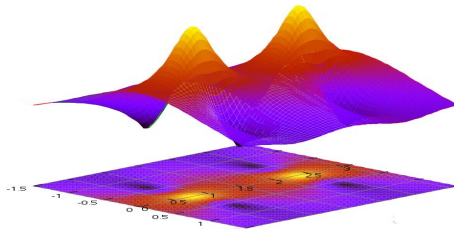


Nichtlineare Schrödinger-Gleichung und Soliton-Lösung

Kai Walter

WWU Münster

7. Januar 2009



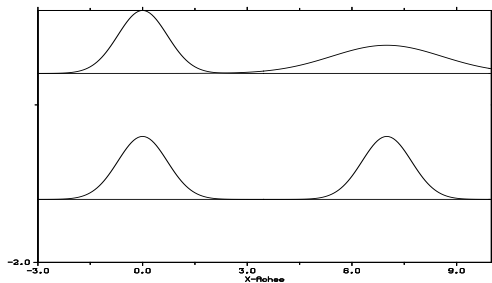
Inhaltsverzeichnis

- 1 Motivation
 - Geschichte der Solitonen
 - Beispiele in der Natur
 - Mathematische Beschreibung
- 2 Bose-Einstein-Kondensat
 - Eigenschaften
 - Solitonen im BEC
 - BEC schwach wechselwirkender Atome
- 3 Numerische Methode zum Lösen der NLSG
 - Implizite und explizite Methode
 - Crank-Nicholson Methode

Was ist Soliton?

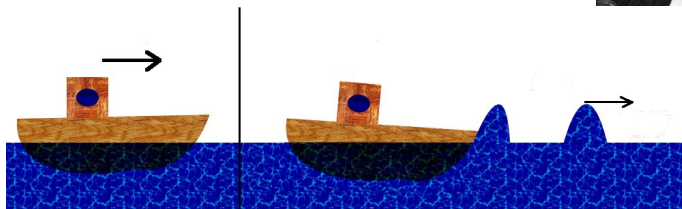
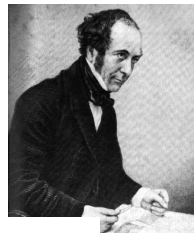
Solitonen sind Wellen, die formstabil über theoretisch unbegrenzte Strecken durch ein nichtlineares Medium propagieren.

⇒ **Kompensation der Dispersion durch nichtlineare Effekte**



Entdeckung der Solitonen

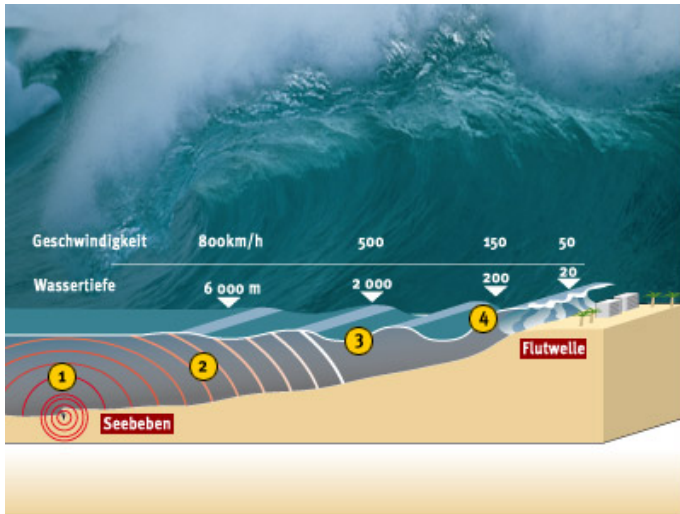
1834 John Scott Russel: Beobachtung der Solitonen in einem engen Kanal in Scotland
Entstanden durch Bsemsen eines Bootes



Solitonen auf LWL

1973	Hasegawa	theoretische Vorhersage der Existenz von Solitonen auf Lichtwellenleitern
1980	Mollenhauer	erster experimenteller Nachweis
1992	AT&T Bell Labs	fehlerfreie 5 Gbit-Übertragung über 15.000km
1996	Fujitsu, Bell Labs NTT Labs	1 Tbit-Übertragungen

Tsunami



Pororoqa



Soliton-Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

kdv-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \pm \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

kp-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0$$

Sin-Gordon-Gleichung

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \cdot |u|^2 \cdot u = 0$$

nichtlineare Schrödinger-Gleichung

nichtlineare Schrödinger-Gleichung (Gross-Pitaevskii-Gleichung)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)^2}{\partial x^2} + g \cdot |\Psi(x, t)|^2 \cdot \Psi(x, t) = 0$$

$g \cdot |\Psi|^2$: Wechselwirkungsterm

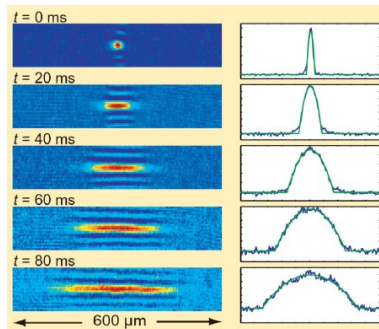
$g < 0$ für atraktive, $g > 0$ für abstoßende WW

Beschreibt z. B

- Bose-Einstein-Kondensat schwach wechselwirkender Atome bei $T=0$
- Ausbreitung eines Licht-Wellenpaketes im Glasfaser
- Ozeanwellen

Verhalten der Bose-Einstein-Kondensat

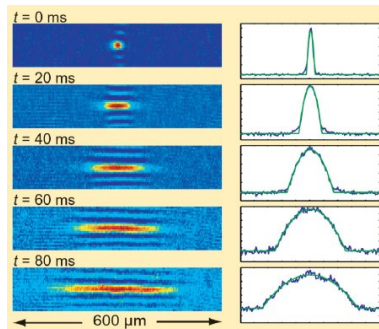
Alle Bosonen
befinden sich bei $T=0$ im Grundzustand
 \Rightarrow Makroskopische Wellenfunktion
 \Rightarrow sichtbare Quanteneffekt



Verhalten der Bose-Einstein-Kondensat

Alle Bosonen
befinden sich bei $T=0$ im Grundzustand
 \Rightarrow Makroskopische Wellenfunktion
 \Rightarrow sichtbare Quanteneffekt

- Dispersion
- Interferenz usw

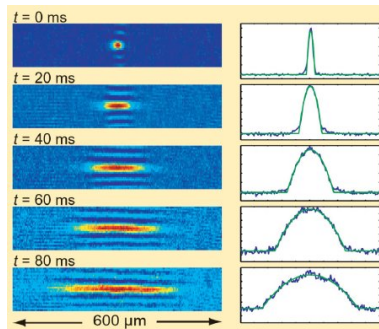


Verhalten der Bose-Einstein-Kondensat

Alle Bosonen
befinden sich bei $T=0$ im Grundzustand
 \Rightarrow Makroskopische Wellenfunktion
 \Rightarrow sichtbare Quanteneffekt

- Dispersion
- Interferenz usw

Wie können Solitonen im BEC bilden?



BEC schwach wechselwirkender Atome

WW ($g \cdot |\Psi|^2$) der Atome kann Zerlaufen der Wellenfunktion kompensieren

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + g \cdot |\Psi(x, t)|^2 \cdot \Psi(x, t) = 0$$

⇒ Soliton als Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung

BEC schwach wechselwirkender Atome

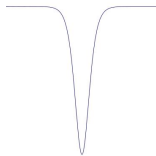
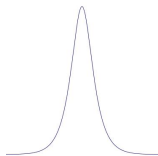
WW ($g \cdot |\Psi|^2$) der Atome kann Zerlaufen der Wellenfunktion kompensieren

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + g \cdot |\Psi(x, t)|^2 \cdot \Psi(x, t) = 0$$

⇒ Soliton als Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$\Psi(x, t) = a \cdot \text{sech}(a(x - x_0 - v(t - t_0))) \cdot e^{-i(vx + \frac{1}{2}(a^2 - v^2)(t - t_0))} \quad (\text{Für } g < 0)$$

$$\Psi(x, t) = iv + \sqrt{a^2 - v^2} \tanh(\sqrt{a^2 - v^2}(x - x_0) - v \cdot (t - t_0)) \quad (\text{Für } g > 0)$$



Anzahl der Atome in einem Soliton

Das lineare Auseinanderfließen von der Anzahl der Atome nicht abhängig

Je mehr Atome im Kondensat, desto größer die anziehende WW

Anzahl der Atome in einem Soliton

Das lineare Auseinanderfließen von der Anzahl der Atome nicht abhängig

Je mehr Atome im Kondensat, desto größer die anziehende WW
⇒ Es gibt eine Bestimmte Anzahl der Atome, die ein Soliton enthalten kann.

Experimentelle Beobachtung

Experimentelle Beobachtung

- Beschreibung der Solitonen durch Gross-Pitaevskii-Gleichung sehr gut
Abweichung der Theorie von der Messung unter paar %

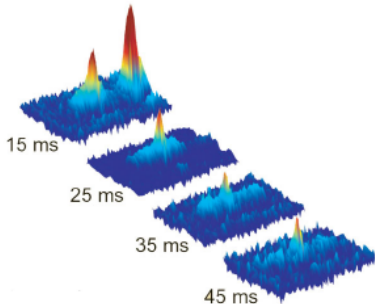


Abbildung: BEC aus Rubidium

Experimentelle Beobachtung

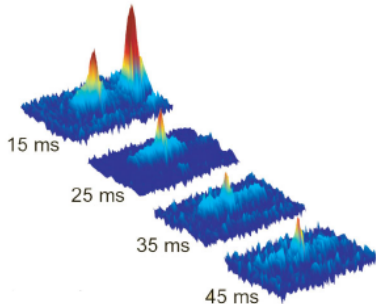


Abbildung: BEC aus Rubidium

Experimentelle Beobachtung

- Beschreibung der Solitonen durch Gross-Pitaevskii-Gleichung sehr gut
Abweichung der Theorie von der Messung unter paar %
- ABER: nur Theorie für $T=0$
Theoretisch sehr schwierig für höherer Temperatur

Numerische Methode zum Lösen der NLSG

Explizite Methode

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)^2}{\partial x^2} + g \cdot |\Psi(x, t)|^2 \cdot \Psi(x, t) = 0$$

Mit $\hbar = m = 1$

$$\frac{\Psi_i^{n+1} - \Psi_i^n}{\Delta t} = \frac{i}{2} \frac{\Psi_{i+1}^n - 2\Psi_i^n + \Psi_{i-1}^n}{\Delta x^2} - ig|\Psi_i^n|^2 \cdot \Psi_i^n$$

$$\Psi_i^{n+1} = \frac{i\alpha}{2} \Psi_{i+1}^n + (1 - i\alpha)\Psi_i^n + \frac{i\alpha}{2} \Psi_{i-1}^n - ig|\Psi_i^n|^2 \cdot \Psi_i^n$$

mit $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

Implizite Methode

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)^2}{\partial x^2} + g \cdot |\Psi(x, t)|^2 \cdot \Psi(x, t) = 0$$

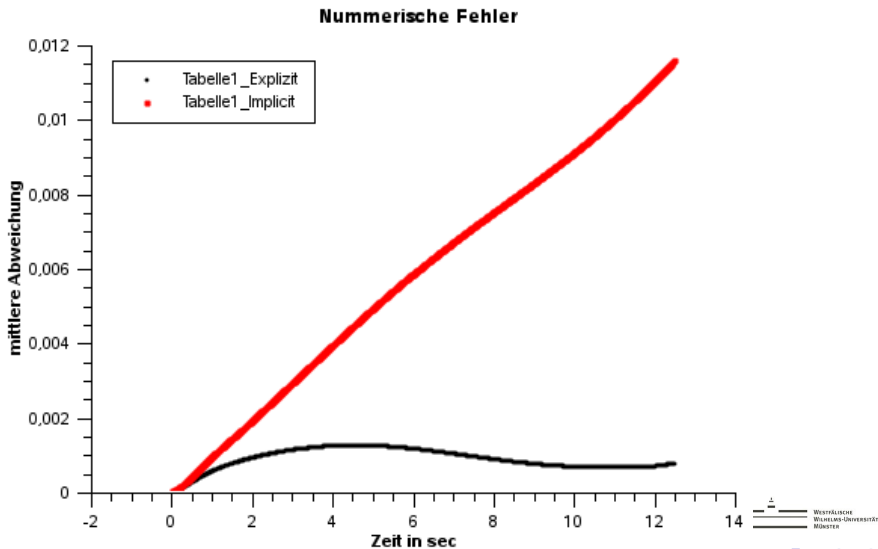
$$\Psi_i^{n+1} = \Psi_i^n + \frac{i\alpha}{2} (\Psi_{i+1}^{n+1} - 2\Psi_i^{n+1} + \Psi_{i-1}^{n+1}) - ig|\Psi_i^n|^2 \cdot \Psi_i^n$$

$$-\frac{i\alpha}{2} \Psi_{i-1}^{n+1} + (1 + i\alpha) \Psi_i^{n+1} - \frac{i\alpha}{2} \Psi_{i+1}^{n+1} = \Psi_i^n - ig|\Psi_i^n|^2 \cdot \Psi_i^n$$

$$A\Psi^{n+1} = \Psi^n - ig|\Psi^n|^2 \Psi^n$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 + i\alpha & -0.5 \cdot i\alpha & & 0 \\ -0.5 \cdot i\alpha & 1 + i\alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -0.5 \cdot i\alpha \\ 0 & & -0.5 \cdot i\alpha & 1 + i\alpha \end{pmatrix}$$

Numerische Fehler



Crank-Nicholson Methode

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

Crank-Nicholson Methode

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^n \quad \text{forward Euler}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^{n+1} \quad \text{backward Euler}$$

Crank-Nicholson Methode

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^n \quad \text{forward Euler}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^{n+1} \quad \text{backward Euler}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (F_i^{n+1} + F_i^n) \quad \text{Crank-Nicholson}$$

Beispiel: Schrödinger-Gleichung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -iH\Psi \quad H = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\Psi^{n+1} - \Psi^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} iH(\Psi^{n+1} + \Psi^n) \Rightarrow \left(1 + i\frac{\Delta t}{2}H\right) \Psi^{n+1} = \left(1 - i\frac{\Delta t}{2}H\right) \Psi^n$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\Psi_{i+1} - 2\Psi_i + \Psi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$-\frac{i\alpha}{4} \Psi_{i+1}^{n+1} + \left(1 + \frac{i\alpha}{2}\right) \Psi_i^{n+1} - \frac{i\alpha}{4} \Psi_{i-1}^{n+1} = \frac{i\alpha}{4} \Psi_{i+1}^n + \left(1 - \frac{i\alpha}{2}\right) \Psi_i^n + \frac{i\alpha}{4} \Psi_{i-1}^n$$

$$A\Psi^{n+1} = B\Psi^n$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 + 0.5i\alpha & -0.25 \cdot i\alpha & & & 0 \\ -0.25 \cdot i\alpha & 1 + 0.5i\alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -0.25 \cdot i\alpha \\ 0 & & & -0.25 \cdot i\alpha & 1 + 0.5i\alpha \end{pmatrix}$

und $B = A^*$

Split-Step Crank-Nicholson Methode

Nichtlineare Schrödinger-Gleichung

Split-Step Crank-Nicholson Methode

Nichtlineare Schrödinger-Gleichung

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = (H_w + H_0 + H_w) \Psi$$

$$\text{mit } H_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ und } H_w = \frac{1}{2} (V(x) + g|\Psi|^2)$$

Split-Step Crank-Nicholson Methode

Nichtlineare Schrödinger-Gleichung

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = (H_w + H_0 + H_w) \Psi$$

$$\text{mit } H_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ und } H_w = \frac{1}{2} (V(x) + g|\Psi|^2)$$

Quantentheorie: Zeitliche Entwicklung der Quantenzustände durch
Zeitentwicklungsoperator U

$$\Psi(t) = U(t - t_0) \Psi(t_0) = e^{-i(t-t_0)H} \Psi(t_0)$$

ABER, Nur für zeitlich Konstanten H

Infinitesimalen Zeitentwicklung $t \rightarrow t + \Delta t \Rightarrow H \approx \text{const.}$

Split-Step Crank-Nicholson Methode

Nichtlineare Schrödinger-Gleichung

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = (H_w + H_0 + H_w) \Psi$$

$$\text{mit } H_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ und } H_w = \frac{1}{2} (V(x) + g|\Psi|^2)$$

Quantentheorie: Zeitliche Entwicklung der Quantenzustände durch
Zeitentwicklungsoperator U

$$\Psi(t) = U(t - t_0) \Psi(t_0) = e^{-i(t-t_0)H} \Psi(t_0)$$

ABER, Nur für zeitlich Konstanten H

Infinitesimalen Zeitentwicklung $t \rightarrow t + \Delta t \Rightarrow H \approx \text{const.}$

$$\Rightarrow \Psi(t + \Delta t) = e^{-i\Delta t \cdot H_w} \cdot e^{-i\Delta t \cdot H_0} \cdot e^{-i\Delta t \cdot H_w} \Psi(t) \quad \text{=====}$$

split-step Crank-Nicholson Methode

3 Schritte für die infinitesimale Zeitentwicklung

- 1 $\Psi^{n+\frac{1}{3}} = e^{-i\Delta t \cdot H_w} \psi^n$
- 2 $\Psi^{n+\frac{2}{3}} = e^{-i\Delta t \cdot H_0} \psi^{n+\frac{1}{3}}$
- 3 $\Psi^{n+1} = e^{-i\Delta t \cdot H_w} \psi^{n+\frac{2}{3}}$

split-step Crank-Nicholson Methode

3 Schritte für die infinitesimale Zeitentwicklung

- 1 $\Psi^{n+\frac{1}{3}} = e^{-i\Delta t \cdot H_w} \psi^n$
- 2 $\Psi^{n+\frac{2}{3}} = e^{-i\Delta t \cdot H_0} \psi^{n+\frac{1}{3}}$
- 3 $\Psi^{n+1} = e^{-i\Delta t \cdot H_w} \psi^{n+\frac{2}{3}}$

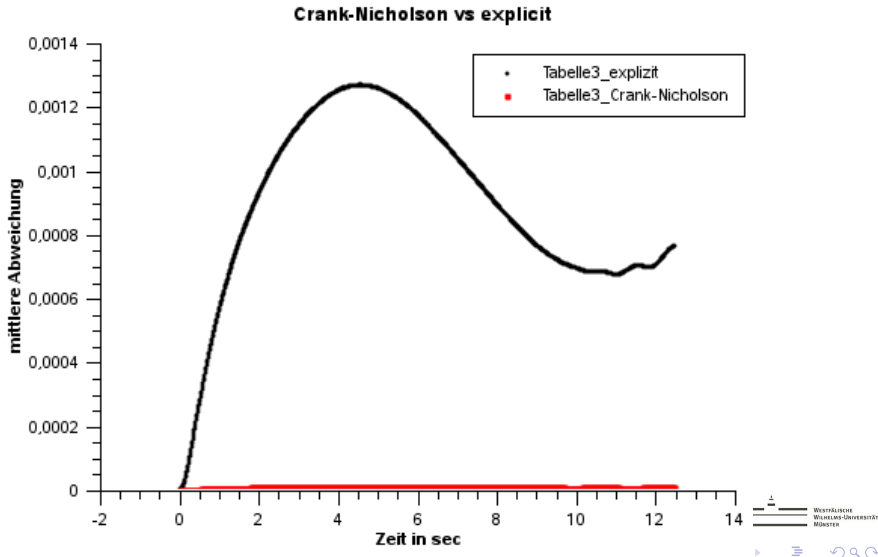
2. Schritt: Taylorentwicklung der exp. Funktion

$$\begin{aligned} \Psi^{n+\frac{2}{3}} &= (1 - i\Delta t H_0) \Psi^{n+\frac{1}{3}} \\ \frac{\Psi^{n+\frac{2}{3}} - \Psi^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta t} &= -iH_0 \Psi^{n+\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Crank-Nicholson Methode

$$\Rightarrow A\Psi^{n+\frac{2}{3}} = B\Psi^{n+\frac{1}{3}}$$

Numerische Fehler



Rechenaufwand

