T. 3 Elektromagnetische Felder

T 3.1. Homogene Wellengleichung, ebene Wellen

T 3.1.1. Herleitung

Ziel: Herleitung d. Wellengleichung für Felder im ladungsfreien Raum, d.h. $\rho = 0$

MW:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(III)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{(IV)}$$

lineare isotrope Medien

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad (*)$$

σ ... Leitfähigkeit

in MW:

$\vec{\nabla} \times$ (III):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Grassm.

$$\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\overset{\text{(I)}}{=} 0} - \Delta \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \overset{(*)}{=} -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0}$$

Falls $\sigma = 0$, Wellengleichung für elektr. Feld

Ausbreitungsgeschw. $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ hängt vom Medium ab

Ähnlich für magn. Feld mit Gl. (IV)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu\sigma (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$$

für $\sigma = 0$, Wellengl. für $\vec{B}$

Für nichtleitendes quellenfreies Medium ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$)

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

- gleiche Ausbreitungsgeschw. c
- komponentenweise lösbar

Zusammenhang Ausbreitungsgeschw. c mit Vakuumlichtgeschw. c_0

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c_0}{n}$$

mit $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ Brechungsindex

c .. Phasengeschwindigkeit

im Folgenden nehmen wir an, dass ε und μ frequenzunabhängig sind

T 3.1.2 Lösung der Wellengleichung (vgl. Kap. 1)

- Zunächst nur 1 Komponente Ψ (z.B. E_x oder B_x)

Erinnerung mech. Wellen:

- laufende ebene Wellen

$\Psi = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$ breitet sich in $\vec{k}$-Richtung aus

$\Psi = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$ ~ in $-\vec{k}$-Richtg. aus

- Zusammenhang zwischen Wellenzahl k und Frequenz ω

$$k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{c} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega = \frac{n\omega}{c_0}$$ Dispersionsrelation

(Beweis: Einsetzen in Wellengleichung)

- Verallgemeinerung auf 3 Komponenten

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\,e^{-i\omega t} = \vec{E}_0\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} \quad (1)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\,e^{-i\omega t} = \vec{B}_0\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} \quad (2)$$

wobei $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ Konstante, orts- und zeitunabhängige komplexe Vektoren

→ für physikalische Felder Realteil von $\vec{E}$, $\vec{B}$ aus (1), (2) nehmen

3.1.3. Polarisation

- Richtg. von $\vec{E}$, $\vec{B}$ heißt Polarisation des jeweiligen Feldes
  - neben Wellengleichg., gelten auch Maxwell Gl.

→ Elektr. Feld (1) in MW (I)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_0\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}\right) = i\vec{E}_0\cdot\vec{k}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} = 0$$

(komponentenweise überprüfen!)

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{k}\perp\vec{E}}$$

→ analog $\boxed{\vec{k}\perp\vec{B}}$

→ Magn. Feld (2) in MW (III)

elektr. ~ (1)

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_0\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}_0\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}\right)$$

$$\boxed{\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}} \quad (*) \rightarrow \vec{E}\perp\vec{B}$$

$\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ bilden rechtshändiges System

- Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$

$\vec{E}\perp\vec{k}$ und $\vec{B}\perp\vec{k}$, d.h. transversale Welle

- Bem: Beziehungen gelten auch für $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$

- i.A. $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ komplex, d.h. z.B.

$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + i\vec{E}_2$ $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ reell

$\vec{E}_0\perp\vec{k} \Rightarrow \vec{E}_1, \vec{E}_2 \perp \vec{k}$

physikalisches Feld

$E_0 \perp \kappa \quad \Rightarrow \quad E_1, E_2 \perp \kappa$

physikalisches Feld

$$\mathrm{Re}\,\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\vec{E}_0 \, e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{r} - i\omega t} \right)$$

$$\mathrm{Re}\,\vec{E} = \vec{E}_1 \cos(\vec{\kappa}\cdot\vec{r} - \omega t) - \vec{E}_2 \sin(\vec{\kappa}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

d.h. Gl. (1) Überlagerung zw ebener Wellen verschiedener Ausrichtung (Polarisation) mit Phasenverschiebung von $\pi/2$ $\quad \left[\sin\varphi = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right]$

φ sei das Argument

- je nach relativer Ausrichtung von $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ unterscheidet man verschiedene Fälle:

(a) Linear polarisiert

$\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2 \parallel \vec{e}_0 \qquad \vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_0 \qquad \vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_0$

$$\mathrm{Re}\,\vec{E} = \vec{e}_0 \left(E_1 \cos\varphi - E_2 \sin\varphi \right) = \vec{e}_0 \, E \cos(\varphi + \Delta\varphi)$$

$$\cos(\varphi + \Delta\varphi) = \cos\varphi \cos\Delta\varphi - \sin\varphi \sin\Delta\varphi$$

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \qquad \tan\Delta\varphi = \frac{E_2}{E_1}$$

$E\cos(\varphi + \Delta\varphi)$ linear polarisiert mit Phasenverschiebung

(b) elliptisch polarisiert

$\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$ mit $|\vec{E}_1| \neq |\vec{E}_2|$

sei $\vec{\kappa} = \vec{e}_z \kappa$ dann $\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_1 \qquad \vec{E}_2 = \vec{e}_y E_2$

$$\vec{E}\cdot\vec{E} = E^2 = \vec{E}_1\cdot\vec{E}_1 \cos^2\varphi + \vec{E}_2\cdot\vec{E}_2 \sin^2\varphi + 2\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 \sin\varphi\cos\varphi$$

↑ d.h. $\mathrm{Re}\,\vec{E}$ $\qquad$ $= 0$ da $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$

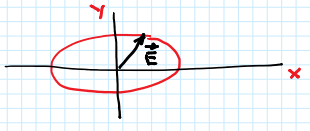
Phase $\varphi = \vec{\kappa}\cdot\vec{r} - \omega t$

$$E^2 = \underbrace{E_1^2 \cos^2\varphi}_{E_x^2} + \underbrace{E_2^2 \sin^2\varphi}_{E_y^2}$$

Parameterdarstellung einer Ellipse (in φ)

→ $\vec{E}$ folgt einer Ellipse

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$



(c) zirkular polarisiert

$\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$ mit $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = E$

$E_x^2 + E_y^2 = E^2$ → Kreis mit Radius E

dabei $E_1 = E_2$ rechts zirkular polarisiert

$E_1 = -E_2$ links ~

$\vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_x \qquad \vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_y$

(d) $\vec{E} \quad \vec{E} \perp \vec{\kappa}$ aber sonst beliebig

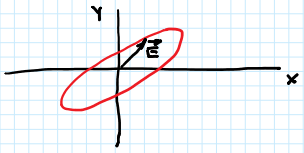
Zerlegung $\vec{E}_2 = \vec{E}_{2\parallel} + \vec{E}_{2\perp}$ mit $\vec{E}_{2\parallel} \parallel \vec{E}_1$, $\vec{E}_{2\perp} \perp \vec{E}_1$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \cos\varphi + \vec{E}_2 \sin\varphi$$
$$= \underbrace{\vec{E}_1 \cos\varphi + \vec{E}_{2\parallel} \sin\varphi}_{\tilde{\vec{E}}_1 \cos(\varphi+\Delta\varphi)} + \vec{E}_{2\perp} \sin\varphi$$

(siehe lin. polarisiert)

$$\vec{E} = \tilde{\vec{E}}_1 \cos(\varphi+\Delta\varphi) + \vec{E}_{2\perp} \sin\varphi \quad \text{mit } \tilde{\vec{E}}_1 \perp \vec{E}_{2\perp}$$

→ Ellipse die gegen Achsen verdreht ist



T 3.1.4. Zusammenhang Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ und Energieflussdichte

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$$

Beträge $E = \frac{\omega}{k} B = c B$ → $E^2 = c^2 B^2 = \frac{B^2}{\mu\varepsilon}$

Energiedichte (vgl. 2.2)

$$w_{feld} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2\right) = \varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2$$

Energiefluss (vgl 2.2., Poyntingvektor)

$$\vec{S}_p = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu}(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{EB}{\mu} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{E^2}{\mu c} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = c\, w_{feld} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

Energie fließt in Richtg. der Wellenausbreitung

T 3.2 Elektromagn. Feld im Leiter ($\sigma \neq 0$)

$$\begin{vmatrix} \Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \\ \Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \end{vmatrix} \quad (+)$$

Wellengleichg. Dämpfungsterme

Formal hat Gl. (+) die gleiche Lösung wie (1) u. (2) in T 3.1.2. aber Einsetzen in (+) ergibt sich hier

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu\sigma\omega = 0$$, d.h. Wellenzahl k ist nun im Allgemeinen Komplex

d.h. $$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu\sigma\omega = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{i\sigma}{\varepsilon\omega}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\,\frac{1}{\tau\omega}\right)$$

mit $\tau = \varepsilon/\sigma$ Relaxationszeit

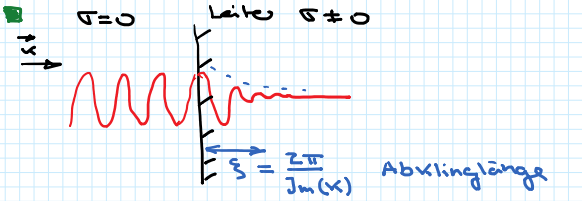
→ $$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - i\frac{1}{\tau\omega}}$$

$$k = \mathrm{Re}(k) + i\,\mathrm{Im}(k)$$

in 1d: $$\vec{E} \sim \underbrace{e^{i\,\mathrm{Re}(k)x}}\ \underbrace{e^{-\mathrm{Im}(k)x}}$$

in 1d: $\vec{E} \sim e^{i\,\mathrm{Re}(\kappa)x}\; e^{-\mathrm{Im}(\kappa)x}$

Oszillation — Dämpfung



$\sigma = 0$ | Leiter $\sigma \neq 0$

$\vec{x}$

$\xi = \frac{2\pi}{\mathrm{Im}(\kappa)}$ Abklinglänge

alternativ $\kappa^2 = \mu\omega^2 \underbrace{\left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right)}_{\varepsilon'}$ Komplexe Dielektrizitätskonstante

→ Komplexer Brechungsindex n'

Grenzfälle

- für $\sigma \to \infty \Rightarrow \tau \to 0,\ \xi \to 0$
  Welle dringt nicht in Leiter ein (Skin Effekt)
- für $\sigma \to 0 \Rightarrow \tau \to \infty,\ \xi \to \infty$
  Welle dringt ungehindert in Isolatoren ein

Eindringtiefe sichtbares Licht in Metalle (Kupfer)

$\tau = 10^{-19}\,s$ Licht $\lambda = 500\,nm = 5 \cdot 10^{-7}\,m$

$c_0 = 3 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$

$\rightarrow \omega = \frac{c_0}{\lambda} \approx 10^{+15}\,s^{-1} \rightarrow \frac{1}{\tau\omega} \approx 10^4$

d.h. bis $\lambda \approx 10^{-3}\,m$ ist $\mathrm{Re}(\kappa)$ vernachlässigbar

$\rightarrow \mathrm{Im}(\kappa) \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\tau/\tau\omega}$ $\quad \xi = \frac{2\pi}{\mathrm{Im}(\kappa)} = 2\pi\lambda\sqrt{\tau\omega} \approx 0.1\,\lambda$

3.3. Inhomogene Wellengleichung –

3.3.1. Komponenten und Greensche Funktion

Ziel: Lsg. der Wellengleichungen für die Potentiale falls $\rho \neq 0$, $\vec{j} \neq 0$

Differentialgl. für Potentiale (Kap. 2.2)

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j}$$

hier für beliebige Medien d.h. $\varepsilon_0, \mu_0 \rightarrow \varepsilon, \mu$ mit $\varepsilon\mu = \frac{1}{c^2}$

$\Rightarrow$ In Lorentzeichung sind Komponenten entkoppelt

Form für jede Komponente Ψ

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -f(\vec{r},t)$$

wobei $f(\vec{r},t)$ eine bekannte Quelle sei

Lsg. durch Methode der Greenschen Funktion
(vgl. Formelsammlg. aus Phy 2)

- löst Wellengleichg. (bzw. Poissongl. für stationäre Probleme)
für Punktquellen $f(\vec{r},t) \longrightarrow \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0)\,\delta(t-t_0)$

- vollständige Lsg Ψ : Superposition für die physikalische Quelldichte, die aus lauter Punktladungen zusammengesetzt wird

- damit wird die Geometrie des Problems in die Greensche Funktion kodiert

Greensche Funktion

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r},t,\vec{r}',t') = -\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t') \qquad (*)$$

Definition von G

- Translationsinvarianz des Raumes, z.B. bei homogenen Medien
$G(\vec{r},\vec{r}',\dots) \longrightarrow G(\vec{r}-\vec{r}',\dots)$

- Explizite Zeitunabhängigkeit (Homogenität der Zeit)
$G(\dots,t,t') \longrightarrow G(\dots,t-t')$

→ damit $G(\vec{r}-\vec{r}',t-t')$

T 3.3.2 Berechnung der Greenschen Funktion
(wie Phy 2 T 6.3.3 + Zeitabhängigkeit)

(1) Separation der Zeitabhängigkeit

Fouriertransformation von G in der Zeit (vgl. T 7.2)

$$G(\vec{r}-\vec{r}',t-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dw\ \hat{G}(\vec{r}-\vec{r}',w)\,e^{-iw(t-t')}$$

Einsetzen in (*)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dw\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\hat{G}(\vec{r}-\vec{r}',w)\,e^{-iw(t-t')}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dw\ \left(\Delta + \frac{w^2}{c^2}\right)\hat{G}(\vec{r}-\vec{r}',w)\,e^{-iw(t-t')} \overset{(*)}{=} -\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')$$

- FT von $\delta(t-t')$

$$\delta(t-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw(t-t')}\,dw \qquad (**)$$

(vgl. Beispiel am Ende von T 7.2)

- Koeffizientenvergleich

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{G}(\vec{r}-\vec{r}',\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')} \qquad (***)$$

inhomogene Helmholtzsche Wellengleichung f. Punktquelle

(2) Ortsabhängigkeit

Lsg. von (***) mit Ansatz (ähnl. zu Phy.2 T 8.3)

$$\hat{G}(\vec{r}-\vec{r}',\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{\pm i\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (****)$$

gilt für jedes $\omega = \kappa c$

Interpretation: + auslaufende, − einlaufende } Kugelwelle

Kurzbereich: $|\vec{r}-\vec{r}'|$, Quelle → Ursprung
Benutzung von Kugelkoord.

damit wird Ansatz $G(R) = \frac{f(R)}{R}$ in $\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)G(R) = -4\pi\delta(R)$

in Kugelkoord.

$$\rightarrow \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left[R^2\frac{d}{dR}\frac{f(R)}{R}\right] + \frac{\omega^2}{c^2}\frac{f(R)}{R} = -4\pi\delta(R)$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left[-f + Rf'\right] = \frac{1}{R^2}\left[-f' + f' + Rf''\right] = \frac{f''}{R}$$

$$\rightarrow f'' + \frac{\omega^2}{c^2}f = -4\pi R\,\delta(R) = 0 \rightarrow f = e^{\pm i\kappa R} \quad \text{mit } \kappa = \frac{\omega}{c}$$

(∇ Fall $R=0$ muss eigentlich extra behandelt werden)

alternativ

$R>0$ $\qquad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)G(R) = 0$

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(RG(R)) + \frac{\omega^2}{c^2}G(R) = 0$$

mit $F(R) = RG(R)$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dR^2}F(R) + \frac{\omega^2}{c^2}F(R) = 0$$

$$\rightarrow \text{ebene Wellen} \quad F = ae^{\pm i\kappa R} \quad \text{mit } \kappa = \frac{\omega}{c}$$

$$\rightarrow G = \frac{F}{R} = a\,\frac{e^{\pm i\kappa R}}{R}$$

$R=0$ wird extra behandelt (Integral über ε-Kugel um 0, Grenzübergang $\varepsilon \to 0$)

gibt $a = 1$

Beweis für $r \to 0$ $\qquad r = |\vec{r}|$

V_ε ... Kugel vom Radius ε

rechte Seite (***):

$$\int d^3r\,(-4\pi)\,\delta^3(\vec{r}) = -4\pi$$

rechte Seite (***):

$$\int_{V_\varepsilon} d^3r \; (-4\pi)\, \delta^3(\vec{r}) \;=\; -4\pi$$

linke Seite (***):

$$\int_{V_\varepsilon} d^3r \; (\Delta + \kappa^2)\, \hat{G}(r) \;=\; \int_{V_\varepsilon} d^3r \; \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla} G(r)\right) + 4\pi\kappa^2 \underbrace{\int_0^\varepsilon dr\, \hat{G}(r)\, r^2}_{\to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0}$$

(in Kugelkoord.)

$$\overset{\text{Gauss}}{=} \oint_{A_\varepsilon} da \; \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{\nabla}}_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{e^{\pm i\kappa r}}{r}$$

$$= \oint_{A_\varepsilon} da \left(\pm i\kappa \frac{e^{\pm i\kappa r}}{r} - \frac{e^{\pm i\kappa r}}{r^2} \right)$$

$$= 4\pi\varepsilon^2 \left(\frac{\pm i\kappa e^{\pm i\kappa\varepsilon}}{\varepsilon} - \frac{e^{\pm i\kappa\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} -4\pi$$

Vollständige Lösung

Zeitabhängigkeit + Raumabhängigkeit + Rücktransformation

$$G(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \hat{G}(\vec{r}-\vec{r}', \omega)\, e^{-i\omega(t-t')}$$

$$\overset{(****)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, e^{i\omega\left[\pm\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'| - (t-t')\right]}$$

$$\overset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, \delta\left(t-t' \pm \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)$$

"$\pm$" impliziert, dass wir zwei partikuläre Lsg. der inhomogenen Wellengl. haben

$$\Rightarrow \quad \boxed{G_{ret}(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

retardierte Greensche Funktion

- Signal von $\vec{r}', t'$ kommt zur Zeit $t = t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ bei $\vec{r}$ an
- auch "kausale Greensche Funktion" genannt
- physikalische Lsg. für alle nichtrelativ. Probleme

$$\boxed{G_{av}(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t-t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

avancierte Greensche Fkt.

- Signal kommt von Quelle die zur Zeit $t' = t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} > t$ emittiert, d.h. in der

- Signal kommt von Quelle die zur Zeit $t' = t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} > t$ emittiert, d.h. in der Zukunft

→ unphysik. Lsg.

T 3.3.3. Anwendung auf Potentiale / inhomog. Wellengl.

Für eine Komponente

$$\Psi(\vec{r},t) = \underbrace{\Psi_0(\vec{r},t)}_{\text{allg. Lsg. der homogenen Wellengleichg}} + \underbrace{\int d^3r' \int dt'\; G(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\, f(\vec{r}',t')}_{\text{partikuläre Lsg. der inhomog. Gl. (mit Inhomogenität } f(\vec{r},t))}$$

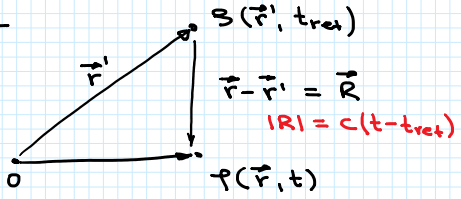
$$\Psi(\vec{r},t) = \Psi_0(\vec{r},t) + \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \int dt' \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} f(\vec{r}',t')$$

$$= \Psi_0(\vec{r},t) + \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{f\left(\vec{r}', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

t_{ret} retardierte Zeit

- Für skalares Potential φ (nur partikuläre Lsg.)

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$



- Für Vektorpotential $\vec{A}$ (partikulär)

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

- Berechnung des phys. Feldes
  - magn. Induktion $\vec{B}$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}_r \times \vec{A}(\vec{r},t)$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\int d^3r' \; \vec{\nabla}_r \times \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{j}\left(\vec{r}', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)$$

$$\overset{\text{Prod. regel}}{=} \frac{\mu}{4\pi}\int d^3r' \left[\left(\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \vec{j}(\vec{r}', t_{ret}) + \frac{\vec{\nabla}_r \times \vec{j}(\vec{r}', t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\int d^3r' \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}', t_{ret}) \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{1}{c}\frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}', t_{ret}) \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\right]$$

$\sim \frac{1}{R^2}$ retardierte Magnetfeld

$\sim \frac{1}{R}$ Strahlungsfeld

wobei R Abstand Quelle – Aufpunkt

- Elektrisches Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int d^3r' \left[\frac{\vec{S}(\vec{r}',t_{ret})\,(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{\dot{\vec{S}}(\vec{r}',t_{ret})\,(\vec{r}-\vec{r}')}{c\,|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right]$$

① ②

$$- \frac{\mu}{2\pi}\int d^3r' \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad \mu = \frac{1}{c^2\varepsilon}$$

③

$\dot{S} = -\nabla\cdot\vec{J} \sim \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ (*)
(Kontin. gl.)

① $\sim 1/R^2$ retard. Coulombfeld

② $\sim 1/R^2$ ~ Induktionsfeld [mit (*)]

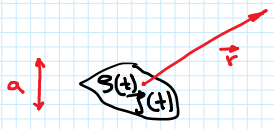
③ $\sim 1/R$ Strahlungsfeld (langreichweitig)

Für alle elektromagn. Felder hoher Frequenz (Licht, Radio) ist jede makroskopische Entfernung schon Fernbereich

→ nur langreichweitige Terme relevant

T 3.4. Hertzscher Dipol – Entsteh. e./m. Wellen

allg.: zeitlich oszillierendes System von Ladungen von Strömen in abgeschlossenen Raumbereich



typische Frequenzen ω
d.h. typische Wellenlängen $\lambda = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi}{\omega}c$

kleine Quellen $a \ll r, \lambda$

man unterscheidet: $a \ll r \ll \lambda$ Nahzone (statische Zone)
→ Retardierung unterdrückt
(ähnlich zu Magnetostatik mit parametrischer Zeitabhängigkeit)

$a \ll r \simeq \lambda$ intermediäre Zone

$a \ll \lambda \ll r$ Fernzone (Strahlungszone)

Vorgehen im allg. Fall (Nolting 4.S.2)

- Fourierzerlegung von $S, \vec{j}$ nach Frequenzen
- Eingehen in $\vec{A}, \varphi$ (Kap 3.3)
- Taylorentw. für $a \ll \lambda, r$
- zonenspezifische Näherungen

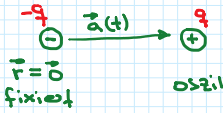
Beispiel: Oszillierender Dipol bei $\vec{r}=0$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(t)\,\delta(\vec{r})$$

$\vec{j}(t) = \dot{\vec{p}}(t)$ Zeitabhängigkeit des Dipolmoments

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(t)\,\delta(\vec{r})$$

$$\vec{j}(t) = \dot{\vec{p}}(t)$$ Zeitableitg. des Dipolmoments



$$\vec{j} = \dot{a} q\,\delta(\vec{r}-\vec{a}(t)) = \dot{\vec{p}}\,\delta(\vec{r}-\vec{a}(t))$$

- Einsetzen in retardiertes Potential

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|r-\vec{r}'|}\,d^3r'$$

gibt $$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$ (Dipol bei $\vec{r}=0$

- Lorentzeichung gibt skalares Pot.

Integr. in Zeit ↓

$$\dot{\varphi} = -c^2\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{r}\,\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{r}\,\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) + \text{zeitunabh. Fkt.}$$

nur Interesse am Wellen

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\underbrace{\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{p}_{ret}}_{①} + \frac{1}{c}\,\dot{\vec{p}}_{ret}\cdot\frac{\vec{r}}{r^2}\right) \Leftarrow \nabla\cdot\vec{A} \neq 0$$

$\vec{p}_{ret} \equiv \vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)$ retardiert

① analog zum statischen Fall

- Felder

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\overbrace{\frac{1}{c^2}\,\frac{1}{r}\,\ddot{\vec{p}}_{ret}}^{\text{von } \dot{\vec{A}}} + \overbrace{\frac{\vec{p}_{ret}}{r^3} - \frac{3}{r^5}\left(\vec{r}\cdot\vec{p}_{ret}\right)\vec{r}}^{\text{1. Term in } \varphi} - \frac{1}{c}\,\frac{1}{r^4}\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}_{ret}\right)\vec{r} + \overbrace{\frac{1}{c^2}\,\frac{1}{r^3}\left(\ddot{\vec{p}}_{ret}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}^{\text{2. Term in } \varphi} + \frac{1}{c}\,\frac{\dot{\vec{p}}_r}{r^2} - \frac{2}{c}\,\frac{1}{r^4}\left(\dot{\vec{p}}_{ret}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}\right] \quad (*)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\,\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{r}\,\dot{\vec{p}}_r\right) = \frac{\mu}{4\pi}\left[\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\times\dot{\vec{p}}_r + \frac{1}{r}\,\vec{\nabla}\times\dot{\vec{p}}_r\right]$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi}\left[\frac{\vec{r}}{r^3}\times\dot{\vec{p}}_{ret} + \frac{1}{c}\,\frac{\vec{r}}{r^2}\times\ddot{\vec{p}}_{ret}\right]$$

Bem: $\vec{\nabla}\times\vec{a}(r) = \frac{\vec{r}}{r}\times\frac{\partial}{\partial r}\vec{a}(r)$

$$\vec{B} = -\frac{\mu}{4\pi r}\,\frac{\vec{r}}{r}\times\left(\frac{\dot{\vec{p}}_{ret}}{r} + \frac{\ddot{\vec{p}}_{ret}}{c}\right) \quad (**)$$

- Näherungen

- Statische Grenzfall $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow 0$ in (*) u. (**)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{3}{r^5}\left(\vec{r}\cdot\vec{p}\right)\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$$

$$\vec{B} = 0$$

- zonenspezifisch

Bem: Dimensionsbetrachtung (Größenordnungsbetrachtg.)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} \approx \frac{a}{\lambda}$ $\quad a$ ... typ. Größe für Feld $\vec{a}$

λ ... typ. Länge für räuml. Variation

$\frac{\partial}{\partial t} a \approx \frac{a}{\tau}$ $\quad \tau$ .. typ. Zeit (z.B. Periode zeitl. Änderungen)

$\omega \sim 1/\tau$ typ. Frequenz

für raumzeitlichen Prozess: $\lambda \sim \frac{v}{\omega} \sim v\tau$

v ... typ. Geschwindigkeit

hier: $\lambda \sim \frac{c}{\omega} \sim c\tau$

- Größenordnungen $\vec{E}$-Feld

(*): $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{c^2 r}\ddot{\vec{p}}_r + \frac{\dot{\vec{p}}_r}{r^3} - 3\frac{(\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}_r)\vec{r}}{r^5} - \frac{1}{cr^4}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}_r)\vec{r}\right.$

$\sim \frac{p}{\lambda^2 r}$ $\quad \sim \frac{p}{r^3}$ $\quad \sim \frac{p}{r^3}$ $\quad \sim \frac{p}{\lambda r^2}$

$\sim \frac{p}{r^3}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2$ $\quad \sim \frac{p}{r^3}$ $\quad \sim \frac{p}{r^3}$ $\quad \sim \frac{p}{r^3}\left(\frac{r}{\lambda}\right)$

$\left. - \frac{1}{c^2 r^3}(\ddot{\vec{p}}_r\cdot\vec{r})\vec{r} + \frac{1}{cr^2}\dot{\vec{p}}_r - \frac{2}{cr^4}(\dot{\vec{p}}_r\cdot\vec{r})\vec{r}\right]$

$\sim \frac{p}{\lambda^2 r}$ $\quad \sim \frac{p}{\lambda r^2}$ $\quad \sim \frac{p}{\lambda r^2}$

$\sim \frac{p}{r^3}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2$ $\quad \sim \frac{p}{r^3}\left(\frac{r}{\lambda}\right)$ $\quad \sim \frac{p}{r^3}\left(\frac{r}{\lambda}\right)$

(**): $\vec{B} = -\frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r}\times\left(\frac{\dot{\vec{p}}_r}{r^2} + \frac{\ddot{\vec{p}}_r}{cr}\right)$

$\sim \frac{pc}{\lambda r^2}$ $\quad \sim \frac{pc}{\lambda^2 r}$

$\sim \frac{pc}{r^3}\left(\frac{r}{\lambda}\right)$ $\quad \sim \frac{pc}{r^3}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2$

$\vec{p}_{ret} = \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ $\qquad$ t in Einheiten von τ

$t = \tau\tilde{t}$ $\quad \tilde{t}$ dimensionslose Zeit

$= \vec{p}\left(\tau\tilde{t} - \frac{r}{\lambda}\tau\right)$

$= \vec{p}\left(\tau\left(\tilde{t} - \frac{r}{\lambda}\right)\right)$

Nahzone $\quad r \ll \lambda$

$\frac{r}{\lambda} \ll 1$ $\quad \vec{p}_r = \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \approx \vec{p}(t)$ $\qquad \frac{r}{\lambda}$ Kleinheitsparameter

$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\vec{p}}{r^3} - 3\frac{(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}}{r^5}\right] + O\left(\frac{r}{\lambda}\right)$

$\vec{B} = \underbrace{-\frac{\mu}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r}\times\dot{\vec{p}}}_{O\left(\frac{r}{\lambda}\right)} + O\left(\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2\right)$

Intermediäre Zone $r \approx \lambda \rightarrow \frac{r}{\lambda} \approx 1$

$\Rightarrow$ Alle Terme gleiche Größenordnung $\rightarrow$ Keine Näherungen mgl.

Fernzone $\frac{r}{\lambda} >> 1$, Kleinheitsparameter $\frac{\lambda}{r} << 1$

$\rightarrow$ Terme $\sim \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2$ dominieren , $\rightarrow$ Terme $\sim \left(\frac{r}{\lambda}\right)^1$ und $\sim \left(\frac{r}{\lambda}\right)^0 \approx O(1)$ vernachlässigbar

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{c^2 r}\ddot{\vec{p}}_r - \frac{1}{c^2 r^3}\left(\ddot{\vec{p}}_r \cdot \vec{r}\right)\vec{r}\right) + O\left(\frac{\lambda}{r}\right)$$

$$\vec{E} \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{rc^2}\left(\ddot{\vec{p}}_r - \left(\ddot{\vec{p}}_r \cdot \vec{n}\right)\vec{n}\right) \quad \text{mit } \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

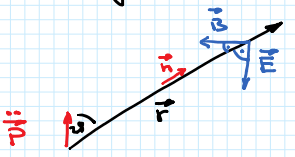
$1 \rightarrow \vec{n}\cdot\vec{n}$; oder $\left(\mathbb{1} - \vec{n}\vec{n}\right)\cdot \ddot{\vec{p}}_r$

$$\vec{E} \overset{\text{Gaussmann}}{=} \frac{\mu}{4\pi r}\left(\ddot{\vec{p}}_r \times \vec{n}\right) \times \vec{n} \tag{*}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi r c}\left(\ddot{\vec{p}}_r \times \vec{n}\right) \quad \text{da} \quad \vec{E} = c\vec{B} \times \vec{n}$$

Fernfeld d. Hertzschen Dipols

Veranschaulichung:



$\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ nach aussen laufende Welle

transverse lineare Polarisation

Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Feld wie bei ebener Welle

$\vec{E}, \vec{B} \sim \frac{1}{r}$ langsamer Abfall durch Ausstrahlung

$\vartheta = 0, \pi$ $\quad \vec{E}, \vec{B} = 0$

$\vartheta = \pi/2$ $\quad \vec{E} \updownarrow \ddot{\vec{p}}_r$ $\quad (|\vec{E}| \text{ max.})$

$$|\vec{E}| = \frac{|\ddot{\vec{p}}_r|}{4\pi\varepsilon r c^2}\left(1 - \cos^2\vartheta\right)$$

Energieabstrahlung eines Hertzschen Dipols

Fernfeld $\quad |\vec{E}| = c|\vec{B}|$

$\rightarrow w_{feld} = \frac{\varepsilon}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 = \frac{1}{\mu}B^2$ Energiedichte

Poyntingvektor $\quad \vec{S}_p = \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{c}{\mu}\left(\vec{B}\times\vec{n}\right)\times\vec{B}$

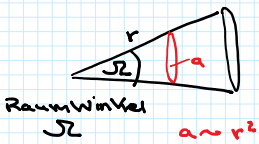
$\overset{\text{Grassm.}}{=} \frac{c}{\mu}\left(\vec{n}\vec{B}^2 - \underbrace{\left(\vec{n}\cdot\vec{B}\right)}_{=0 \text{ da } \vec{n}\perp\vec{B}}\vec{B}\right)$

$$\vec{S}_p = \frac{c}{\mu}B^2\vec{n} = c\,w_{feld}\,\vec{n}$$

$$|\vec{S}_p| = c\,w_{feld} = \frac{c}{\mu}B^2 \overset{\text{mit (*)}}{=} \frac{\mu}{c}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{\left(\ddot{\vec{p}}_r \times \vec{n}\right)^2}{r^2}$$

$$\left(\ddot{\vec{p}}_{ret} \times \vec{n}\right)^2 = |\ddot{\vec{p}}_{ret}|^2 \sin^2\vartheta$$

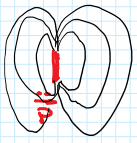
r- Abhängigkeit



Energiestrom pro Raumwinkel

$|\vec{S}_p| a \sim \frac{1}{r^2} r^2 \sim r^0 = \text{const}$

ϑ - Abhängigkeit



Intensität max für $\vec{r} \perp \ddot{\vec{p}}$

min für $\vec{r} \parallel \ddot{\vec{p}}$

Argument anders herum:

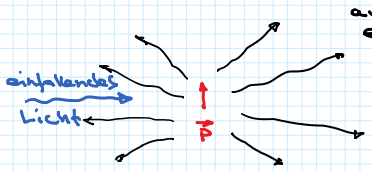
totaler Energiestrom = Konst (unabh. vom Abstand)

$\rightarrow \frac{\text{Energiestrom}}{\text{Fläche}} \sim \frac{1}{r^2} \rightarrow E, B \sim \frac{1}{r}$

ω - Abhängigkeit (ω typ. Frequenz) $\left[\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \omega\right]$

$|\vec{S}_p| \sim |\ddot{\vec{p}}|^2 \sim \omega^4$

Rayleigh Streuung – Streuung am Hertzschen Dipol



ω_0 Eigenfrequenz des Dipols

erzwungene Schwingung mit ω

$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow$ Amplitude unabhängig von ω

Intensität der Streuwelle $\sim \omega^4$

d.h. kurzwelliges Licht wird am meisten gestreut

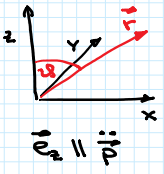
→ blaues Licht stärker gestreut als rot

→ blauer Himmel

- ausgestrahlte Leistung

$$N = \oint_A \vec{S}_p \cdot d\vec{a} \overset{\text{Kugel-schale}}{=} \oint_A S_p \, da = \oint_A S_p \, r^2 \, d\Omega$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{\mu}{4\pi c} \ddot{p}^2 \underbrace{\frac{1}{4\pi} \oint \sin^2\vartheta \, d\Omega}_{\overline{\sin^2\vartheta}}$$



$\cos\vartheta = \frac{z}{r} \quad \cos^2\vartheta = \frac{z^2}{r^2} \quad \sin^2\vartheta = \frac{x^2+y^2}{r^2}$

$\overline{\frac{x^2}{r^2}} = \overline{\frac{y^2}{r^2}} = \overline{\frac{z^2}{r^2}} = \frac{1}{3}$

da $\overline{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta} = 1$

und x, y, z gleichberechtigt

$\rightarrow \overline{\sin^2\vartheta} = \frac{2}{3}$

→ Gesamtleistg. $N = \frac{1}{6} \frac{\mu}{\pi c} \ddot{p}^2$

Gemittelte Leistg. pro Zeit (Zeitmittel)

$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos\omega t$ harmonische Zeitabh.

$\ddot{\vec{p}} = -\vec{p}_0 \omega^2 \cos\omega t$

$$\overline{\left(\ddot{\vec{p}}\right)^2}^t = \omega^4 p_0^2 \, \overline{\cos^2 \omega t}^t = \frac{1}{2}\omega^4 p_0^2$$

$$\overline{N}^t = \frac{\mu}{12\pi c}\omega^4 p_0^2 = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\varepsilon c^3}$$