

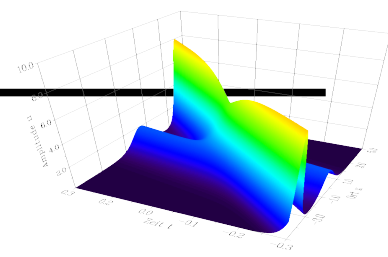


WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER

# Korteweg-de-Vries-Gleichung

ein Vortrag von  
Michael Sinhuber  
zur Vorlesung

„Numerische Methoden für dynamische Systeme“



## 1. Teil: Korteweg-de-Vries-Gleichung

### 1.1 Die Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.2 Analytische Lösung der KdV-Gleichung

1.3 Erhaltungsgrößen

1.4 Anwendungsgebiete

## 2. Teil: Numerische Methode

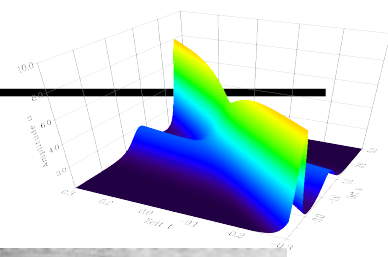
2.1 Finite Differenzen

2.2 Erste Differenzengleichung

2.3 Verbessertes Verfahren

2.4 Stabilität der Methode

## 3. Teil: Vorstellung des C++ - Programms

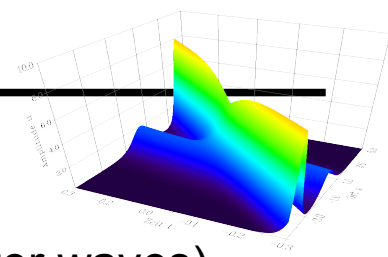


- Erste Entdeckung des Phänomens von John Scott Russell 1834:

*„I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed“*



John Scott Russell  
(1808 -1882) <sup>[1.1]</sup>



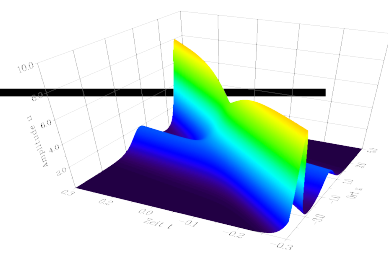
- Physikalische Beschreibung von Flachwasserwellen (shallow water waves)
- Herleitung 1895 von Diederik Korteweg und Gustav de Vries zur Beschreibung von Flachwasserwellen in dünnen Kanälen

- Nichtlinearität:  $6 \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

- Dispersionsrelation:  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$

- Korteweg-de-Vries-Gleichung in normierter Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6 \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$



## 1. Teil: Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.1 Die Korteweg-de-Vries-Gleichung

**1.2 Analytische Lösung der KdV-Gleichung**

1.3 Erhaltungsgrößen

1.4 Anwendungsgebiete

## 2. Teil: Numerische Methode

2.1 Finite Differenzen

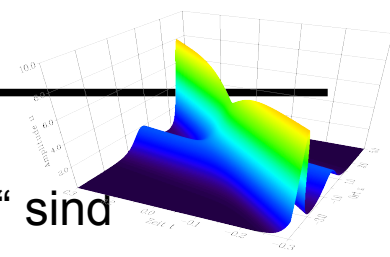
2.2 Erste Differenzengleichung

2.3 Verbessertes Verfahren

2.4 Stabilität der Methode

## 3. Teil: Vorstellung des C++ - Programms

## 1.3 Solitonen : Analytische Lösung der KdV-Gleichung



- KdV-Gleichung besitzt eine Vielzahl von Lösungen, „interessantesten“ sind hierbei die Solitonenlösungen aus der Anfangsbedingung:

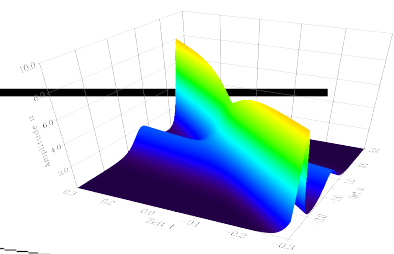
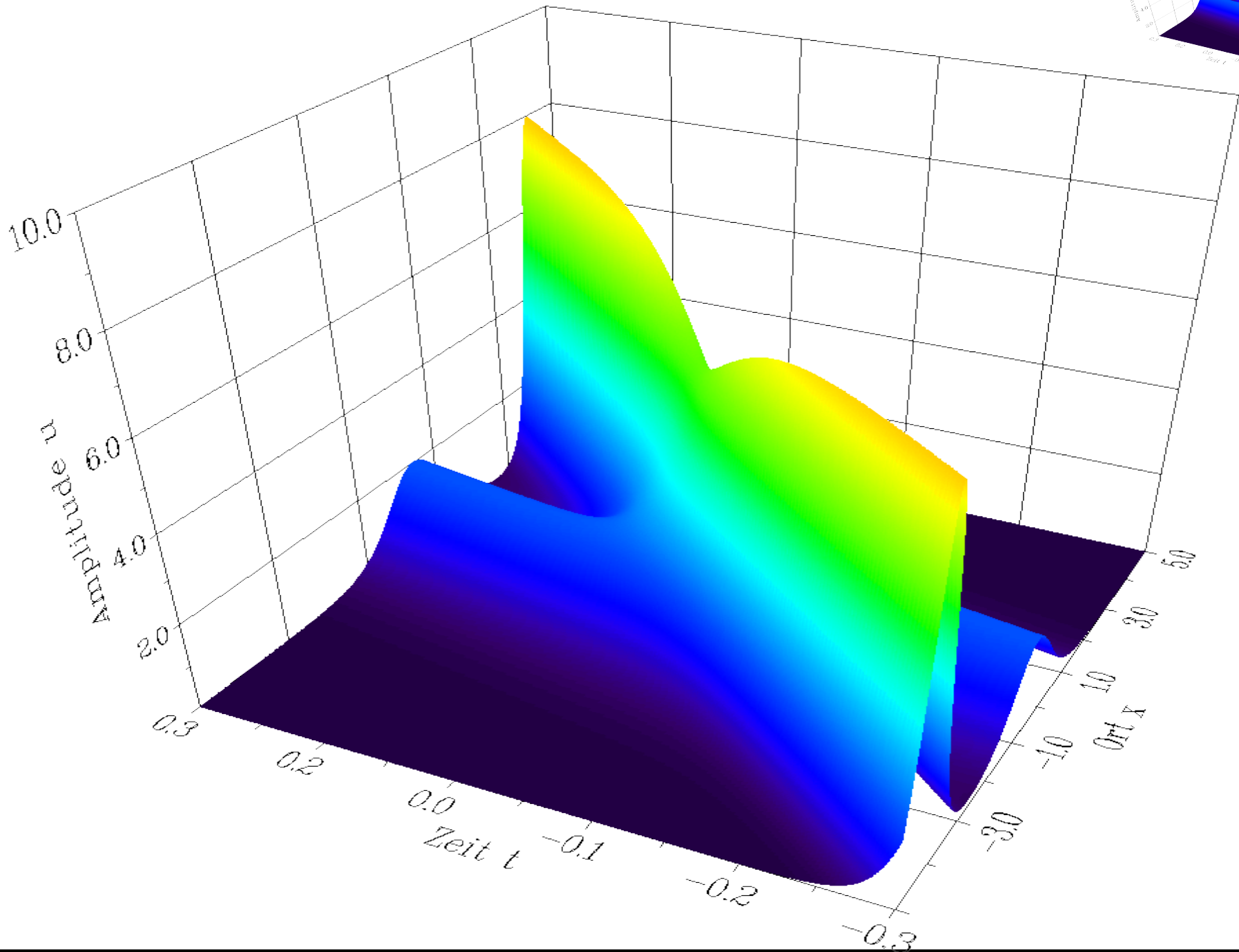
$$u(x, 0) = -N(N + 1) \operatorname{sech}^2(x)$$

- Für  $N = 2$  ergeben sich 2 Solitonen:

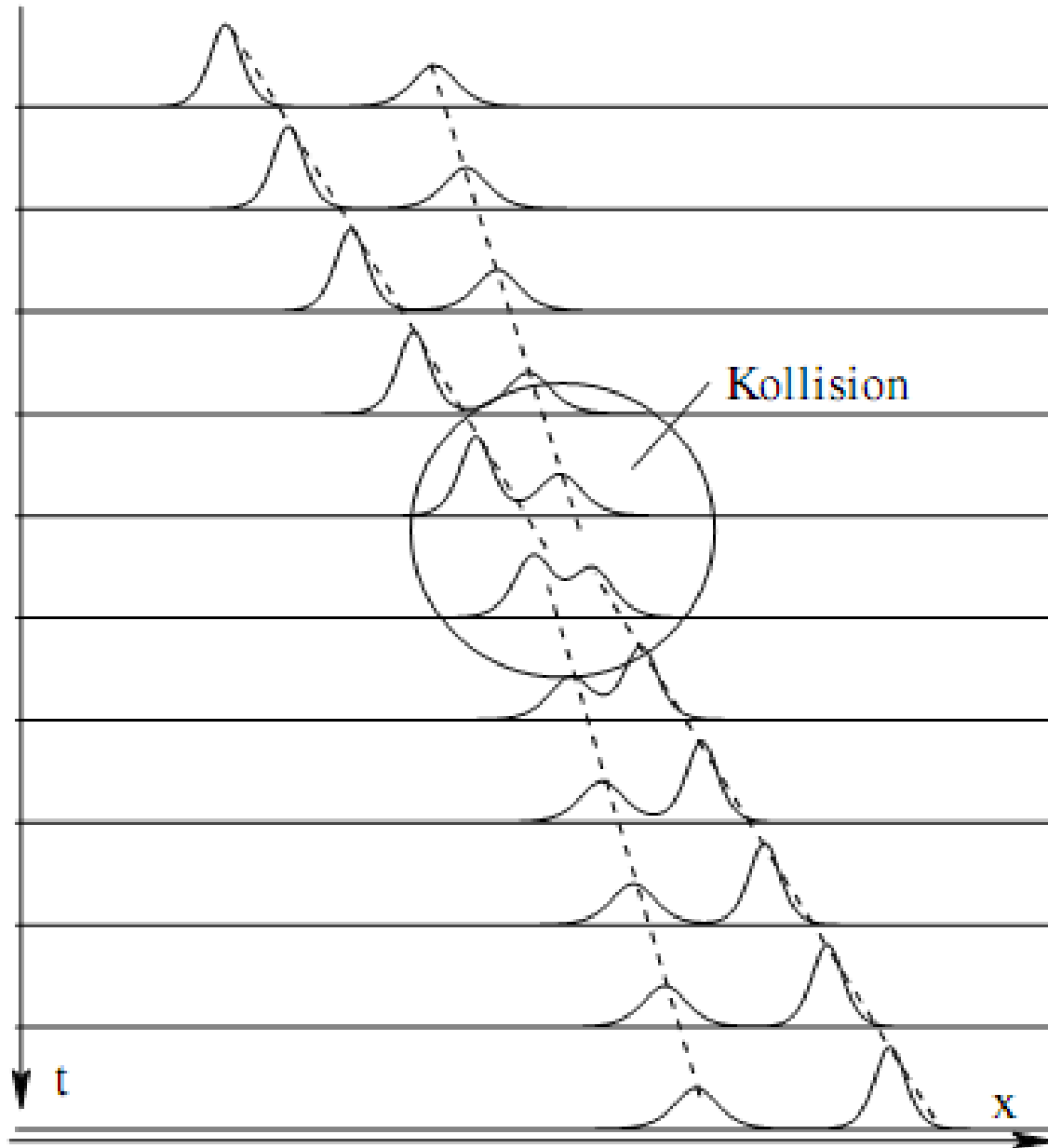
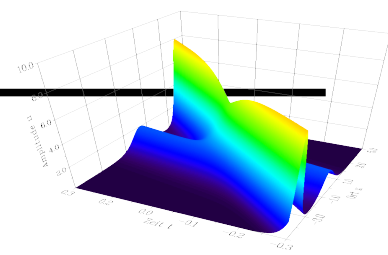
$$u(x, t) = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{[3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)]^2}$$

- Soliton ist Welle, die Teilchencharakter aufweist
  - In Inertialsystemen keine Formänderung mit der Zeit
  - Räumlich stark lokalisierte Welle
  - Beim Stoß zweier Solitonen behalten beide ihre Form bei, es kommt lediglich zu einer Phasenverschiebung

# 1.3 Solitonen : Analytische Lösung der KdV-Gleichung

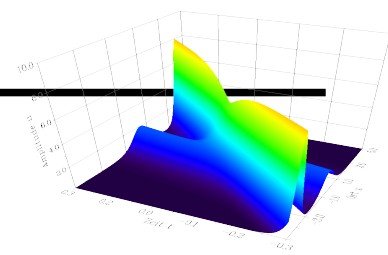


# 1.3 Solitonen : Analytische Lösung der KdV-Gleichung



Stoß zweier Solitonen [1.3]





## 1. Teil: Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.1 Die Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.2 Analytische Lösung der KdV-Gleichung

**1.3 Erhaltungsgrößen**

1.4 Anwendungsgebiete

## 2. Teil: Numerische Methode

2.1 Finite Differenzen

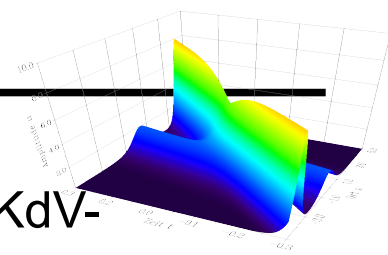
2.2 Erste Differenzengleichung

2.3 Verbessertes Verfahren

2.4 Stabilität der Methode

## 3. Teil: Vorstellung des C++ - Programms

## 1.4 Erhaltungsgrößen



- Es existieren abzählbar unendlich viele Erhaltungsgrößen für die KdV-Gleichung (Miura, Gardner, Kruskal, 1967)

- Transformation auf Sturm-Liouville-Gleichung mit

$$v = u^2 \pm (-6)^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x}$$

- Für jede ganzzahlige Potenz von  $u^n$  existiert eine Erhaltungsgröße  $P_n$ , wobei gerade Terme mit  $n > 2$  verschwinden.

$$I_n(u) = \int P_{2n-1}(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(n-2)x}) dx$$

- Es lässt sich finden:

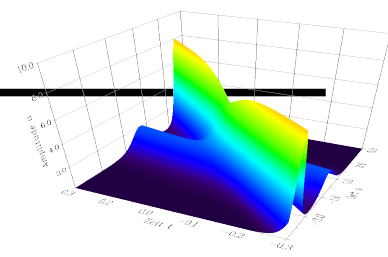
$$P_1 = u$$

Impulserhaltung

$$P_2 = u^2$$

Energieerhaltung

$$P_n = -\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-2} P_{n-1-j} P_j \quad n > 2$$



## 1. Teil: Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.1 Die Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.2 Analytische Lösung der KdV-Gleichung

1.3 Erhaltungsgrößen

**1.4 Anwendungsgebiete**

## 2. Teil: Numerische Methode

2.1 Finite Differenzen

2.2 Erste Differenzengleichung

2.3 Verbessertes Verfahren

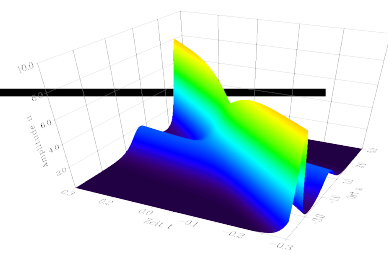
2.4 Stabilität der Methode

## 3. Teil: Vorstellung des C++ - Programms

- Modell zur Berechnung von Blutdruckpulsen in Hauptarterien. Insbesondere 2-Solitonen-Lösung von Interesse (Hauptpuls und Nebenpuls in Arterien)
  - In Realität Mischung aus Soliton und Schockwelle
- Vereinfachung der Beschreibung der Dynamik an der Oberfläche von Tropfen
- Kontinuierliche Beschreibung des Fermi-Pasta-Ulam-Experiment



*Dynamik an Tropfen* [1.2]



## 1. Teil: Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.1 Die Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.2 Analytische Lösung der KdV-Gleichung

1.3 Erhaltungsgrößen

1.4 Anwendungsgebiete

## 2. Teil: Numerische Methode

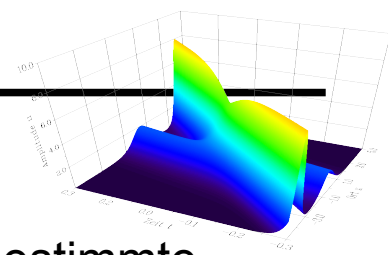
2.1 Finite Differenzen

2.2 Erste Differenzengleichung

2.3 Verbessertes Verfahren

2.4 Stabilität der Methode

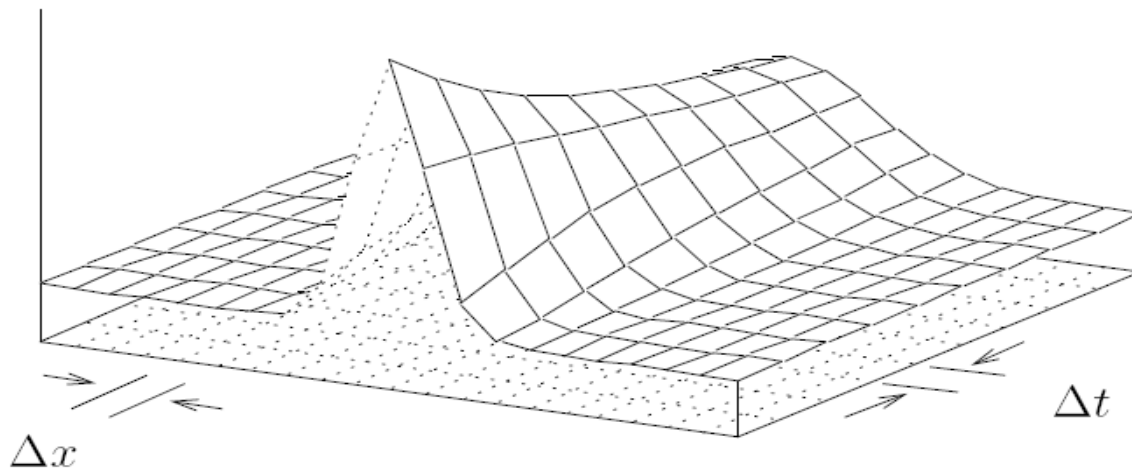
## 3. Teil: Vorstellung des C++ - Programms



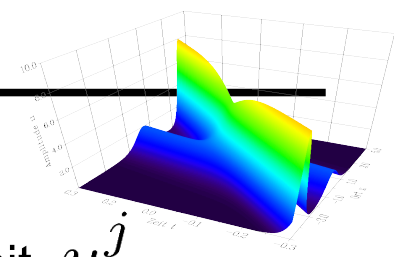
- keine allgemeine Aussage möglich, welches Verfahren auf eine bestimmte partielle Differentialgleichung anwendbar ist
- Für Ordnung 2 existiert Einteilung in parabolische, hyperbolische und elliptische Differentialgleichungen und entsprechende Lösungsverfahren
- KdV- Gleichung dritter Ordnung im Ort, lässt sich aber recht einfach mit **expliziter Finite-Differenzen-Methode behandeln**
- Diskretisierung von Raum und Zeit mit Gitterabständen  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  und Umschreiben auf eine Differenzengleichung

$$u(x, t) \rightarrow u_n^j(j\Delta x, n\Delta t) = u_n^j$$

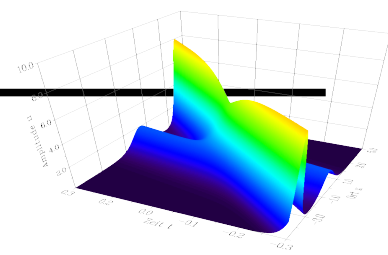
$|\Psi(x, t)|^2$



*Diskretisierung in einer Dimension<sub>[2.1]</sub>*



- Ausgangssituation: Anfangswertproblem  $u(x, 0)$  und damit  $u_0^j$  bekannt für alle  $j$
- Gesucht:  $u_n^j$  für beliebige Zeit  $n\Delta t$
- Zur Raumdiskretisierung von  $u(x, t)$  Taylorentwicklung im Ort von  $u(x \pm \Delta x, t)$
- Zur Bestimmung der dritten Ableitung zusätzlich nötig, Taylorentwicklung für  $u(x \pm 2\Delta x, t)$
- Analog für Zeitdiskretisierung, Taylorentwicklung von:  $u(x, t \pm \Delta t)$



## 1. Teil: Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.1 Die Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.2 Analytische Lösung der KdV-Gleichung

1.3 Erhaltungsgrößen

1.4 Anwendungsgebiete

## 2. Teil: Numerische Methode

2.1 Finite Differenzen

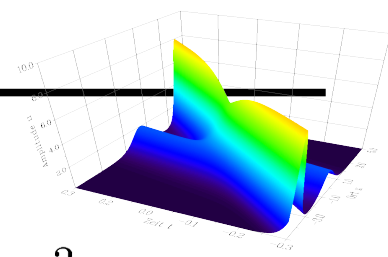
**2.2 Erste Differenzengleichung**

2.3 Verbessertes Verfahren

2.4 Stabilität der Methode

## 3. Teil: Vorstellung des C++ - Programms





- Taylorentwicklung im Ort:

$$u(x \pm \Delta x, t) = u(x, t) \pm u_x(x, t) \Delta x + u_{xx}(x, t) \frac{\Delta x^2}{2} \pm u_{xxx} \frac{\Delta x^3}{6} + O(\Delta x^4)$$

- Durch Differenzbildung ergibt sich die Zentraldifferenz für die erste Ableitung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_n^{j+1} - u_n^{j-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

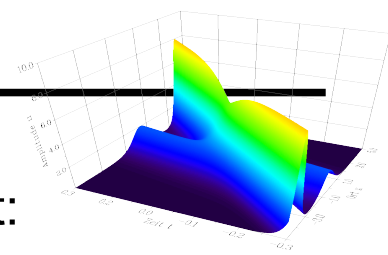
- Nach weiterer Rechnung gilt für die dritte Ableitung:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{u_n^{j+2} - 2u_n^{j+1} + 2u_n^{j-1} - u_n^{j-2}}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^2)$$

- Da anfangs nur Informationen über  $u(x, 0)$  vorliegen, lässt sich für die Zeitableitung nur die Vorwärtsdifferenz bilden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

## 2.2 Erste Differenzengleichung



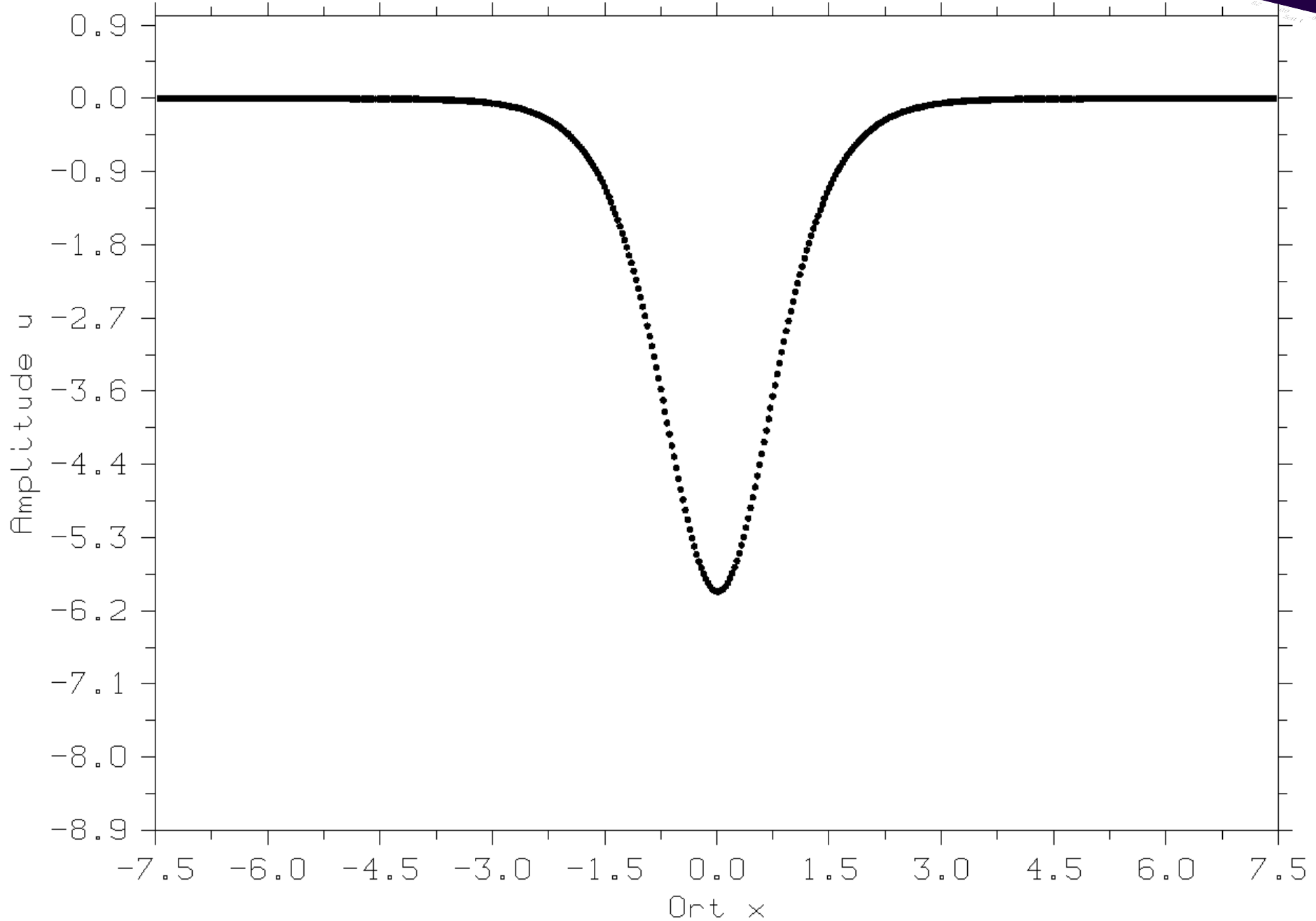
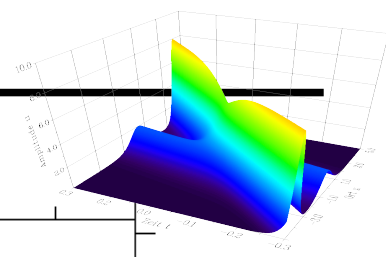
- Einsetzen in die KdV-Gleichung und auflösen nach  $u_{n+1}^j$  liefert:

$$u_{n+1}^j = u_n^j + \Delta t \left( 6u_n^j \frac{u_n^{j+1} - u_n^{j-1}}{2\Delta x} - \frac{u_n^{j+2} - 2u_n^{j+1} + 2u_n^{j-1} - u_n^{j-2}}{2\Delta x^3} \right)$$

- Für jeden Zeitschritt  $n\Delta t$  muss diese Gleichung für jeden Gitterpunkt  $j\Delta x$  gelöst werden

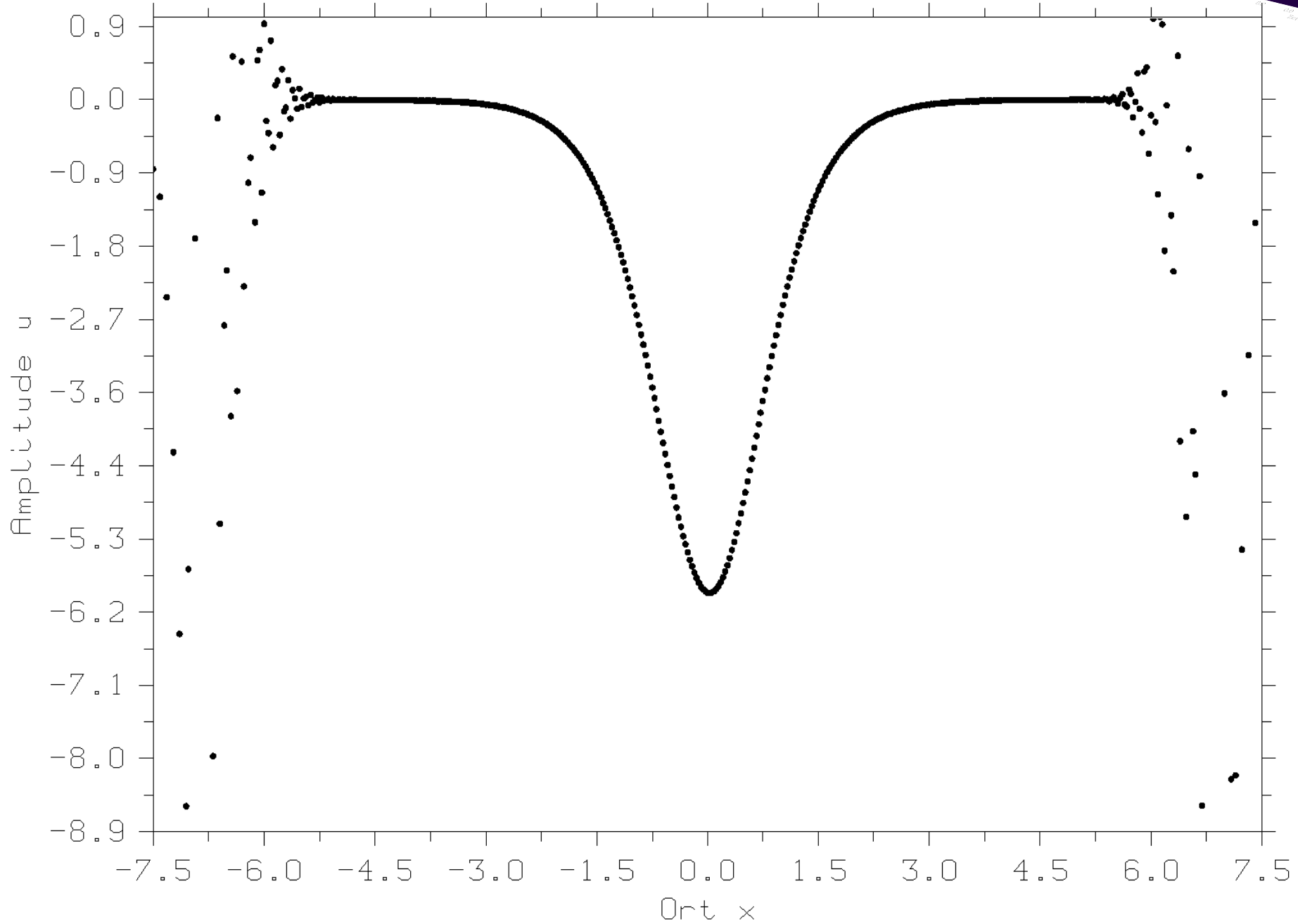
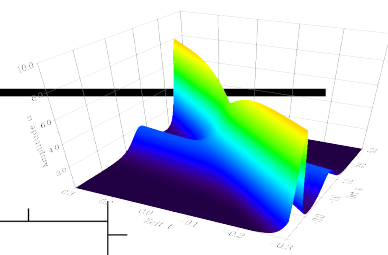
## 2.2 Erste Differenzengleichung

Zeit  $t = 0.0005$



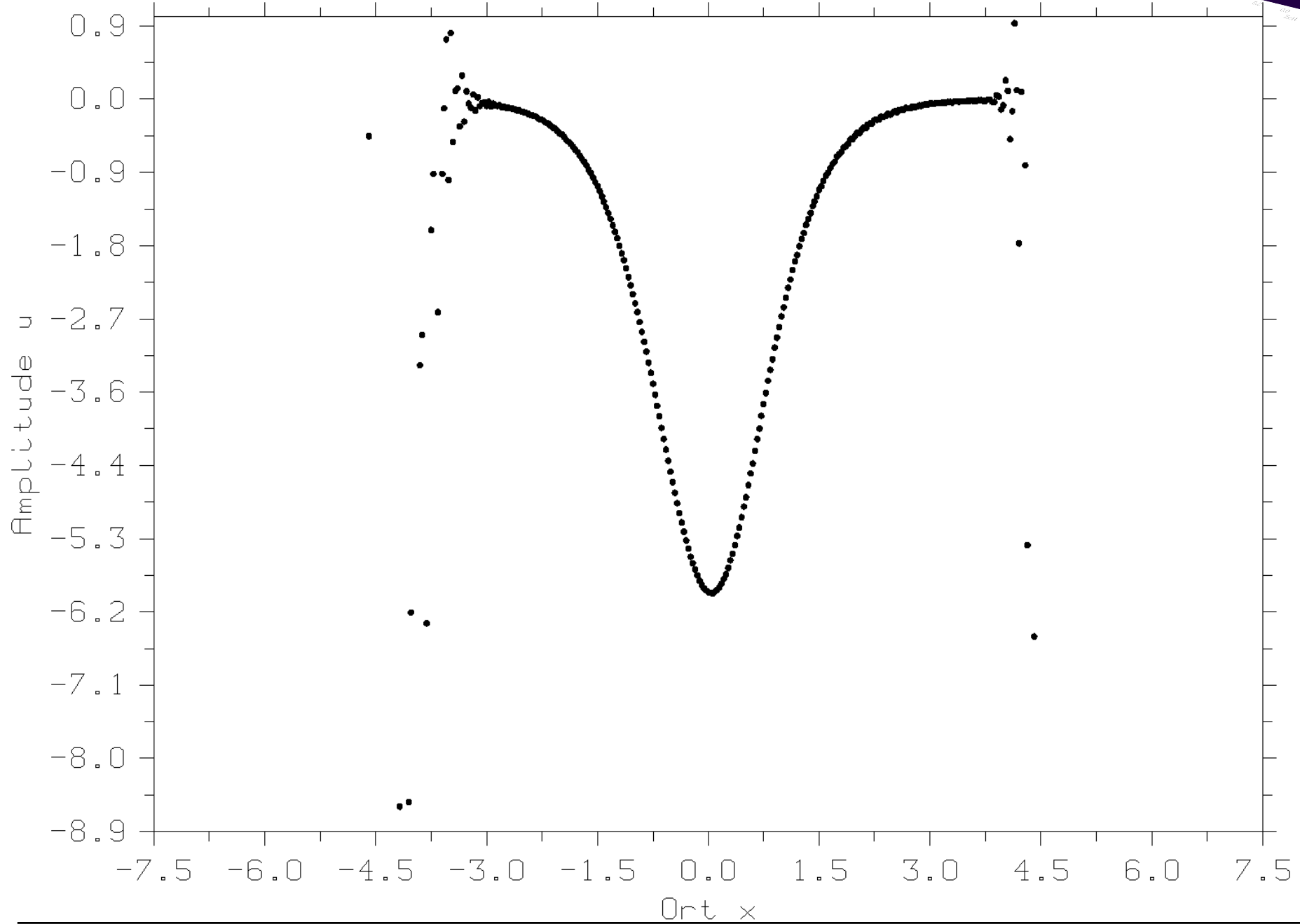
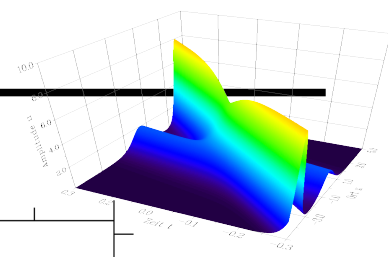
## 2.2 Erste Differenzengleichung

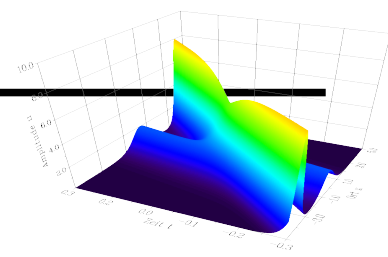
Zeit  $t = 0.0010$



## 2.2 Erste Differenzengleichung

Zeit  $t = 0.0015$





## 1. Teil: Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.1 Die Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.2 Analytische Lösung der KdV-Gleichung

1.3 Erhaltungsgrößen

1.4 Anwendungsgebiete

## 2. Teil: Numerische Methode

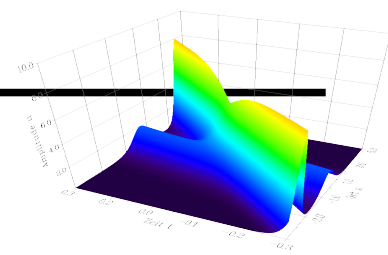
2.1 Finite Differenzen

2.2 Erste Differenzengleichung

**2.3 Verbessertes Verfahren**

2.4 Stabilität der Methode

## 3. Teil: Vorstellung des C++ - Programms



- Ersetzen von  $u$  durch den Mittelwert benachbarter Punkte:

$$u \rightarrow \frac{1}{3} (u_n^{j+1} + u_n^j + u_n^{j-1})$$

- Nachdem erster Zeitschritt berechnet ist, Zeitableitung ebenfalls als Zentraldifferenz schreiben:

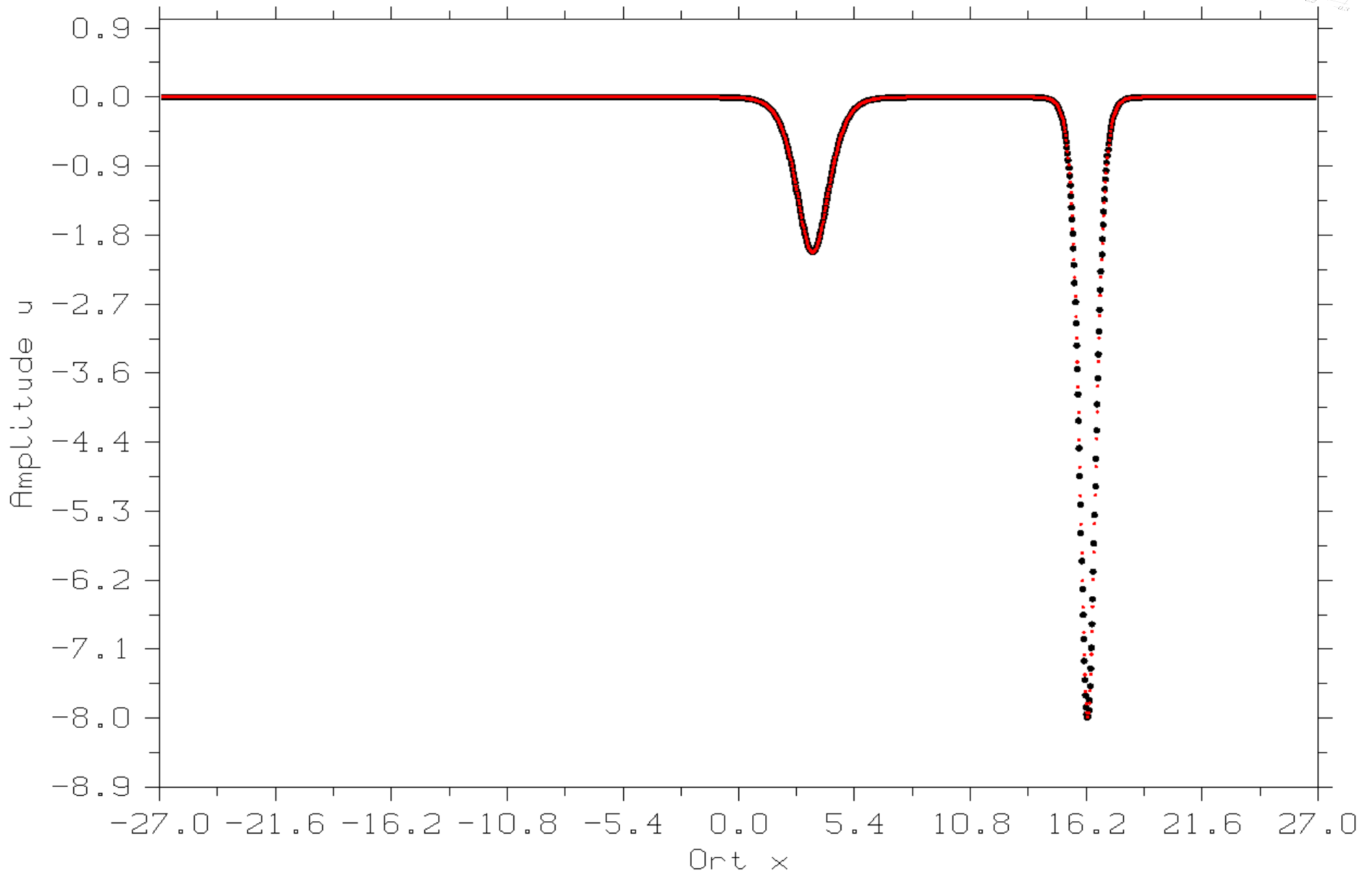
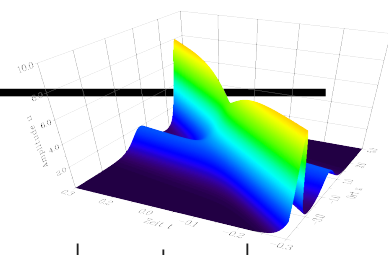
$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \frac{u_{n+1}^j - u_{n-1}^j}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

- Somit ergibt sich:

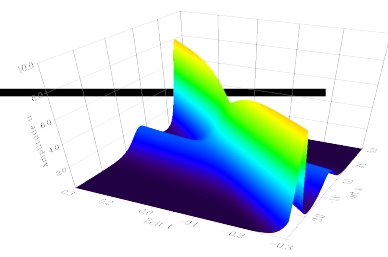
$$u_{n+1}^j = u_{n-1}^j + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_n^{j+1} + u_n^j + u_n^{j-1}) (u_n^{j+1} - u_n^{j-1}) \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x^3} (2u_n^{j+1} - 2u_n^{j-1} - u_n^{j+2} + u_n^{j-2})$$

## 2.3 Verbessertes Verfahren

Zeit  $t = 1.0000$







## 1. Teil: Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.1 Die Korteweg-de-Vries-Gleichung

1.2 Analytische Lösung der KdV-Gleichung

1.3 Erhaltungsgrößen

1.4 Anwendungsgebiete

## 2. Teil: Numerische Methode

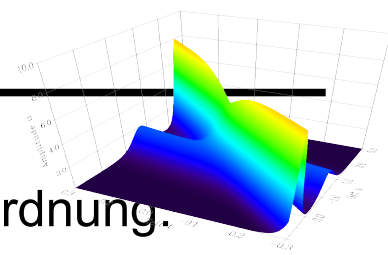
2.1 Finite Differenzen

2.2 Erste Differenzengleichung

2.3 Verbessertes Verfahren

**2.4 Stabilität der Methode**

## 3. Teil: Vorstellung des C++ - Programms



- Abschätzung der Stabilität über dominierenden Term dritter Ordnung.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

- Einsetzen der Diskretisierung ergibt

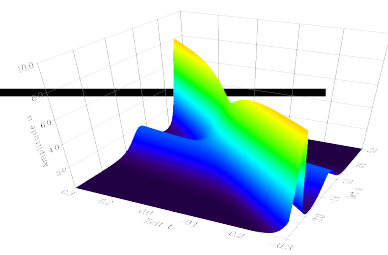
$$u_{n+1}^j = u_{n-1}^j + \frac{\Delta t}{\Delta x^3} \left[ u_n^{j+2} - 2u_n^{j+1} + 2u_n^{j-1} - u_n^{j-2} \right]$$

- Rundungsfehler der Form:

$$\varepsilon_n^j = g^n e^{ikx_j}$$

- Einsetzen liefert:

$$g^{n+1} e^{ikx_j} = g^{n-1} e^{ikx_j} + \frac{\Delta t}{\Delta x^3} \left[ g^n e^{ik(x_j+2\Delta x)} - 2g^n e^{ik(x_j+\Delta x)} + 2g^n e^{ik(x_j-\Delta x)} - g^n e^{ik(x_j-2\Delta x)} \right]$$



- Ausklammern und Definition von Sinus einsetzen:

$$g^{n+1} e^{ikx_j} = g^{n-1} e^{ikx_j} + \frac{2i\Delta t}{\Delta x^3} (\sin(2k\Delta x) - 2\sin(k\Delta x)) g^n e^{ikx_j}$$

- Abkürzung:

$$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^3} (\sin(2k\Delta x) - 2\sin(k\Delta x))$$

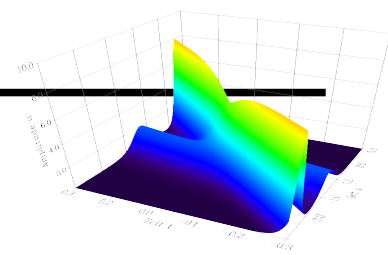
- Es ergibt sich:

$$(g^{n+1} - g^{n-1} - 2i\alpha g^n) = 0$$

$$\Rightarrow (g^2 - 2i\alpha g - 1) = 0$$

$$\Rightarrow g = i\alpha \pm \sqrt{1 - \alpha^2}$$

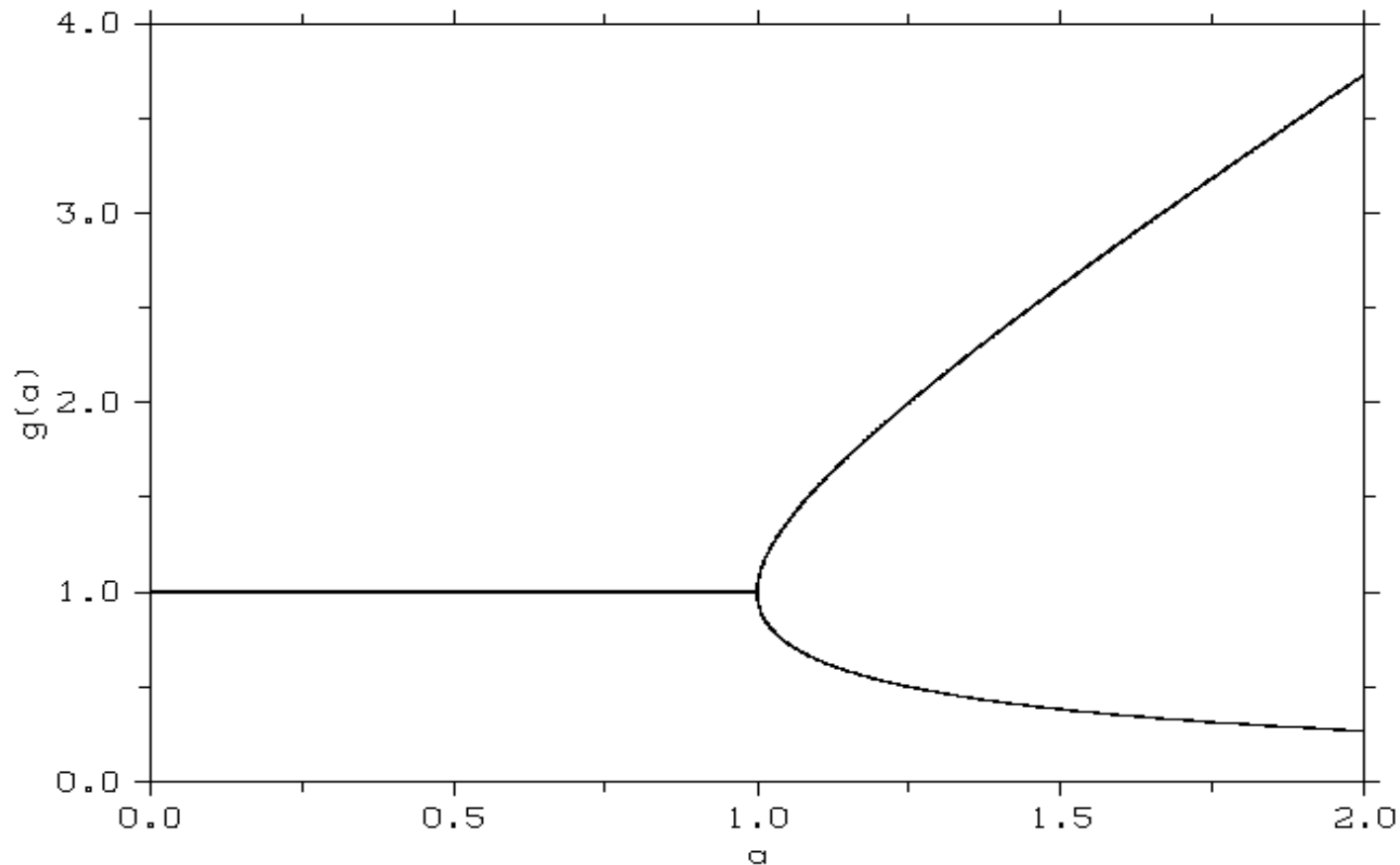
## 2.4 Stabilität der Methode

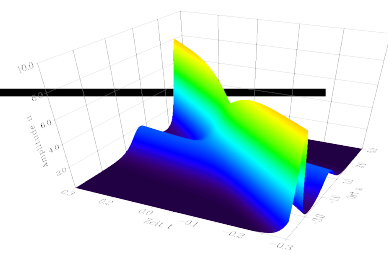


- Damit das Verfahren stabil ist, muss

$$|g| \leq 1$$

$$|g| = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{wenn } \alpha < 1 \\ \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} & \text{sonst} \end{array} \right\}$$





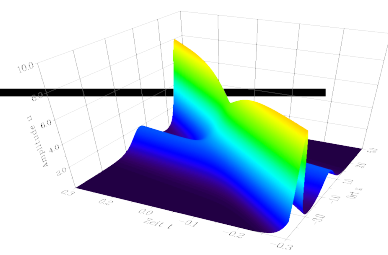
- Es muss also gelten:

$$1 \geq \alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^3} (\sin(2k\Delta x) - 2 \sin(k\Delta x))$$

$$(\sin(2k\Delta x) - 2 \sin(k\Delta x)) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

- Somit ergibt sich als Anforderung für ein stabiles Verfahren:

$$\Delta t \leq \frac{2\Delta x^3}{3\sqrt{3}}$$



## Bildverzeichnis

- [Titel] [http://www.amath.washington.edu/~bernard/kp/waterwaves/Molokai\\_soliton1.jpg](http://www.amath.washington.edu/~bernard/kp/waterwaves/Molokai_soliton1.jpg)  
[1.1] [http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Russell\\_Scott.jpeg](http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Russell_Scott.jpeg)  
[1.2] [http://pap093.uni-muenster.de/d.php?d=SS08\\_NWS/V08c.pdf](http://pap093.uni-muenster.de/d.php?d=SS08_NWS/V08c.pdf)  
[1.3] Michael Besthorn, Hydrodynamik und Strukturbildung, Springer, Berlin 2006, Seite 156  
[2.1] <http://www.exp.univie.ac.at/cp1/cp2.pdf>, Seite 21

Alle übrigen Abbildungen wurden mittels DISLIN (<http://www.dislin.de/>) erstellt.

## Literatur

Michael Besthorn, Hydrodynamik und Strukturbildung, Springer, Berlin 2006

Miura, Gardner, Kruskal, Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion, Journal of mathematical physics Volume 9, Number 8, August 1968

M. Renoissent, Waves Called Solitons, Springer 1999

W. Kinzel, G. Reents, Physik per Computer, Spektrum Verlag 1996

[www.exp.univie.ac.at/cp1/index.html](http://www.exp.univie.ac.at/cp1/index.html)

<http://eom.springer.de/k/k055800.htm>