Elemente der Gruppentheorie

Tobias Sudmann

06.11.2006

Rolle der Gruppentheorie in der Physik

- abstraktes mathematisches Modell
- Symmetriebegriff
- *historisch*: Harmonievorstellung
  bei Plato, Pythagoras, Kepler, . . .
- *„modern“*:
  - „Problemstellungen“
  - Erhaltungsgrößen
  - Eichsymmetrien
  - Elementarteilchen
  - Symmetriebrechung

Übersicht

Grundlegendes

Definition (Gruppe)

Eine *Gruppe* G ist eine Menge von Elementen $\{A, B, C, \ldots\}$ für die gilt:

- Abgeschlossenheit:

$$A \in G,\ B \in G \ \Rightarrow \ C = AB \in G$$

- Assoziativität:

$$(AB)C = A(BC)$$

- Einselement:

$$AI = IA = A$$

- Inverses Element:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Gruppe

Abelsche Gruppe

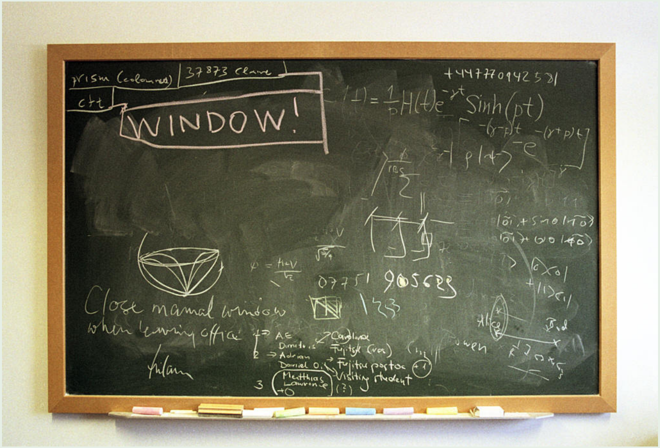
- kommutativ:

$$AB = BA$$

- additive Notation:

$$\begin{aligned} AB &\leftrightarrow A + B \\ I &\leftrightarrow 0 \\ A^{-1} &\leftrightarrow -A \\ A^n &\leftrightarrow nA \end{aligned}$$

Beispiel


prism (coloured)
WINDOW!
when leaving office
Visiting student

Untergruppe

Eine Teilmenge

$$H \subset G$$

ist *Untergruppe* von G, wenn sie selbst eine Gruppe ist.

Ordnung

- endliche Gruppen:

  Anzahl der Elemente

- Elemente:

  kleinstes n mit $A^n = I$

  $\longrightarrow$ zyklische Gruppen

Generatoren und Rang

Generatoren

Die *Generatoren* sind eine Menge von unabhängigen Elementen aus denen alle Elemente gebildet werden können.

Rang

Der *Rang* entspricht der Anzahl der Generatoren.

Beispiel

Zyklische Gruppen haben Rang 1.

Nebenklassen

Linksnebenklasse

Für jedes $g \in G$ ist

$$gH \equiv \{gh|h \in H\}$$

eine *Linksnebenklasse* von H.

Beispiel (Goldstone-Bosonen)

Hier ist speziell:

$$\begin{aligned} G &= \mathrm{SU}(N_f) \times \mathrm{SU}(N_f) \\ H &= \mathrm{SU}(N_f) \end{aligned}$$

Goldstone-Bosonen sind isomorph zu den Elementen von

$$\{gH|g \in G\}\,.$$

Klasse

Konjugierte Elemente

Zwei Elemente A, B sind zueinander *konjugiert*, wenn

$$B = T^{-1} A T \quad \text{für ein } T \in G\,.$$

Klasse

Die *Klasse* von A ist die Menge

$$(A) \equiv \{\text{aller konjugierten Elemente zu } A\}\,.$$

Beispiel

$$A \in (A)$$

Normalteiler

selbstkonjugiert

A ist *selbstkonjugiert*, genau dann wenn

$$(A) = A\,.$$

Normalteiler

Die *Normalteiler* von A ist die Menge

$$N_A \equiv \{\text{aller mit } A \text{ kommutierenden Elemente}\}\,.$$

Satz

Der Normalteiler ist eine Untergruppe.

Spezielle Untergruppen

Invariante Untergruppen

Eine Untergruppe H ist *invariant*, wenn diese mit allen $g \in G$ kommutieren.

Satz

Invariante Untergruppen setzen sich aus Klassen zusammen:

$$H = (I) + (A) + (B) + \dots$$

Einfache Untergruppen

Einfache Untergruppen haben keine echten invarianten Untergruppen.
Halb-einfache Untergruppen haben keine abelschen invarianten Untergruppen.

Abbildungen zwischen Gruppen

Abbildungen unter Berücksichtigung der Gruppenstruktur werden klassifiziert durch:

- $f : G \to G'$
  - *homomorph*: eindeutig Zuordnung
  - *isomorph*: ein-eindeutige Zuordnung: $G \approx G'$
- $f : G \to G$
  - *endomorph*: eindeutig Zuordnung
  - *automorph*: ein-eindeutige Zuordnung

Abbildungen zwischen Gruppen

Beispiel

$$G/\operatorname{Ker} f \approx \operatorname{Im} f$$

Satz

Die Menge aller Automorphismen einer Gruppe ($\operatorname{Aut} G$) bilden eine Gruppe.

Darstellungstheorie

Matrix-Gruppe

Eine *Matrix-Gruppe* hat Matrizen als Elemente. Mit einem solchen Element $M \in \mathrm{Mat}(n, n)$ wird die *lineare Transformation* $x' = Mx$ verknüpft. Der zugehörige Vektorraum L hat die Dimension n.

Darstellung einer Gruppe

Die *Darstellung* Γ einer Gruppe ist eine *homomorphe* Abbildung auf eine Matrix-Gruppe Γ.
Jedem Gruppenelement wird so eine Matrix zugeordnet:

$$\begin{aligned} D(A)D(B) &= D(AB) \\ D(I) &= \mathbb{1} \\ D(A^{-1}) &= D^{-1}(A) \end{aligned}$$

„Γ ist ein Darstellung von G im Vektoraum L der Dimension n.“

Darstellungen

Beispiel (Triviale Darstellung)

Eine *triviale Darstellung* ist immer gegeben durch

$$G \to 1 \, .$$

Reguläre Darstellung

Die *reguläre Darstellung* ist definiert durch

$$\Gamma^{\mathrm{reg}}_{ij}(A) = \delta(A_i^{-1} A \, A_j) \, .$$

$\to$ Tafel

Folgerung

Es gibt offensichtlich große Unterschied zwischen den Darstellungen.

Treue Darstellung

Treue Darstellung

Eine Darstellung ist *treu*, wenn

$$G \approx \Gamma\,.$$

Beispiel (Reguläre Darstellung)

Die reguläre Darstellung ist *treu*.

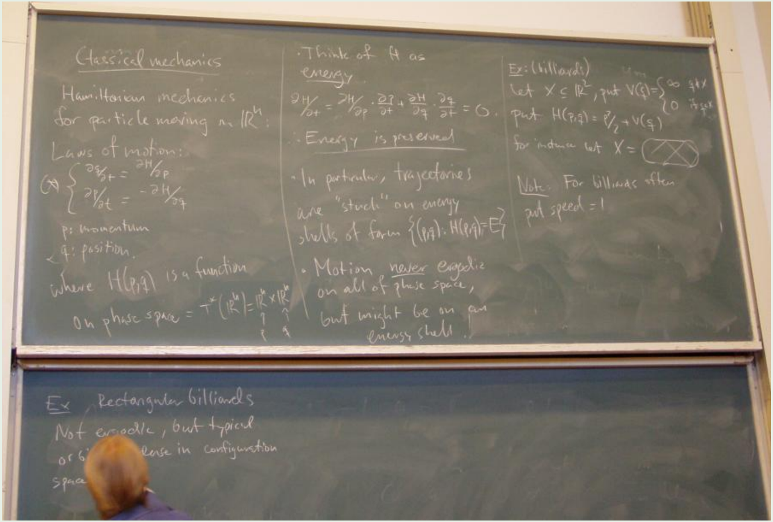
Beispiel (Triviale Darstellung)

Die triviale Darstellung ist *untreu*.

Beispiel (Kern)

Die Darstellung $G/\mathrm{Ker}\, f \to \Gamma$ ist *treu*.

Beispiel


Classical mechanics
Hamiltonian mechanics
for particle moving in $\mathbb{R}^n$:
Laws of motion:
(*) $\begin{cases} \partial q/\partial t = \partial H/\partial p \\ \partial p/\partial t = -\partial H/\partial q \end{cases}$
p: momentum
q: position
where $H(p,q)$ is a function
on phase space $= T^*(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
· Think of H as energy
$\partial H/\partial t = \partial H/\partial p \cdot \partial p/\partial t + \partial H/\partial q \cdot \partial q/\partial t = 0$.
∴ Energy is preserved
· In particular, trajectories are "stuck" on energy shells of form $\{(p,q) : H(p,q) = E\}$
· Motion never ergodic on all of phase space, but might be on an energy shell!
Ex: (billiards)
let $X \subseteq \mathbb{R}^2$, put $V(q) = \begin{cases} \infty & q \notin X \\ 0 & \text{if } q \in X \end{cases}$
put $H(p,q) = p^2/2 + V(q)$
for instance let X =
Note: For billiards often put speed = 1
Ex Rectangular billiards
Not ergodic, but typical
dense in configuration
space

Irreduzibilität

(Ir-)Reduzible Darstellung

Eine Darstellung, die in Blockdiagonalgestalt gebracht werden kann, heisst (vollständig) *reduzibel*. Dann ist

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots \\ 0 & D_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

bzw.

$$D = D_1 \oplus D_2 \oplus \ldots$$

Anderfalls heisst sie *irreduzibel*.

Charakter

Äquivalente Darstellung

Zwei Darstellung sind *äquivalent*, wenn

$$D'(A) = T^{-1} D(A)\, T\,.$$

Charakter einer Darstellung

Der Charakter von A in einer Darstellung D ist durch die Spur

$$\chi(A) = \mathrm{Tr}\, D(A)$$

definiert.

Äquivalenz

Zwei Darstellungen sind genau dann äquivalent, wenn sie isomorph sind *und* dieselben Charaktere haben.

Quantenmechanik

- Quantenmechanik: Darstellungsraum $\hat{=}$ Hilbert-Raum
- Darstellungsmatrizen müssen unitär sein:

$$\langle x|y\rangle = \langle x'|y'\rangle = \langle x|U^\dagger U|y\rangle$$

Unitäre Darstellung

Jede Darstellung einer endlichen Gruppe kann in eine *unitäre* transformiert werden.

Schur's Lemmata

Schur's erstes Lemma

Eine beliebige Matrix M, die mit allen Matrizen einer Darstellung D kommutiert, ist (genau dann) ausschliesslich von der Form

$$M = \lambda \mathbb{1} \,,$$

wenn die Darstellung irreduzibel ist.

Schur's zweites Lemma

Wenn zwei nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen D_1 und D_2 der Dimensionen m und n von G

$$D_1(A)\, F = F\, D_2(A)$$

erfüllen, dann ist F die Nullmatrix.

Lie-Gruppen

Lie-Gruppen

- von den Parametern $a = (a_1, \ldots, a_r)$ abhängig
- Gruppe von kontinuierlichen, differenzierbaren Transformationen

$$x' = xT_a = f(x, a)$$

Infinitesimale Transformation

Bei der Analyse beschränkt man sich auf *infinitesimale Transformationen* bzw. auf die *infinitesimalen Generatoren*. Diese führen zu *Lie-Algebra*.

Skizze

- Ausgangspunkt:

$$a(\boldsymbol{\theta})a(\boldsymbol{\phi}) = a(\boldsymbol{\xi})\,, \quad \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi})$$

  wobei

$$\boldsymbol{f}(0,\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta},0) = \theta\,, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi}),\boldsymbol{\xi})$$

- Weiter:

$$a(\boldsymbol{\theta}) = \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{X}) = a(0) + \mathrm{i}\theta_k X_k + \ldots\,, \quad X_k = -\mathrm{i}\frac{\partial a}{\partial\theta_k}\bigg|_{\boldsymbol{\theta}=0}$$

- Dann für $a(\boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\theta})a(\boldsymbol{\phi})a^{-1}(\boldsymbol{\theta})a^{-1}(\boldsymbol{\phi})$ wegen $\xi_i = g_i(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi})$ mit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\phi},0) = \boldsymbol{g}(0,\boldsymbol{\theta}) = 0$:

$$\begin{aligned}\xi^l &= A^l + B^l_j\theta_j + B'^l_k\phi_k + C^l_{jk}\theta_j\phi_k + C'^l_{jk}\theta_j\theta_k + C''^l_{jk}\phi_j\phi_k + \ldots\\ &= C^l_{jk}\theta_j\phi_k + \ldots\end{aligned}$$

Skizze

- Also:

$$a(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{1} + \mathrm{i}\,C^l_{jk} X_l + \dots$$

und:

$$a(\boldsymbol{\theta})\,a(\boldsymbol{\phi})\,a^{-1}(\boldsymbol{\theta})\,a^{-1}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbb{1} + \theta_j \phi_k [X_j, X_k]$$

- Daraus folgt unmittelbar:

$$[X_j, X_k] = \mathrm{i}\,C^l_{jk} X_l$$

mit den Strukturkonstanten C^l_{jk}.

Spezielle Darstellungen

Die $D(a) = \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{T})$ bilden eine Darstellung.
Dann existiert:

Konjugierte Darstellung

Die *konjugierte Darstellung* $D^*(a)$ wird durch die $-T_j^*$ generiert.
Wenn

$$ST_jS^{-1} = -T_j^* ,$$

dann werden die T_j *reelle Darstellung* genannt.
$\longrightarrow$ diagonale Generatoren

und:

Adjungierte Darstellung

Die *adjungierte Darstellung* wird aus den Strukturkonstanten C_{jk}^l gebildet.

Elementarteilchen und $\mathrm{SU}(N_f)$

Die $\mathrm{SU}(2)$

Basis (reelle Darstellung)

Pauli-Matrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Anmerkung

Rang hier: $N_f - 1$

Generatoren

$J_i = \sigma_i/2$:

$$[J_a, J_b] = \mathrm{i}\varepsilon_{abc} J_c$$

Zustände

$$
\begin{aligned}
J^2|j,m\rangle &= j(j+1)|j,m\rangle \\
J_3|j,m\rangle &= \qquad\qquad m|j,m\rangle\,, \quad m = j, j-1, \ldots, -j
\end{aligned}
$$

Dimension

Die Darstellung hat offensichtlich die Dimension $2j+1$.

Die $\mathrm{SU}(2)$

Beispiel $(J = 1/2,\ m = \pm 1/2)$

Zustände sind gewöhnlich

$$|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ Spin, Isospin

Beispiel $(J = 1,\ m = 1, 0, -1)$

$$|1,1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |1,0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |1,-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ Pionen

Die $\mathrm{SU}(2)$

Leiteroperatoren:

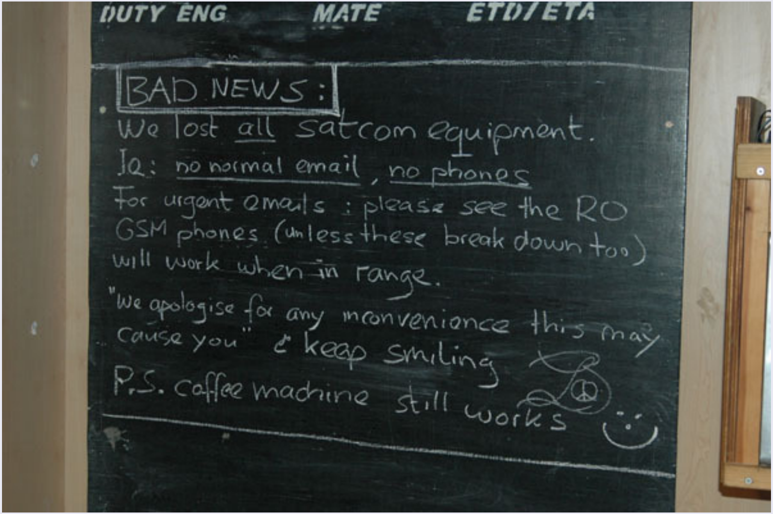
$$J_{\pm}|j,m\rangle = [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2}|j, m \pm 1\rangle$$

Graph

Die irreduziblen Darstellungen können durch einen Parameter klassifiziert werden.
$\longrightarrow$ Linie

Und was ist mit *Produktdarstellungen*?

Produktdarstellung



Die SU(3)

Basis

Gell-Mann-Matrizen:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

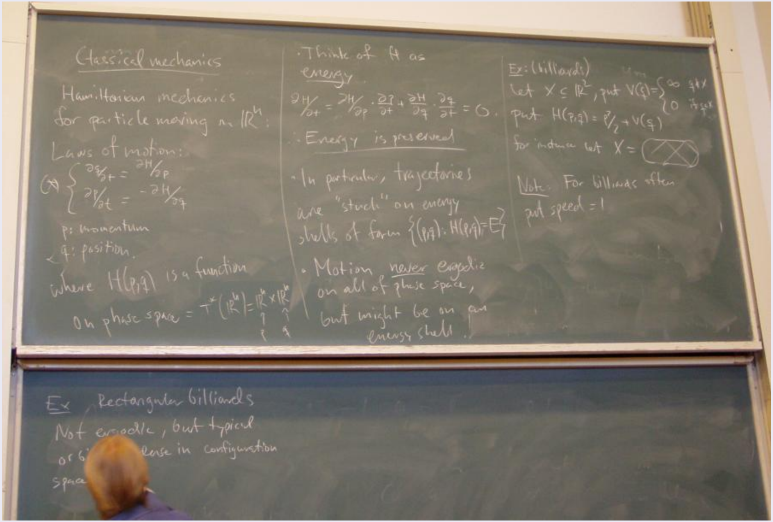
$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Generatoren $T_i = \lambda_i/2$:

$$[T_a, T_b] = \mathrm{i} f_{abc} T_c$$

Parameter und Produkdarstellung



Young tableaux

Allgemein

Im Allgemeinen hat man mehrere Parameter. Für $\mathrm{SU}(N_f)$ kann man die Lösungen durch sogenannte „Young tableaux“ bestimmen (Theorem, Hamermesh 1963).

Beispiel

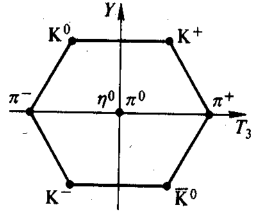
- Quark-Antiquark

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3}^* = \mathbf{1} + \mathbf{8}$$

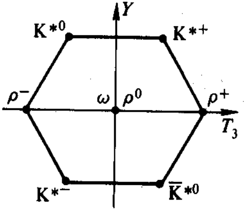
- Drei-Quark

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{1} + \mathbf{8} + \mathbf{8} + \mathbf{10}$$

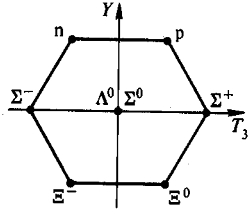
Hadronen



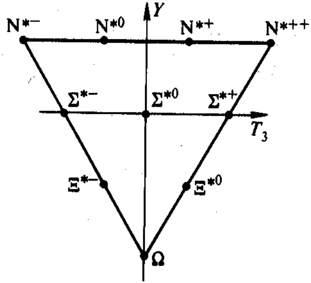
Y
K⁰
K⁺
π⁻
η⁰
π⁰
π⁺
T₃
K⁻
K̄⁰



Y
K*⁰
K*⁺
ρ⁻
ω
ρ⁰
ρ⁺
T₃
K*⁻
K̄*⁰



Y
n
p
Σ⁻
Λ⁰
Σ⁰
Σ⁺
T₃
Ξ⁻
Ξ⁰



Y
N*⁻
N*⁰
N*⁺
N*⁺⁺
Σ*⁻
Σ*⁰
Σ*⁺
T₃
Ξ*⁻
Ξ*⁰
Ω

Literatur

- Max Wagner, *Gruppentheoretische Methoden in der Physik*
- F. Gürsey, *Introduction to group theory*
  in: DeWitt & DeWitt, *Relativity, groups and topology*
- Cheng & Li, *Gauge theory of elementary particle physics*