45} + W_{45}) \rho \frac{\chi_{PCAC}}{\bar{\chi}} \right\}$$

# Pion Massenquadrate



$$(a m_\pi)^2 [a m_{PCAC}] = b_2 \sqrt{a^2 m_{PCAC}^2 + b_1} + b_3 (a^2 m_{PCAC}^2 + b_1) + b_4 a m_{PCAC}$$

$$b_1 = (a\mu)^2 Z^2$$

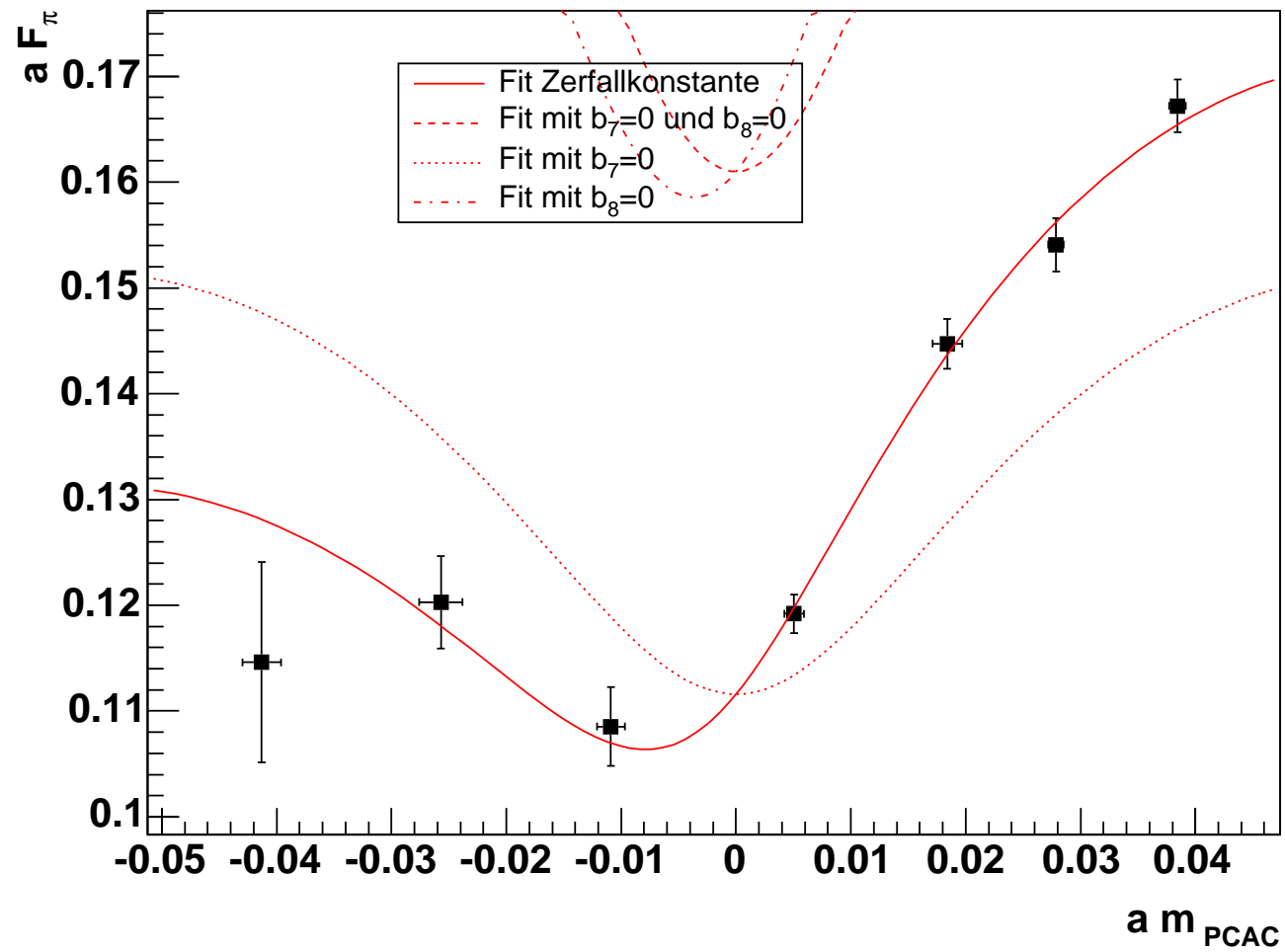
$$b_2 = Z' a^2 = 2 B_0 a$$

$$b_3 = \frac{8}{F_0^2} (-L_{45} + 2L_{68}) Z'^2 a^2 = \frac{32 B_0^2}{F_0^2} (-L_{45} + 2L_{68})$$

$$\begin{aligned} b_4 &= \frac{8}{F_0^2} (L_{45} - W_{45} - 2L_{68} + W_{68}) \rho Z' a^2 \\ &= \frac{32 W_0 B_0}{F_0^2} (L_{45} - W_{45} - 2L_{68} + W_{68}) a^2 \end{aligned}$$

	Fitparameter
$b_1$	$0.000248 \pm 0.000083$
$b_2$	$4.58 \pm 0.85$
$b_3$	$5 \pm 18$
$b_4$	$0.20 \pm 0.10$
$b_5$	$0.048 \pm 0.030$
$b_6$	$1.7 \pm 1.0$
$b_7$	$0.0209 \pm 0.0025$
$b_8$	$-3.1 \pm 2.5$

# Pion Zerfallskonstante



$$\begin{aligned}
 a F_\pi [a m_{PCAC}] &= b_5 - b_6 \sqrt{(a m_{PCAC})^2 + b_1} \ln \frac{\sqrt{(a m_{PCAC})^2 + b_1}}{\Lambda^2} \\
 &\quad + b_7 \frac{a m_{PCAC}}{\sqrt{(a m_{PCAC})^2 + b_1}} + b_8 \sqrt{(a m_{PCAC})^2 + b_1}
 \end{aligned}$$

$$b_1 = (a\mu)^2 Z^2$$

$$b_5 = a F_0$$

$$b_6 = \frac{1 + \ln\left(\frac{Z'}{\Lambda^2}\right)}{16 \pi^2 F_0} a$$

$$b_7 = \frac{4}{F_0} (-L_{45} + W_{45}) \rho a = \frac{8 W_0}{F_0} (-L_{45} + W_{45}) a^2$$

$$b_8 = \frac{4}{F_0} L_{45} Z' a = \frac{8 B_0}{F_0} L_{45}$$



	Fitparameter
$b_1$	$0.000248 \pm 0.000083$
$b_2$	$4.58 \pm 0.85$
$b_3$	$5 \pm 18$
$b_4$	$0.20 \pm 0.10$
$b_5$	$0.048 \pm 0.030$
$b_6$	$1.7 \pm 1.0$
$b_7$	$0.0209 \pm 0.0025$
$b_8$	$-3.1 \pm 2.5$

# Literaturverzeichnis

- [1] S. Weinberg, *Physica* **A 96**, 327 (1979)
- [2] J. Gasser und H. Leutwyler „*Chiral Perturbation Theory: Expansion in the Mass of the Strange Quark*“, *Nucl. Phys. B* **250**, 465 (1985)
- [3] O.Bär, G.Rupak und N.Shores „*Chiral perturbationtheory at  $O(a^2)$  for lattice QCD*“, arXiv:hep-lat/0306021 (2003)
- [4] S. Scherer „*Introduction to Chiral Perturbation Theory*“, Mainz (2002)

- [5] A.Dobado, A.Gómez-Nicola, „*Effective Lagrangians for the Standard Model*“, Springer 1997