

# **Modul Physik III: Wellen und Quanten**

Prof. Dr. G. Münster, Prof. Dr. H. Zacharias

WS 2010/11

Skriptum  
zusammengestellt von Hendrik Flasche

Dieses Skriptum beinhaltet eine Zusammenstellung von Inhalten der Vorlesung Physik III. Hinweise auf Fehler sind willkommen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Wellen</b>	<b>5</b>
1.1	Beschreibung von Wellen . . . . .	5
1.1.1	Wellen in einer Dimension . . . . .	6
1.1.2	Wellen in drei Dimensionen . . . . .	8
1.1.3	Wellengleichung . . . . .	11
1.1.4	Fourier-Integrale . . . . .	18
1.1.5	Wellen in zwei Dimensionen . . . . .	20
1.1.6	Stehende Wellen . . . . .	21
1.1.7	Doppler-Effekt . . . . .	22
1.2	Wellenausbreitung in Medien . . . . .	24
1.2.1	Festkörper . . . . .	24
1.2.2	Gase . . . . .	25
1.2.3	Akustik . . . . .	26
1.2.3.1	Druck, Energiedichte . . . . .	28
1.2.3.2	Erzeugung von Schallwellen . . . . .	28
1.2.3.3	Physik der Musikinstrumente . . . . .	29
1.3	Elektromagnetische Wellen . . . . .	30
1.3.1	Elektromagnetische Wellen im Vakuum . . . . .	31

1.3.2	Energie und Impuls elektromagnetischer Wellen . . . . .	35
1.3.3	Erzeugung elektromagnetischer Wellen . . . . .	38
1.3.3.1	Lösung der inhomogenen Wellengleichung . . . . .	39
1.3.3.2	Retardierte Potenziale . . . . .	43
1.3.3.3	Dipolstrahlung . . . . .	43
1.3.3.4	Erzeugung elektromagnetischer Wellen . . . . .	48
1.3.3.5	Abstrahlung beschleunigter Ladungen . . . . .	50
1.3.4	Elektromagnetisches Spektrum . . . . .	53
1.3.5	Elektromagnetische Wellen in Materie . . . . .	54
1.3.5.1	Wellen in Isolatoren . . . . .	54
1.3.5.2	Dispersion . . . . .	55
1.3.5.3	Kohärente und inkohärente Streuung . . . . .	59
1.3.5.4	Wellen in leitenden Medien . . . . .	66
1.3.6	Wellenleitung . . . . .	70
<b>2</b>	<b>Optik</b> . . . . .	<b>78</b>
2.1	Reflexion und Brechung . . . . .	78
2.1.1	Brechungsgesetz . . . . .	78
2.1.2	Amplituden reflektierter und gebrochener Wellen . . . . .	80
2.2	Geometrische Optik . . . . .	85
2.2.1	Grundaxiome der geometrischen Optik . . . . .	85
2.2.2	Optische Abbildungen . . . . .	86
2.2.3	Spiegel . . . . .	87
2.2.4	Linsen . . . . .	92
2.2.4.1	Brechung an einer Kugelfläche . . . . .	92
2.2.4.2	Linsen . . . . .	93

2.2.4.3	Linsensysteme . . . . .	97
2.2.4.4	Linsenfehler . . . . .	98
2.3	Wellenoptik . . . . .	100
2.3.1	Interferenz . . . . .	100
2.3.2	Michelson-Interferometer . . . . .	102
2.3.3	Vielstrahl-Interferenz . . . . .	105
2.3.4	Dielektrische Spiegel . . . . .	105
2.3.5	Beugung . . . . .	105
2.3.6	Beugungsgitter . . . . .	112
2.3.7	Räumliches Auflösungsvermögen optischer Systeme . .	115
2.4	Polarisation und Kristalloptik . . . . .	116
2.4.1	Polarisation elektromagnetischer Wellen . . . . .	116
2.4.2	Doppelbrechung . . . . .	117
2.4.3	Interferenz mit polarisiertem Licht . . . . .	121
2.4.4	Polarisation bei Streuung . . . . .	123
2.4.5	Optische Aktivität . . . . .	123
<b>3</b>	<b>Wellen und Quanten</b>	<b>125</b>
3.1	Temperaturstrahlung und Lichtquanten . . . . .	125
3.1.1	Planck'sches Strahlungsgesetz . . . . .	125

# Kapitel 1

## Wellen

### 1.1 Beschreibung von Wellen

*Schwingung:* zeitliche Änderung einer physikalischen Größe, z.B. periodisch

*Welle :* Vorgang, der von Ort und Zeit abhängt,  
wobei viele schwingungsfähige Systeme beteiligt sind.

Eine Welle ist ein Vorgang, bei dem sich eine Schwingung infolge von Kopplungen an benachbarte schwingungsfähige Systeme im Raum ausbreitet.

#### Beispiele:

- Wellen in einem Seil
- Feder
- Oberflächenwellen auf Wasser
- Schall
- Dichtewellen in einer Menschenmenge
- Licht

## Beschreibung:

Physikalische Größe, die sich wellenförmig ausbreitet.

Zum Beispiel:

Auslenkung des Seils  
Höhe der Wasseroberfläche  
Dichte eines Materials

allgemein: „Auslenkung“ als Funktion von Ort und Zeit.

mathematische Beschreibung: Wellenfunktion  $f(\vec{r}, t)$

### 1.1.1 Wellen in einer Dimension

Koordinaten:  $x, t$

#### Beispiel:

- Seil.  $f(x, t)$  : Auslenkung des Seils
- Orgelpfeife.  $f(x, t)$  : Dichte der Luft

*Harmonische Wellen:* sinusförmige Gestalt im Raum,  
harmonische Zeitabhängigkeit

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t - \varphi_0)$$

$x$  fest: harmonische Zeitabhängigkeit

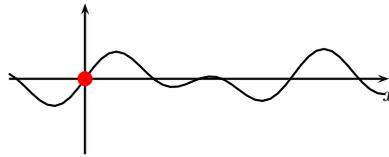
Kreisfrequenz  $\omega$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

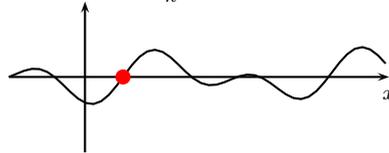
$t$  fest: sinusförmige Funktion

Zeitabhängigkeit: betrachte Punkt  $t = 0, x = 0$  ( $\varphi_0 = 0$ )

$f = 0$ , Nulldurchgang



spätere Zeit,  $kx - \omega t = 0 \rightarrow x = \frac{\omega}{k}t$



Der Nulldurchgang wandert nach rechts mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{k}$$

Allgemein: Jeder Punkt mit festem  $f(x, t)$  wandert mit der Geschwindigkeit  $v$  nach rechts.

- Amplitude:*  $A$  : Maximalwert von  $f$ .
- Phase:*  $kx - \omega t - \varphi_0$
- Wellenberg:* Punkt, an dem  $f$  maximal ist.
- Wellenlänge:*  $\lambda$  = Abstand zwischen zwei Wellenbergen
- Wellenzahl:*  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- Phasengeschwindigkeit:*  $v = \frac{\omega}{k} = \lambda \cdot \nu$

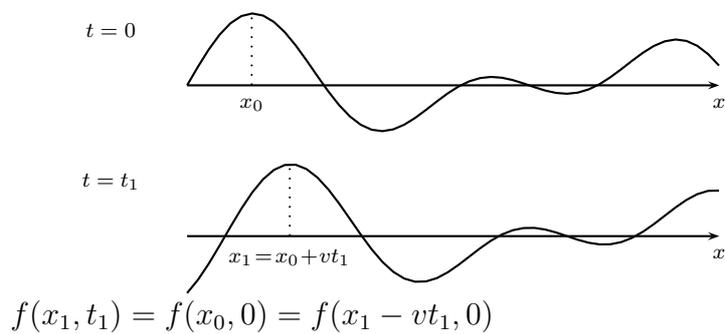
rechtslaufende harmonische Welle:

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

linkslaufende harmonische Welle:

$$f(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$

Allgemeine Welle: betrachte stabile Wellen



rechtslaufende stabile Welle:  $f(x, t) = f(x - vt, 0) \equiv h_-(x - vt)$

linkslaufende stabile Welle:  $f(x, t) = f(x + vt, 0) \equiv h_+(x + vt)$

Überlagerung

$$\Rightarrow f(x, t) = h_-(x - vt) + h_+(x + vt)$$

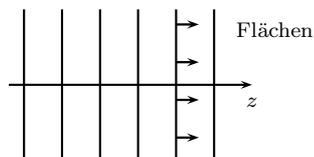
### 1.1.2 Wellen in drei Dimensionen

Wellenfunktion:  $f(\vec{r}, t)$

Betrachte harmonische Wellen mit Ausbreitung in  $z$ -Richtung:

$$f(\vec{r}, t) = A \sin(kz - \omega t - \varphi_0)$$

Wellenfunktion ist unabhängig von  $x, y$ . Die Wellenberge bilden Flächen.



*Phasenfläche:* Fläche auf der  $f(\vec{r}, t) = \text{const.}$ ,  
bewegt sich durch den Raum.

Hier:  $kz - \omega t = \text{const.}$

Ausbreitung in beliebiger Richtung  $\vec{n}$ ,  $|\vec{n}| = 1$ .

Phasenfläche steht senkrecht auf  $\vec{n}$ , d.h.  $\vec{r} \cdot \vec{n} = \text{const.}$  Schreibe

$$\vec{k} = k\vec{n} \quad (\text{Wellenvektor})$$

$$|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Der Ausdruck für eine ebene harmonische Welle im Raum lautet also:

$$f(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi_0) \quad (\text{reelle Schreibweise})$$

$$= C e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{komplexe Schreibweise})$$

physikalisch:

$$\text{Re } f = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi_0)$$

*Ebene Wellen:* Wellen, bei denen Phasenflächen Ebenen sind.

$$\text{z.B. } f(\vec{r}, t) = h(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Ausbreitung mit Phasengeschwindigkeit  $\frac{\omega}{k}$   
in Richtung  $\vec{k}$ .

allgemeiner:  $f(\vec{r}, t) = h_-(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + h_+(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)$   
entgegenlaufende ebene Wellen.

*Kugelwellen:* Kugelsymmetrische Wellen, hängen nur von  $r, t$  ab.

$$\text{z.B. } f(r, t) = A(r) \sin(kr - \omega t) \quad (\text{auslaufende Kugelwelle})$$

Im Allgemeinen ist  $A(r) = \frac{A}{r}$ .

Grund: Energie  $\propto f^2 \propto A(r)^2$ .

$$r^2 A(r)^2 = \text{const.} \quad (\text{konstante Energiedichte})$$

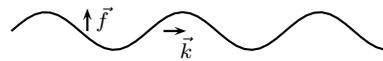
$$\Rightarrow A(r) = \frac{A}{r}$$

## Wellenarten

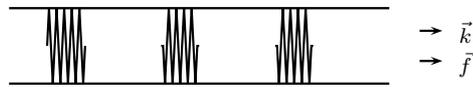
*Skalare Wellen*  $f(\vec{r}, t)$  ist ein Skalar.

*Vektorartige Wellen*  $\vec{f}(\vec{r}, t) = (f_x(\vec{r}, t), f_y(\vec{r}, t), f_z(\vec{r}, t))$   
 Beispiel: Wellen in elastischem Medium

*Transversalwelle*  $\vec{f} \perp \vec{k}$   
 Querwelle



*Longitudinalwelle*  $\vec{f} \parallel \vec{k}$   
 Längswelle



## Polarisation ebener Transversalwellen

Betrachte ebene harmonische transversale Welle.

Wähle  $\vec{k} = k\vec{e}_z$ , dann  $\vec{f} \perp \vec{k} \Rightarrow f_z = 0$ .

$$f_x = A_x \sin(kz - \omega t - \varphi_0)$$

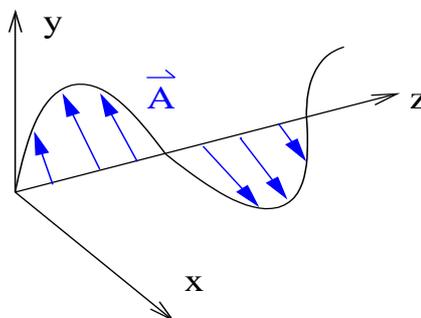
$$f_y = A_y \sin(kz - \omega t - \varphi_0 - \delta)$$

mit der relativen Phase  $\delta$ . Betrachtet werden folgende Spezialfälle:

1.)  $\delta = 0$  oder  $\delta = \pm\pi$ . Man spricht von *linearer Polarisation*.

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{A} \sin(kz - \omega t - \varphi_0), \quad \vec{A} = (A_x, \pm A_y, 0)$$

$\vec{A}$  ist orts- und zeitunabhängig.



Für beliebige  $\delta$  gilt:

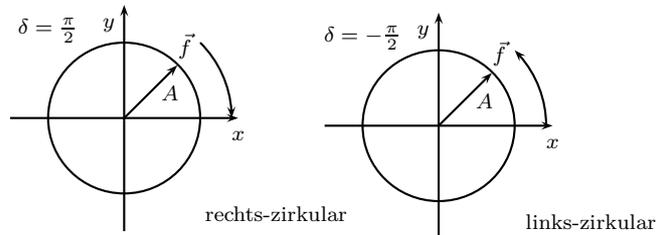
$$f(\vec{r}, t) = f_x(\vec{r}, t)\vec{e}_x + f_y(\vec{r}, t)\vec{e}_y$$

Also ist jede ebene, harmonische, transversale Welle Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen.

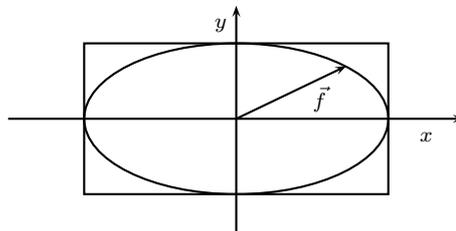
2.)  $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ ,  $|A_x| = |A_y|$ . Fall der *zirkularen Polarisation*.

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{A}\{\sin(kz - \omega t - \varphi_0)\vec{e}_x \mp \cos(kz - \omega t - \varphi_0)\vec{e}_y\}$$

Für ein festes  $z$  beschreibt  $\vec{f}(\vec{r}, t)$  einen Kreis mit dem Radius  $A$  in der  $x, y$ -Ebene.



3.)  $\delta$  beliebig,  $|A_x| \neq |A_y|$ , *elliptische Polarisation*.

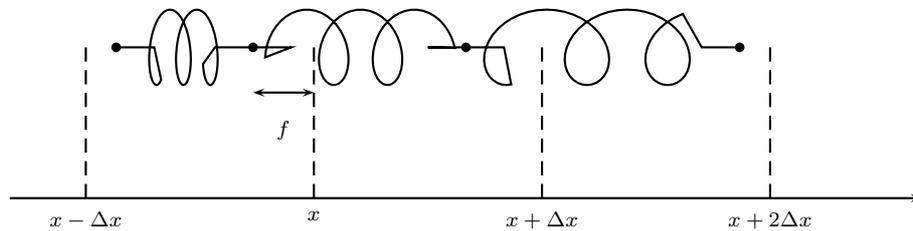


### 1.1.3 Wellengleichung

*Wellengleichung*  $\sim$  Bewegungsgleichung für die an der Welle beteiligten Systeme.  
Ausbreitung der Welle lokal (Nahewirkung).  
 $\rightarrow$  Wellengleichung ist Differenzialgleichung.

#### 1 Dimension

Zur Herleitung der Wellengleichung betrachte eine „lineare Kette“ in einer Dimension.



Auslenkung  $f(x, t)$ . Für den Massenpunkt bei  $x$  gilt

$$m\ddot{f}(x, t) = F_x$$

$$F_x = k[f(x + \Delta x, t) - f(x, t)] - k[f(x, t) - f(x - \Delta x, t)]$$

Um die Gleichung auf ein Kontinuum zu übertragen, werden die Auslenkungen  $\Delta x$  als sehr klein angenommen. Damit kann man den Differenzialquotienten annähern zu

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x + \frac{1}{2}\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Für die zweite Ableitung gilt

$$\frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] - [f(x) - f(x - \Delta x)]}{(\Delta x)^2} = f''(x) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Zusammen mit der Gleichung für die Kraft folgt dann

$$m\ddot{f} \approx \kappa f'' \cdot (\Delta x)^2$$

Mit neu definierten Größen  $\mu \equiv \frac{m}{\Delta x}$  (Massenbelegung) und  $\kappa \equiv k \cdot \Delta x$  finden wir für  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\mu\ddot{f} = \kappa f'' \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\mu}{\kappa} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Konsistenzcheck: Sind die stabilen Wellen Lösungen dieser Gleichung?

Betrachte  $f(x, t) = h_-(x - vt)$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= h'_-(x - vt), & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= h''_-(x - vt) \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= v h'_-(x - vt), & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= v^2 h''_-(x - vt)\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{\kappa}{\mu}$$

Der Fall  $f(x, t) = h_+(x + vt)$  folgt analog und man erhält die Wellengleichung in einer Dimension

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0} \quad \text{Wellengleichung in 1 Dimension}$$

Die allgemeine Lösung der 1-dim. Wellengleichung lautet

$$f(x, t) = h_-(x - vt) + h_+(x + vt)$$

Beweis: def.  $x_- = x - vt$ ,  $x_+ = x + vt$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x_+} + \frac{\partial}{\partial x_-} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} = v \frac{\partial}{\partial x_+} - v \frac{\partial}{\partial x_-} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= 4 \frac{\partial}{\partial x_+} \frac{\partial}{\partial x_-}\end{aligned}$$

Wellengleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_+} \frac{\partial}{\partial x_-} \hat{f}(x_+, x_-) &= 0 \quad \text{mit} \quad f(x, t) = \hat{f}(x_+, x_-) \\ \Rightarrow \hat{f}(x_+, x_-) &= h_+(x_+) + h_-(x_-) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

### 3 Dimensionen

Betrachte ebene, harmonische Wellen

$$\begin{aligned}f(\vec{r}, t) &= A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= k_x A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -k_x^2 A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi_0) \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \cdot f = -k^2 \cdot f \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= -\omega A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -\omega^2 A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi_0) \\ &= -\omega^2 f = -k^2 v^2 f\end{aligned}$$

Und mit  $\omega = k \cdot v$  folgt als Wellengleichung in 3 Dimensionen

$\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$	<b>Wellengleichung in 3 Dimensionen</b>
--	---

- Sie gilt näherungsweise für viele Wellen in der Physik für kleine Auslenkungen.
- Es gibt auch andere Wellengleichungen (z.B. Schrödingergleichung)
- Für große Auslenkungen machen sich im Allgemeinen Nichtlinearitäten bemerkbar, z.B.

$$\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \alpha f^3$$

Achtung: obige Wellengleichung beschreibt *dispersionsfreie* Wellen:  
 $\omega = v \cdot k$  mit  $v = \text{const.}$  für ebene harmonische Wellen.

Dispersionsbeziehung:

$$\omega(k) = v \cdot k \quad \text{linear} \quad \Rightarrow \quad \text{dispersionsfrei}$$

Falls  $v$  von  $k$  abhängt  $\rightarrow$  Dispersion,  $\omega(k)$  nichtlinear.

### Superpositionsprinzip

Sind  $f(\vec{r}, t)$  und  $g(\vec{r}, t)$  Lösungen der (linearen) Wellengleichung, so ist auch

$$\alpha f(\vec{r}, t) + \beta g(\vec{r}, t) \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

eine Lösung. (Beweis: Linearität der Wellengleichung)

### Lösung der Wellengleichung in 3 Dimensionen

Spezielle Lösungen:

#### 1. Ebene harmonische Wellen

$$\begin{aligned} f &= C e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \Delta f &= -k^2 \cdot f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot f \\ \Rightarrow \Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -(k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}) \cdot f = 0 \quad \text{für } \omega = k \cdot v \end{aligned}$$

#### 2. Kugelwellen

$$\begin{aligned} \Delta f(r) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f(r)) \quad (\text{Laplace-Operator auf kugelsymmetrischen Funktionen}) \\ \Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r f) = 0 \\ \Rightarrow \text{Lösung: } r f &= h(r - vt) \\ \Rightarrow f(r, t) &= \frac{1}{r} h(r - vt) \\ \text{speziell: } f &= \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \end{aligned}$$

### 3. Superposition zweier ebener Wellen

#### a) gleiche Frequenzen

$$f_1 = A \sin(kx - \omega t)$$

$$f_2 = A \sin(kx - \omega t + \delta)$$

$$\text{Benutze } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$\Rightarrow f = f_1 + f_2 = 2A \cos \frac{\delta}{2} \sin \left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right)$$

$$\delta = 0 : \quad f = 2A \sin(kx - \omega t) \quad \textit{konstruktive Interferenz}$$

$$\delta = \pi : \quad f = 0 \quad \textit{destruktive Interferenz}$$

#### b) verschiedene Frequenzen

$$f_1 = A \sin(k_1 x - \omega t) = A \sin(k_1(x - vt))$$

$$f_2 = A \sin(k_2 x - \omega t + \delta) = A \sin(k_2(x - vt) + \delta)$$

$$\Rightarrow f = f_1 + f_2$$

$$= 2A \cos \left( \frac{k_1 - k_2}{2}(x - vt) + \frac{\delta}{2} \right) \sin \left( \frac{k_1 + k_2}{2}(x - vt) + \frac{\delta}{2} \right)$$

Akustik: Schwebungsfrequenz  $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$

### 4. Allgemeine Superposition ebener Wellen

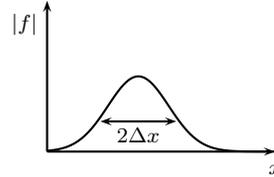
$$\text{Ebene Wellen } A(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{mit } \omega(\vec{k}) = v \cdot |\vec{k}|$$

$$\text{Superposition } f(\vec{r}, t) = \int d^3k A(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{löst die Wellengleichung.}$$

Physikalisch sinnvoll, denn scharfe Frequenzen lassen sich nicht exakt realisieren.

Beispiel: Gauß'sches Wellenpaket

$$A(\vec{k}) = B \cdot \exp\left(-\frac{(\vec{k} - \vec{k}_0)^2}{2(\Delta k)^2}\right)$$



Für  $t = 0$

$$f(\vec{r}, 0) = B(2\pi\Delta k^2)^3 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \exp\left(-\frac{(\Delta k)^2 \vec{r}^2}{2}\right), \quad \Delta x = \frac{1}{\Delta k}$$

Für  $t \neq 0$  komplizierter

$$f(\vec{r}, t) = \text{const.} \cdot e^{i\vec{k}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{v}_0 t)} g(\vec{r} - \vec{v}_0 t, t) \quad \text{mit} \quad \vec{v}_0 = \frac{\vec{k}_0}{k_0} v, \quad \text{laufendes Wellenpaket}$$

Es gilt  $\Delta k \cdot \Delta x \approx 1$

Allgemein:  $\Delta k \cdot \Delta x \geq 1$  für Wellenpakete

$$\text{Frequenz: } \left. \begin{array}{l} \Delta\omega = v\Delta k \\ \Delta x = v\Delta t \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\Delta\omega\Delta t \approx 1}$$

Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Es gilt: Jede Lösung der Wellengleichung ist eine Superposition ebener Wellen:

$$f(\vec{r}, t) = \int d^3k \{A(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(\vec{k})t)} + B^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(\vec{k})t)}\} \quad \text{mit} \quad \omega(\vec{k}) = v|\vec{k}|$$

Beweis: siehe nächster Abschnitt

## 1.1.4 Fourier-Integrale

Erinnerung: Fourier-Reihen

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x + L) \quad \text{periodisch} \\ f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n \frac{x}{L}} \\ &= \sum_n c_n e^{ik_n x} \quad \text{mit } k_n = \frac{2\pi n}{L} \\ c_n &= \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) e^{-ik_n x} \end{aligned}$$

Ist  $f(x)$  nicht periodisch, lässt es sich nicht als Fourier-Reihe darstellen.

Idee:  $L \rightarrow \infty$ . Schreibe  $\tilde{f}_n = Lc_n$ ,  $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n \frac{\Delta k}{2\pi} \tilde{f}_n e^{ik_n x} \\ \tilde{f}_n &= \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) e^{-ik_n x} \\ \text{Limes } L \rightarrow \infty : \quad \sum_n \frac{\Delta k}{2\pi} (\dots) &\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (\dots), \quad \tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}(k) \end{aligned}$$

### Fourier-Integrale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{ikx} \\ \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \end{aligned}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-iky} e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)}$$

Vergleich mit  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \delta(x-y)$  liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)} = \delta(x-y)$$

### 3 Dimensionen

$$f(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3r f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Anwendung: Allgemeine Lösung der Wellengleichung.

Sei  $f(\vec{r}, t)$  Lösung der Wellengleichung.

$$f(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\Delta f(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}, t) \Delta e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}, t) (-k^2) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{f}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Eingesetzt in die Wellengleichung

$$0 = \Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( k^2 \tilde{f} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t^2} \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{f}(\vec{k}, t) = -v^2 k^2 \tilde{f}(\vec{k}, t) = -\omega^2 \tilde{f}(\vec{k}, t)$$

Dies ist die Schwingungsgleichung für  $\tilde{f}$  bezüglich  $t$ .

$$\Rightarrow \text{Lösung: } \tilde{f}(\vec{k}, t) = C_1(\vec{k}) e^{-i\omega t} + C_2(\vec{k}) e^{i\omega t}$$

$$\text{Setze: } A(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} C_1(\vec{k}), \quad B^*(\vec{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} C_2(-\vec{k})$$

$$\Rightarrow f(\vec{r}, t) = \int d^3k \{ A(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + B^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \}$$

Bemerkung:  $f(\vec{r}, t)$  reell  $\Rightarrow A(\vec{k}) = B(\vec{k}) \quad \forall \vec{k}$ .

### 1.1.5 Wellen in zwei Dimensionen

(Bonus-Material, war nicht in der Vorlesung)

Wellen auf Oberflächen: Wellen in zwei Dimensionen

z.B. Wellen auf Wasseroberflächen, Wellen in einer Membran

Wellengleichung in zwei Dimensionen:

$$\left( \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = 0, \quad \text{wobei hier} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplace-Operator in Polarkoordinaten  $\rho, \varphi$ :

$$\begin{aligned} \Delta f(\rho, \varphi) &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} f(\rho, \varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho, \varphi) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f(\rho, \varphi) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} f(\rho, \varphi, t) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho, \varphi, t) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f(\rho, \varphi, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\rho, \varphi, t) &= 0 \end{aligned}$$

Ansatz:  $f(\rho, \varphi, t) = g(\rho) e^{ip\varphi} e^{i\omega t}$  mit  $p \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\rho^2} g(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} g(\rho) + \left( k^2 - \frac{p^2}{\rho^2} \right) g(\rho) = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = vk$$

Substitution  $z \equiv k\rho$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dz^2} g + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} g + \left( 1 - \frac{p^2}{z^2} \right) g = 0$$

Dies ist die *Bessel'sche Differenzialgleichung*.

Die Lösungen sind spezielle Funktionen, die *Bessel-Funktionen* oder *Zylinderfunktionen* heißen.

Die Lösung, welche regulär im Nullpunkt ist, ist die Bessel-Funktion erster Art  $J_p(z)$  für  $p \geq 0$ .

$$\text{Potenzreihe: } J_p(z) = \left( \frac{z}{2} \right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+p+1)} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k}$$

$J_p(z)$  ist reell, oszilliert mit abnehmender Amplitude für wachsendes  $z$  und besitzt unendlich viele Nullstellen  $z_n$ . Zum Aussehen der Funktion siehe geeignete Lehrbücher.

Lösung der Wellengleichung:  $f(\rho, \varphi, t) = J_p(k\rho) e^{ip\varphi} e^{i\omega t}$

### 1.1.6 Stehende Wellen

Überlagerung von zwei eindimensionalen Wellen

$$\Psi_1(z, t) = A \cos(\omega t - kz)$$

$$\Psi_2(z, t) = A \cos(\omega t + kz + \varphi)$$

Wenn bei Reflexion  $\varphi = \pi$  ist

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 = A[\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz + \pi)] \\ &= 2A \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(-kz - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2A \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(kz) \end{aligned}$$

### Zweidimensionale Eigenschwingung

Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

dünne rechteckige Platte

$$\Psi_{nm}(x, y) = A \sin\left(\frac{m+1}{a}\pi x\right) \sin\left(\frac{n+1}{b}\pi y\right) \cos(\omega_{mn}t)$$

$$\omega_{mn} = \pi \sqrt{\left[\left(\frac{m+1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{b}\right)^2\right] \frac{\sigma}{\rho}}$$

$a, b$  : Kantenlängen

$\sigma$  : Zugspannung

$\rho$  : Flächendichte

kreisförmige Platte. Wellengleichung (in Kugelkoordinaten):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Lösung:

$$\Psi_{np}(r, \varphi, t) = J_p \left( r \frac{r_{np}}{R} \right) \cdot [A_1 \cos(p\varphi) + A_2 \sin(p\varphi)] \cdot \cos(\omega_{np}t)$$

$J_p$  : Besselfunktion  $p$ -ter Ordnung

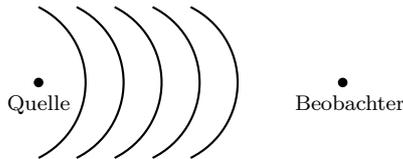
$r_{np}$  :  $n$ -te Nullstelle von  $J_p$

$n$  : Radialkreise

$p$  : Azimutknoten

### 1.1.7 Doppler-Effekt

Abstand gleicher Phasenflächen



$$\lambda = \lambda_0 - u_Q T = v_{\text{ph}} T - u_Q T$$

$$\lambda = \frac{v_{\text{ph}} - u_Q}{\nu_0}$$

beobachtet wird

$$\nu_D = \frac{v_{\text{ph}}}{\lambda} = \nu_0 \frac{v_{\text{ph}}}{v_{\text{ph}} - u_Q} \Rightarrow \boxed{\nu_D = \nu_0 \frac{1}{1 - \frac{u_Q}{v_{\text{ph}}}}} \quad (\text{bewegte Quelle})$$

$$\Delta t = T$$

$$\Delta n = \frac{u_B T}{\lambda_0} \quad \text{mehr Wellenberge}$$

$$\Rightarrow \nu = \nu_0 + \frac{\Delta n}{T} = \nu_0 + \frac{u_B}{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu_D = \nu_0 \left( 1 + \frac{u_B}{v_{\text{ph}}} \right)} \quad (\text{bewegter Beobachter})$$

Zusammen

$$\nu_D = \nu_0 \frac{1 + \frac{u_B}{v_{\text{ph}}}}{1 - \frac{u_Q}{v_{\text{ph}}}}$$

oder vektoriell mit  $\vec{u}_Q, \vec{u}_B$ .

$$2\pi\nu_D = \omega_D = \omega_0 \frac{\omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{u}_B}{\omega_0 + \vec{k} \cdot \vec{u}_Q}$$

## Elektromagnetische Welle

Sind nicht an ein Medium gebunden. Kein Unterschied, wer sich bewegt, nur Relativgeschwindigkeit wichtig.

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + \frac{u}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \approx \nu_0 \left( 1 + \frac{u}{c^2} + \frac{u^2}{2c^2} + \dots \right)$$

## Breite von Spektrallinien

Gas: Geschwindigkeitsverteilung (Maxwell'sche)

## 1.2 Wellenausbreitung in Medien

Gase, Flüssigkeiten, feste Körper

### 1.2.1 Festkörper

- Verdichtungswelle, longitudinal
- Scherwelle, transversal

Amplitude am Ort  $z_0$ :  $\Psi$

Amplitude am Ort  $z_0 + dz$ :  $\Psi + d\Psi = \Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial z} dz$

Volumenelement:  $\Delta V = A dz$

#### (a) Verdichtungswellen

Hooke'sches Gesetz:  $F = EA \cdot \frac{\Delta L}{L}$   $E$ : Elastizitätsmodul

Mechanische Spannung:  $\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow \sigma = E \frac{\Delta L}{L}$

Verdichtungswelle:  $\frac{\Delta L}{L} = \frac{\partial\Psi}{\partial z}$

Nettokraft:

$$\begin{aligned}\Delta F &= A \cdot (\sigma + d\sigma) - A \cdot \sigma = A \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial z} dz \\ &= A \cdot E \cdot \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} dz\end{aligned}$$

Beschleunigung der Teilchen wird durch Newton-Gleichung beschrieben

$$\begin{aligned}\Delta F &= \Delta m \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \rho \Delta V \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \\ &= \rho A dz \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}} \quad (\text{Wellengleichung für Verdichtungswelle})$$

Ein Vergleich mit der bekannten Wellengleichung führt auf die Identifikation der Phasengeschwindigkeit mit

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v_{\text{Ph}}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Rightarrow v_{\text{Ph}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Querkontraktion:

$$\mu := \frac{\Delta d/d}{\Delta L/L} \rightarrow v_{\text{Ph}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}$$

### (b) Scherwellen

$$v_{\text{Ph}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad G : \text{Torsionsmodul}$$

## 1.2.2 Gase

Verdichtungswellen

Volumenänderung

$$dV = A \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz$$

Druckänderung

$$dp = -p \frac{dV}{V} = -p \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

Nettokraft

$$dF = pA \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} dz$$

Beschleunigung der Gasteilchen

$$dF = m \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \rightarrow \rho A \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} dz = pA \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} dz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{p}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow v_{\text{Ph}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad K : \text{Kompressionsmodul}$$

Korrektur:

$$v_{\text{Ph}} = \sqrt{\frac{p}{\rho} \cdot \frac{c_p}{c_v}} = \sqrt{\frac{p}{\rho} \kappa}$$

$\kappa = 1.66$  atomare Gase

$\kappa = 1.40$  für zweiatomige Gase

Temperaturänderung:

$$pV = nkT \Rightarrow v_{\text{Ph}}(T) = v_{\text{Ph}}(T_0) \cdot \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

## Flüssigkeiten

Verdichtungswellen im Volumen.

Oberfläche: Scherkräfte.

## Oberflächenwellen

$$v_{\text{Ph}} = \left\{ \left( \frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} \right) \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

### 1.2.3 Akustik

Infraschall	$17 \text{ Hz} < \nu < 20 \text{ kHz}$
hörbare Frequenz	$\nu < 16 \text{ kHz}$
Ultraschall	$\nu > 20 \text{ kHz}$
Hyperschall	$\nu > 10 \text{ MHz}$

## Physiologische Bezeichnungen

<i>Ton:</i>	harmonische Schwingung (konstante Amplitude)
<i>Klang:</i>	$\Sigma$ Tönen
<i>Knall:</i>	Kurzes Anschwingen → großes Frequenzspektrum
<i>Geräusch:</i>	Rauschen

Die höchste Empfindlichkeit des Ohrs liegt bei  $\nu = 1 \text{ kHz}$ .

Schallintensität:

$$I_{\min} = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$
$$\rightarrow p_{\min} = 10^{-15} \text{ W}$$

logarithmische Empfindlichkeit:

$$L_{\text{st}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{I(\nu = 1 \text{ kHz})}{I_{\min}} \text{ [Phon]}$$

Hörschwelle	0 [Phon]		
Uhr ticken	10	Disco	100-130 [Phon]
Flüstern	20	Flugzeug	120
Gespräch	50	Schmerzgrenze	130
Straßenlärm	70		

### Akustische Welle

$$\Psi = A \cos(\omega t - kz)$$
$$\frac{d\Psi}{dt} = U(t) = -\omega A \sin(\omega t - kz)$$
$$= -U_0 \sin(\omega t - kz)$$
$$U_0 = \omega A : \quad \text{Schallschnelle}$$

### 1.2.3.1 Druck, Energiedichte

$$\begin{aligned} dp &= -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \text{Wellengleichung} \\ \rightarrow \frac{dp}{dt} &= -\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho \omega^2 A \cos(\omega t - kz) \\ \rightarrow p &= \rho \omega^2 A \frac{1}{k} \sin(\omega t - kz) + \underbrace{C}_{=p_0} \\ &= p_0 + \Delta p \sin(\omega t - kz) \\ \Delta p &= v_{\text{ph}} \rho \omega A = v_{\text{ph}} \rho U_0 \quad (\text{Druckamplitude einer Schallwelle}) \end{aligned}$$

Energiedichte:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta p^2}{\rho_{\text{ph}}}$$

Intensität:

$$I = v_{\text{ph}} \rho = \frac{1}{2} \frac{\Delta p^2}{\rho_{\text{ph}}}$$

### Schalldruckpegel

$$\begin{aligned} L_p &:= 10 \cdot \log_{10} \frac{\Delta p^2}{p_s^2} & p_s : \text{Schalldruckwelle an der Hörschwelle} \\ L_p &= 20 \cdot \log_{10} \frac{\Delta p}{p_s} \quad [\text{dB}] \\ p_s &= 2 \cdot 10^{-4} \mu\text{bar} \end{aligned}$$

### 1.2.3.2 Erzeugung von Schallwellen

- elektrischer Oszillator + Lautsprecher
- schwingende Saite

- schwingende Membran
- Stimmgabeln
- Piezo Schallgeber

### Schalldetektoren

- Ohr
- Mikrophone
- inverser piezoelektrischer Effekt
- Optischer Detektor
  - Doppler-Modifikation
  - Stehende akustische Welle moduliert Brechungsindex

### 1.2.3.3 Physik der Musikinstrumente

- Saiteninstrumente
- Blasinstrumente
- Schlaginstrumente

musikalischer Ton:  $\sum_i \nu_i$

möglichst viele gemeinsame Obertöne.

$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{2}{1}$ : Oktave

## 1.3 Elektromagnetische Wellen

Wiederholung: Maxwell- Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} \rho(\vec{r}, t), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) \\ Q = \int \rho d^3r, \quad I = \int \vec{j} \cdot d\vec{f} \end{array} \right| \text{Kontinuitätsgleichung} \quad \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Felder:  $\vec{E}, \vec{B}$

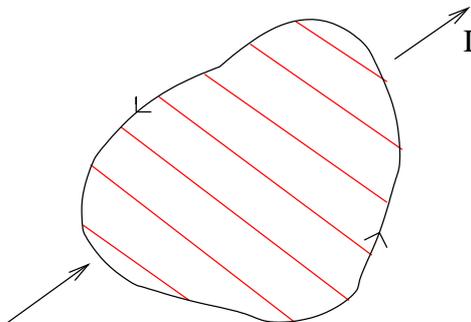


$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \leftrightarrow \quad \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{Q_V}{\epsilon_0} \quad (\text{Gau\ss'scher Satz})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Für die Magnetostatik:  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \leftrightarrow \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$



$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \leftrightarrow \quad U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{f} \quad (\text{Faraday'sches Induktionsgesetz})$$

Lorentz-Kraft:

$$F_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

### 1.3.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

Vakuum:  $\rho = 0, \vec{j} = 0$

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{E} = 0 & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}$$

Potenziale:  $\vec{A}, \varphi$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Lorenz-Eichung:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

6 Felder  $\vec{E}, \vec{B} \longrightarrow$  4 Felder  $\vec{A}, \varphi$

Maxwell-Gleichung  $\longrightarrow$  Gleichung für  $\vec{A}, \varphi$  ?

(i)

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{E} & = 0 \\ \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \nabla \cdot \left( \nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) & = 0 \\ \Leftrightarrow \Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} & = 0 \\ \stackrel{(**)}{\Leftrightarrow} \Delta \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi & = 0 \end{array}$$

(\*) E-Feld eingesetzt

(\*\*) Lorenz-Eichung eingesetzt

$\Delta \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0$	Wellengleichung
---	-----------------

(ii)

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ \stackrel{(**)}{\Leftrightarrow} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} \\ \Leftrightarrow \nabla \left( \underbrace{\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \varphi}_{=0 \text{ L.E.}} \right) &= \Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}\end{aligned}$$

(\*) E-Feld und B-Feld eingesetzt

(\*\*) Benutze Identität:  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = 0} \quad \text{Wellengleichung}$$

Allgemein:

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

Phasengeschwindigkeit:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Maxwell 1864

Vorhersage elektromagnetischer Wellen.

Licht  $\sim$  elektromagnetische Welle.

$$\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

„ $\square$ “ wird Wellenoperator, d'Alembert-Operator (oder zur Not auch „Quabla“) genannt. Die oben hergeleiteten Wellengleichungen lassen sich mit „ $\square$ “

kurz schreiben zu

$$\square\varphi = 0$$

$$\square\vec{A} = 0$$

Dies gilt jedoch nur für die Lorenz-Eichung, nicht allgemein für andere Vektorpotenziale.

Was erhält man für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ ?

$$\begin{aligned}\square\vec{E} &= \square\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \\ &= -\nabla\square\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\square\vec{A} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\square\vec{B} &= \square(\nabla \times \vec{A}) \\ &= \nabla \times (\square\vec{A}) = 0\end{aligned}$$

$\begin{aligned}\square\vec{E} &= 0 \\ \square\vec{B} &= 0\end{aligned}$
--

Diese Ergebnisse gelten für beliebige Eichungen.

## Ebene harmonische Wellen

Lösung der Wellengleichung soll nun

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{E}_0 &= (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}) \quad (\text{fester Vektor})\end{aligned}$$

sein, mit  $\omega = c|\vec{k}|$ .

Wir bilden den Realteil, da nur dieser physikalisch relevant ist.

$$\begin{aligned}\text{Re}(E_x) &= |E_{0x}| \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_x) \\ \text{wobei } E_{0x} &= |E_{0x}|e^{i\delta_x}\end{aligned}$$

genauso

$$\operatorname{Re}(E_y) = |E_{0y}| \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_y)$$

$$\operatorname{Re}(E_z) = |E_{0z}| \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_z)$$

Für  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  analog.

Diese Welle hat eine besondere Eigenschaft: *Transversalität*

Für das E-Feld gilt im Vakuum  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , daraus folgt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \Leftrightarrow (ik_x E_{0x} + ik_y E_{0y} + ik_z E_{0z}) \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= 0 \\ \Leftrightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= 0 \\ \Leftrightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{E} = 0; \quad \vec{E} \perp \vec{k}}$$

Für das B-Feld folgt im Vakuum

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \Leftrightarrow i\vec{k} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \Leftrightarrow -i\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}; \quad \vec{B} \perp \vec{E}, \quad \vec{B} \perp \vec{k}}$$

$\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$  stehen also senkrecht aufeinander in ebenen Wellen.

$\vec{E}$  und  $\vec{B}$  schwingen in Phase. Es gilt

$$|\vec{B}| = \frac{1}{c} |\vec{E}| \quad \left( \text{wegen } \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c} \right)$$

Es handelt sich hierbei also um Transversalwellen.

### Polarisation

Gemäß allgemeiner Beschreibung

lineare Polarisation:  $\vec{E}, \vec{B}$  schwingen in einer Ebene

zirkulare Polarisation:  $\vec{E}, \vec{B}$  bilden jeweils eine Schraube

Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum?

→ Superposition ebener Wellen + statische Lösung

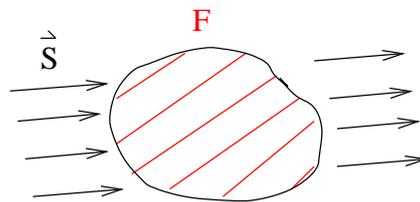
### 1.3.2 Energie und Impuls elektromagnetischer Wellen

Energiedichte:

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2)$$

Energieerhaltung → Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0 \quad \begin{array}{l} \vec{S}: \text{Energiestromdichte} \\ \vec{S} = ? \end{array}$$



$$I_E = \int_F \vec{S} \cdot d\vec{f} \quad I_E: \text{Energiestrom}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \epsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \dot{\vec{B}} \\
&= \frac{1}{\mu_0} \left( \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) \right) \\
&\stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \\
\Rightarrow \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}
\end{aligned}$$

$$(*) \nabla \cdot [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$$

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}$	<b>Poynting-Vektor</b>
---	------------------------

(Realteile einsetzen!)

### Ebene harmonische Welle

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \left( \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \right) = \frac{1}{\mu_0 \omega} |\vec{E}|^2 \cdot \vec{k}$$

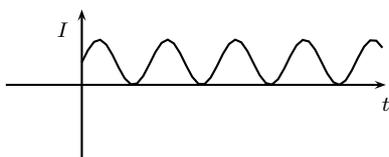
- 1)  $\vec{S}$  parallel zu  $\vec{k}$
- 2)  $S := |\vec{S}| = c \epsilon_0 |\vec{E}|^2$
- 3)  $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \epsilon_0 |\vec{E}|^2$

$S$  : Energiestromdichte bzw. Intensität

$$\begin{aligned}
S &\equiv I \quad (\text{nicht } I_E) \\
&= c \cdot w
\end{aligned}$$

Für eine linear polarisierte ebene Welle

$$I(t) = I_0 \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad I_0 = c \epsilon_0 E_0^2$$



Zeitmittel

$$\langle I(t) \rangle = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$

## Impulsdichte

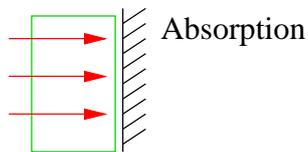
Impuls pro Volumen = Impulsdichte  $\vec{\pi}$  (nicht 3.14159...). Ohne Beweis gilt

$$\vec{\pi} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$
$$|\vec{\pi}| = \frac{1}{c} w$$

Deutung im Photonenfeld: für Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit gilt

$$E = p \cdot c \quad \rightarrow \quad w = |\vec{\pi}| \cdot c$$

Impulsdichte  $\rightarrow$  Strahlungsdruck



Druck = Impulsübertrag pro Sekunde pro Flächeneinheit

$$p_{\text{St}} = \frac{|\vec{\pi}| \cdot c \cdot \Delta t \cdot \Delta A}{\Delta t \cdot \Delta A} = c |\vec{\pi}|$$

(gilt für das Licht)

$$= w$$

Achtung: bei Reflexion: Faktor 2.

Beispiel: Lichtstrahl

$$A = 1 \text{ mm}^2$$

Leistung 10 W

$$\rightarrow \text{Kraft } F = 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

- Laser

- Kometenschweif (zeigt immer von der Sonne weg)
- Lichtmühle

Drehimpulsdichte:  $\vec{\lambda} := \vec{r} \times \vec{\pi}$

### 1.3.3 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

Erzeugung	$\longleftrightarrow$	Sender
statische Felder	$\longleftrightarrow$	stationäre Quellen
zeitlich veränderliche Felder	$\longleftrightarrow$	zeitlich veränderliche Quellen

Daher betrachten wir nun zeitlich veränderliche Quellen  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ .

Herleitung der Wellengleichungen mit äußeren Quellen:

benutzt wird

$$\begin{aligned}
 (*) \text{ E-Feld:} & \quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \\
 (**) \text{ B-Feld} & \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\
 (***) \text{ Lorenz-Eichung:} & \quad \nabla \cdot \vec{A} + \underbrace{\mu_0\epsilon_0}_{1/c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0
 \end{aligned}$$

E-Feld:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{E} & = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} -\Delta\varphi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) & = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \stackrel{(***)}{\Leftrightarrow} -\Delta\varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} & = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \Leftrightarrow \square\varphi & = -\frac{\rho}{\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

B-Feld:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
 \stackrel{(**)}{\Leftrightarrow} -\Delta \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \underbrace{\nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}_{=0} &= \mu_0 \vec{j} \\
 \Leftrightarrow \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \\
 \Leftrightarrow \square \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j}
 \end{aligned}$$

### 1.3.3.1 Lösung der inhomogenen Wellengleichung

Für die Potentiale haben wir gefunden:

#### Inhomogene Wellengleichungen

(in der Lorenz-Eichung)

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\square \varphi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \varrho(\vec{r}, t)$$

Aufgabe: gegeben  $\varrho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , wie lauten  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  und  $\varphi(\vec{r}, t)$ ?

Die Gleichungen für  $A_i$ ,  $\varphi$  sind vom gleichen Typ:

$$\square \psi(\vec{r}, t) = -s(\vec{r}, t) \quad s : \text{Inhomogenität}$$

#### Allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

Sei  $\psi_p(\vec{r}, t)$  eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung. Dann ist jede Lösung  $\psi(\vec{r}, t)$  von der Form

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_p(\vec{r}, t) + \psi_0(\vec{r}, t),$$

wobei  $\psi_0$  eine Lösung der homogenen Wellengleichung  $\square \psi_0(\vec{r}, t) = 0$  ist.

Beweis: Sei  $\square \psi = -s$

$$\Rightarrow \square (\psi - \psi_p) = \square \psi - \square \psi_p = -s + s = 0.$$

Setze  $\psi_0 = \psi - \psi_p$  ■

Die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung  $\square \psi_0 = 0$  kennen wir: Überlagerung ebener Wellen. Die verbleibende Aufgabe besteht nun darin, eine Lösung  $\psi_p$  für eine beliebige Quelle  $s(\vec{r}, t)$  zu finden.

Lösungsweg:

- 1) Finde Lösung für eine punktförmige Quelle  $s(\vec{r}, t)$ .
- 2) Setze die Lösung für punktförmige Quellen zusammen.

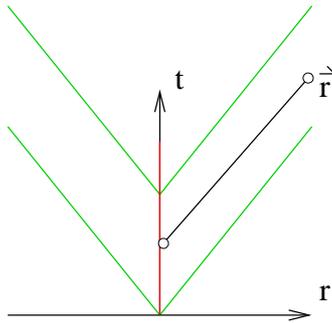
## 1. Punktförmige Quelle

Zeitlich veränderliche Punktquelle am Ort  $\vec{r} = 0$ :

$$s(\vec{r}, t) = f(t) \cdot \delta^{(3)}(\vec{r})$$

Erinnerung: statische Punktladung

$$\Delta \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\frac{q}{\epsilon_0} \cdot \delta^{(3)}(\vec{r})$$
$$\Delta \left( \frac{1}{4\pi r} f \right) = -f \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad \text{für } f = \text{const.}$$



Intuition: der Effekt der Zeitabhängigkeit breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.

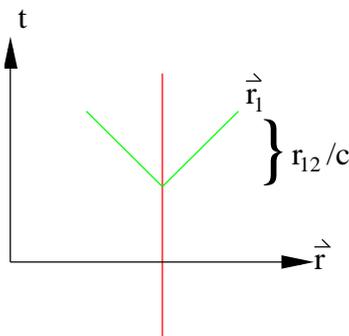
Ansatz: Kugelwelle

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Beweis siehe Vorlesung.

Allgemeiner: Punktquelle am Ort  $\vec{r}_2$ .

$$s(\vec{r}_1, t) = f(t) \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$



Lösung für  $\psi$ :

$$\psi(\vec{r}_1, t) = \frac{1}{4\pi r_{12}} f\left(t - \frac{r_{12}}{c}\right)$$

$$r_{12} \equiv |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

$\vec{r}_1$  : Aufpunkt

$\vec{r}_2$  : Quellpunkt

## 2. Beliebige Quelle

Addition (Superposition) von Quellen

Sei  $s(\vec{r}, t) = \alpha s_1(\vec{r}, t) + \beta s_2(\vec{r}, t)$  und  $\square\psi_1 = -s_1$ ,  $\square\psi_2 = -s_2$

$\Rightarrow \psi(\vec{r}, t) = \alpha\psi_1(\vec{r}, t) + \beta\psi_2(\vec{r}, t)$  löst  $\square\psi = -S$ .

Eine beliebige Quelle wird nun aus Punktquellen zusammengesetzt.

$$s(\vec{r}_1, t) = \int d^3r_2 \underbrace{s(\vec{r}_2, t) \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}_{\text{Punktquelle bei } \vec{r}_2}$$

Durch Superposition der Lösungen für Punktquellen erhalten wir

**„Retardierte“ Lösung  $\psi_{\text{ret}}(\vec{r}_1, t)$**

Eine Lösung von  $\square\psi(\vec{r}_1, t) = -s(\vec{r}_1, t)$  lautet

$$\psi(\vec{r}, t) = \int d^3r_2 \frac{1}{4\pi r_{12}} s\left(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c}\right)$$

Bemerkung: „avancierte Lösung“

$$\begin{aligned} \psi_{\text{av}}(\vec{r}, t) &= \int d^3r_2 \frac{1}{4\pi r_{12}} s\left(\vec{r}_2, t + \frac{r_{12}}{c}\right) \\ &= \psi_{\text{ret}}(\vec{r}, t) + \text{Lösung der homogenen Gleichung} \end{aligned}$$

ist ebenfalls eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung. Aufgrund der Kausalität wird in der Regel die retardierte Lösung benutzt.

## Green'sche Funktion

Quelle auch zeitliche  $\delta$ -Funktion.

$$s(\vec{r}_1, t_1) = \delta^{(3)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \delta(t_1 - t_2)$$

Lösung der inhomogenen Wellengleichung heißt *Green'sche Funktion*.

$$\square G(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = -\delta^{(3)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \delta(t_1 - t_2)$$

Nutzen von  $G$  für beliebige Quelle:

$$\psi(\vec{r}_2, t_2) = \int d^3r_2 dt_2 G(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) s(\vec{r}_2, t_2)$$

### 1.3.3.2 Retardierte Potenziale

$\varrho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  gegeben.

$$\begin{aligned} \square \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} \\ \square \varphi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \varrho \\ \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}_1, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r_2 \frac{\vec{j}(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c})}{r_{12}} \\ \Rightarrow \varphi(\vec{r}_1, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r_2 \frac{\varrho(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c})}{r_{12}} \end{aligned}$$

Dies sind die retardierten Potenziale. Aus ihnen bekommt man die Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ .

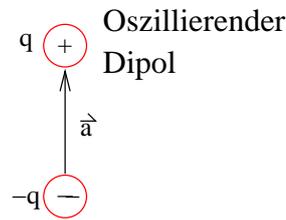
Check: erfüllen die retardierten Potenziale die Lorenz-Eichung?

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r_2 \frac{1}{r_{12}} \underbrace{\left\{ \nabla \cdot \vec{j} \left( \vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \varrho \left( \vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c} \right) \right\}}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

### 1.3.3.3 Dipolstrahlung

Erzeugung von Wellen durch oszillierende Quellen.

$$\begin{aligned} \text{Dipolmoment } \vec{p} &= q \cdot \vec{a} \\ \vec{p}(t) &= \vec{p}_0 \cos \omega t \\ \text{bzw. } \vec{p}(t) &= \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \end{aligned}$$



Theorie + Experiment, 1887/88: Heinrich Hertz (1857 — 1894)

### Elektrische Dipolstrahlung

idealisiertes Dipol:  $a \rightarrow 0$ ,  $p_0 = \text{const.}$

Wähle als Koordinatenursprung den Mittelpunkt des Verbindungsvektors  $\vec{a}$ .

$$\begin{aligned}\vec{p} &= q\frac{\vec{a}}{2} - q\left(-\frac{\vec{a}}{2}\right) = q\vec{a} = \sum_i q_i \vec{r}_i \\ \dot{\vec{p}} &= \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i q_i \vec{v}_i \\ &= \int d^3r \varrho(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \int d^3r \vec{j}(\vec{r})\end{aligned}$$

Vektorpotenzial

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r_2 \frac{\vec{j}(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c})}{r_{12}}$$

Im Limes  $a \rightarrow 0$  ist  $\vec{j}(\dots)$  nur in einem infinitesimalen Bereich von  $\vec{r}_2$  von Null verschieden, daher gilt im Integral  $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \rightarrow r_1 = |\vec{r}_1|$ .

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r_1} \int d^3r_2 \vec{j}\left(\vec{r}_2, t - \frac{r_1}{c}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi r_1} \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r_1}{c}\right)$$

Einsetzen von  $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$ :

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} i\omega \vec{p}_0 e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} = -i \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{p}_0 \omega \frac{1}{r} e^{-i(kr - \omega t)}$$

Hierbei wurde  $\omega = kc$  benutzt. Das Vektorpotenzial beschreibt eine Kugelwelle.

Wie lautet das Magnetfeld  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ? Für seine Berechnung benutzen wir

i)  $\nabla \times \left(\frac{1}{r} \cdot \vec{b}\right) = \frac{1}{r} \nabla \times \vec{b} - \frac{1}{r^3} \vec{r} \times \vec{b}$

ii) Für Funktionen, die nur von  $r$  abhängen, gilt

$$\nabla \rightarrow \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\nabla \times \vec{b}(r) = \frac{1}{r} \vec{r} \times \frac{\partial \vec{b}}{\partial r}$$

Damit gilt

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^2} \vec{r} \times \left( \frac{\partial}{\partial r} \dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) - \frac{1}{r^3} \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{cr} \frac{\vec{r}}{r} \times \ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \times \dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\}$$

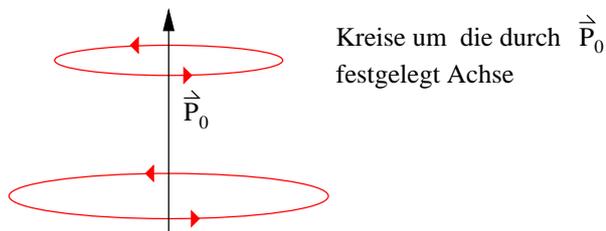
Nun setzen wir ein:

$$\dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) = -i\omega \vec{p}_0 e^{i(kr-\omega t)} = -ikc \vec{p}_0 e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) = -\omega^2 \vec{p}_0 e^{i(kr-\omega t)} = -k^2 c^2 \vec{p}_0 e^{i(kr-\omega t)}$$

und erhalten

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} ck^2 \frac{1}{r} e^{i(kr-\omega t)} \left( 1 + \frac{i}{kr} \right) \vec{p}_0 \times \frac{\vec{r}}{r}$$



Es ist  $\vec{B} \perp \vec{p}$  und  $\vec{B} \perp \vec{r}$ . Für große  $r$ , d.h.  $kr \gg 1$ , dominiert der erste Term. Man spricht von der *Fernzone* bzw. *Strahlungszone* und dort gilt  $B \sim 1/r$ .

Wie lautet das skalare Potenzial  $\varphi$ ?

Wir benutzen die Gleichung der Lorenz-Eichung und finden

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -c^2 \nabla \cdot \vec{A} \\ &= -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^2} \vec{r} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial r} \dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) - \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{cr} \vec{r} \cdot \ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r^2} \vec{r} \cdot \dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\}\end{aligned}$$

Und wieder werden obige Gleichungen für  $\vec{p}$ ,  $\dot{\vec{p}}$  und  $\ddot{\vec{p}}$  eingesetzt:

$$\varphi(\vec{r}, t) = -i \frac{1}{4\pi \epsilon_0} k \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \left( 1 + \frac{i}{kr} \right) \vec{p}_0 \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Für das  $E$ -Feld gilt

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \dots \quad (\text{längliche Rechnung}) \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{c^2 r^3} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \times \vec{r} + \frac{1}{cr^2} \left[ 3 \left( \dot{\vec{p}} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \dot{\vec{p}} \right] + \frac{1}{r^3} \left[ 3 \left( \vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \vec{p} \right] \right\}\end{aligned}$$

Hier ist immer  $\vec{p}(t - \frac{r}{c})$ ,  $\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})$  und  $\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})$  zu nehmen. Das Resultat ist

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \left\{ -k^2 \left( \vec{p}_0 \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \times \frac{\vec{r}}{r} - ik \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{i}{kr} \right) \left[ 3 \left( \vec{p}_0 \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \vec{p}_0 \right] \right\}$$

Das  $E$ -Feld hat also sowohl longitudinale ( $\parallel \vec{r}$ ) als auch transversale ( $\perp \vec{r}$ ) Komponenten.

2. Term: elektrisches Dipolfeld  $\sim 1/r^2$

1. Term: Strahlungsfeld bzw. Induktionsfeld (transversal)  $\sim 1/r$ .

## Räumliche Verteilung des abgestrahlten Feldes

Fernzone:  $kr \gg 1$

dort sind die Felder approximativ gleich dem Strahlungsfeld:

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\left(\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{r}\right) \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{r}}{r^2}$$

Es gilt also in der Fernzone

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E}$$

Die Felder stehen lokal zueinander wie in einer ebenen Welle.

Sie fallen ab  $\sim \frac{1}{r}$ .

### Abstrahlung des Hertz'schen Dipols

Fernzone

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = c\epsilon_0 |\vec{E}|^2 \frac{\vec{r}}{r} && : \text{radial auswärts} \\ I = S &= c\epsilon_0 |\vec{E}|^2 \\ &= \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} \left[ \ddot{\vec{p}}^2 - \left(\ddot{\vec{p}} \cdot \frac{\vec{r}}{r}\right)^2 \right] \\ &= \frac{|\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)|^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

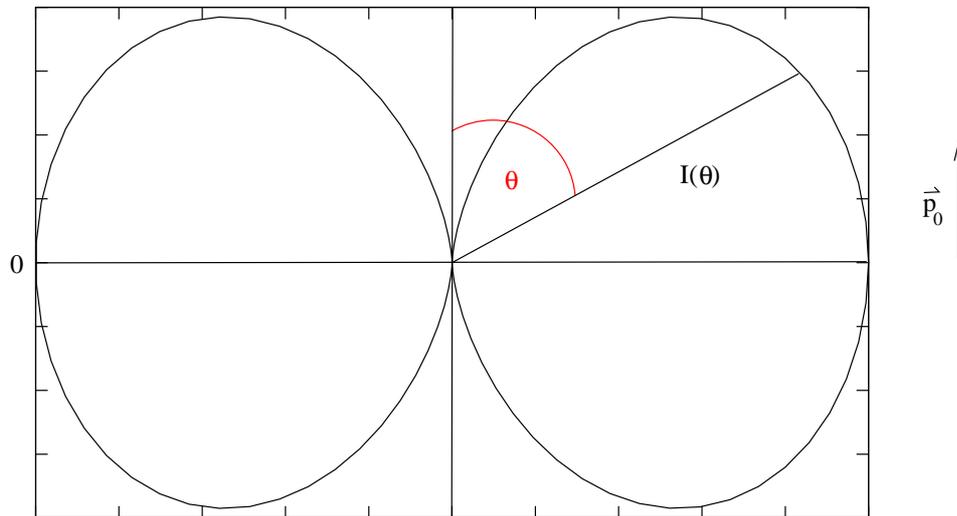
Mit

$$\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\omega^2 \vec{p}_0 \cos(kr - \omega t) \quad (\text{Hertz'scher Dipol})$$

und Zeitmittel  $\langle \cos^2(kr - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\langle I(\vartheta) \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta}$$

- $1/r^2$  -Abfall
- Winkelabhängigkeit  $\sim \sin^2 \vartheta$



Gesamtleistung

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta r^2 \sin \vartheta \langle I(\vartheta) \rangle \\ &= \frac{p_0^2 \omega^4}{16\pi \epsilon_0 c^3} \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta}_{4/3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}} \quad \sim \omega^4 \quad \text{für Dipolstrahlung}$$

### 1.3.3.4 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

Radio:	UKW $\sim 100$ MHz
TV, Handy:	800 MHz - 1,3 GHz
LAN:	2,45 GHz
Satelliten-TV:	1,8 GHz
Optische-Wellen:	$10^{14}$ Hz

Optimale Einkopplungen in die Antenne:

- beide Wirkwiderstände  $R_S$  und  $R_A$  müssen gleich sein.
- Blindwiderstände entgegengesetzt gleich

$$R_S = R_A$$

$$\operatorname{Im}(Z_S) = -\operatorname{Im}(Z_A) \quad \text{mit } \operatorname{Im}(Z_S) = \omega L_S - \frac{1}{\omega C_S}$$

→ Dies ist die *Impedanz-Anpassung*.

→ Glühlampenintensität wird optimiert.

Strom in der Antenne:

$$I_A(z, t) = I_{A_0}(z) \cos(\omega t)$$

$$I_A\left(z = \pm \frac{1}{2}l\right) = 0 \quad \Rightarrow \text{stehende Welle, } l = \frac{\lambda}{2}(2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Grundschwingung } \frac{\lambda}{2} = l, \quad \frac{\lambda}{2}\text{-Antenne}$$

Resonanzfrequenz der Antenne

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda} v_{\text{ph}} = \frac{\pi}{l} v_{\text{ph}} \quad \text{mit } v_{\text{ph}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} : \text{ Phasengeschwindigkeit}$$

## Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen

- a) Vermessen eines e.m. Feldes.

$$v_{\text{ph}} = \nu \cdot \lambda = c \quad (\text{Vakuum})$$

in einem Medium:  $c_m = c_m(\nu)$  (Dispersion)

- b) Astronomische Beobachtung (s. Abb. 7.14)

$$\Delta t = 22 \text{ min}$$

$$2r = 3 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$v_{\text{ph}} = 2,3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

c) Fizeau-Methode: (s. Abb. 7.15)

$$\begin{aligned}\Delta r &= 8,6 \text{ km} \times 2 \\ 720 \text{ Zähne, } 24 \text{ Hz} &\rightarrow \Delta t = 57,9 \text{ } \mu\text{s} \\ \rightarrow v_{\text{ph}} &= 2,97 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ c &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} := 298792458 \text{ m/s}\end{aligned}$$

### Multipol-Strahlung

ausgedehnte oszillierende Ladungsverteilung  
 $\rightarrow$  zeitlich veränderliche Multipolmomente.

$$\int d^3 r_2 \frac{1}{r_{12}} \vec{j}\left(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c}\right) = e^{-i\omega t} \int d^3 r_2 \frac{1}{r_{12}} e^{ikr_{12}} \vec{j}(\vec{r}_2)$$

Entwicklung

$$r_{12} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2} = r_1 \sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1^2} + \frac{r_2^2}{r_1^2}}$$

$\rightarrow$  Entwicklung nach Multipolen.

magnetische Dipolstrahlung  $I \sim \frac{\omega^4}{r^2} \sin^2 \vartheta$

elektrische/magnetische Quadrupolstrahlung

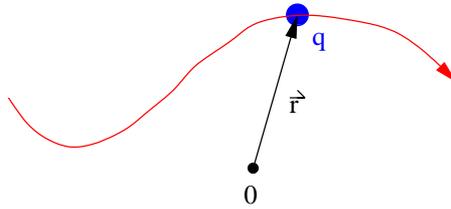
⋮

#### 1.3.3.5 Abstrahlung beschleunigter Ladungen

beim Hertz'schen Dipol

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \langle \ddot{\vec{p}}^2 \rangle$$

Betrachte jetzt eine beschleunigte Punktladung  $q$ .



Dipolmoment bzgl. des Nullpunktes

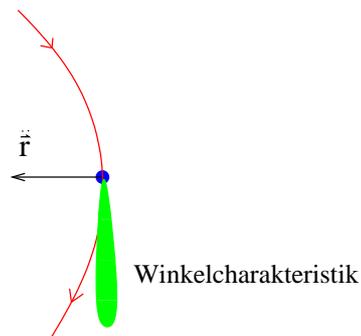
$$\vec{p} = q\vec{r}, \quad \ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{r}}$$

Frühere Formeln, Fernfeld

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{3c^3} \langle \ddot{\vec{r}}^2 \rangle \quad \text{„Bremsstrahlung“}$$

Relativistische Effekte  $\rightarrow$  bei  $v \sim c$  Vorwärtsstrahlung.

- Röntgenbremsstrahlung, kontinuierliches Spektrum.
- Synchrotronstrahlung  
Teilchenbeschleuniger ( $e^-$ ,  $p$ )  
Magnetfeld  $\rightarrow$  Kreisbahn

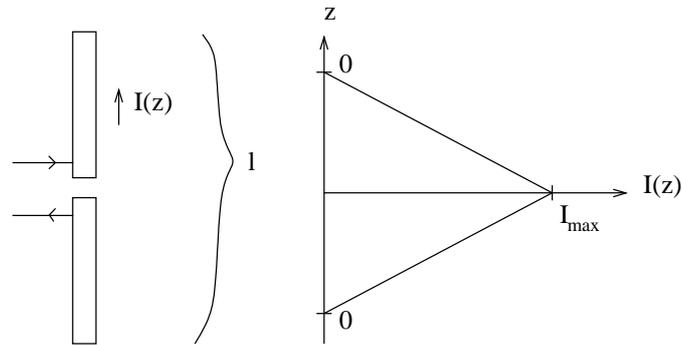


Strahlung  $\rightarrow$  Energieverlust

Anwendung: Materialforschung  
Hamburg (DESY), Hasylab, Flash, XFEL

## Strahlungswiderstand einer Stabantenne

Strom  $I(z)$  in der Antenne für  $l \ll \lambda$ :



$$\dot{\vec{p}} \approx \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) = \vec{e}_z \int_{-l/2}^{l/2} I(z) dz = I \cdot l \cdot \vec{e}_z$$

$$I = \frac{1}{2} I_{\max} = \frac{1}{2} I_0 \cos \omega t$$

$$|\ddot{\vec{p}}| = -\omega \frac{I_0}{2} l \sin \omega t$$

$$\langle \ddot{\vec{p}}^2 \rangle = \omega^2 l^2 \langle I^2 \rangle$$

Abgestrahlte Leistung

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \omega^2 l^2 \langle I^2 \rangle \equiv R_S \langle I^2 \rangle$$

Strahlungswiderstand

$$R_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8\pi^2}{3c} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 = 789 \Omega \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2$$

Für  $\lambda \sim l$ : andere Stromverteilungen, optimale Abstrahlung bei  $l = \lambda/2$ .

### 1.3.4 Elektromagnetisches Spektrum

<b>Radiowellen</b>	$10^4 - 1 \text{ m}$
Langwellen (LW)	$10^4 - 10^3 \text{ m}$
Mittelwellen (MW)	$10^3 - 10^2 \text{ m}$
Kurzwellen (KW)	$10^2 - 10 \text{ m}$
UKW (VHF)	$10 - 1 \text{ m}$
<b>Mikrowellen</b>	$1 - 10^{-3} \text{ m}$
Radar, Kommunikation	$1 \text{ m} - 10 \text{ cm}$
UHF (ultra-high-freq.)	
<b>Infrarot</b> (Wärmestrahlung)	$10^{-3} \text{ m} - 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
<b>Sichtbares Licht</b>	$7,8 \cdot 10^{-7} \text{ m} - 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ 780 nm - 380 nm
<b>Ultraviolett</b> (Entstehung: Atome, Moleküle, Sonne)	$3,8 \cdot 10^{-7} \text{ m} - 6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
<b>Röntgen-Strahlung</b> (W.H. Röntgen 1895) (Medizin, Materialforschung Astronomie)	$10^{-9} \text{ m} - 6 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
<b><math>\gamma</math>- Strahlung</b> (Entstehung: Atomkerne, Kosmisch) (Entdeckung: H. Becquerel 1896)	$10^{-10} \text{ m} - 10^{-16} \text{ m}$

Durch die Erdatmosphäre dringt:

- sichtbares Licht
- nahes Infrarot in einigen „Fenstern“
- Radiowellen, Mikrowellen mit  $\lambda > 10^{-2} \text{ m}$

### 1.3.5 Elektromagnetische Wellen in Materie

Medium mit elektrischer Polarisation und Magnetisierung

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho_a & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j}_a + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

Betrachte  $\rho_a = 0, \vec{j}_a = \vec{0}$

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (\text{Energiedichte})$$

Rechnung wie früher  $\rightarrow$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

Kontinuitätsgleichung für die Energiedichte mit  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ .

#### 1.3.5.1 Wellen in Isolatoren

Isolator: nichtleitendes Medium,  $\vec{j}_a = \vec{0}, \rho_a = 0$

Voraussetzung:  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$

Wellengleichung:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (\mu \mu_0 \vec{H}) \\ &= -\mu \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} = -\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ &\Rightarrow \left(\Delta - \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E} = 0\end{aligned}$$

⇒ Phasengeschwindigkeit

$$\boxed{c' \equiv v_{\text{ph}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu\epsilon}}} \quad \text{mit } c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (\text{Vakuum})$$

dito

$$\left( \Delta - \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{H} = 0$$

⇒ Die Lichtgeschwindigkeit im Medium ist im Allgemeinen kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Brechungsindex  $n$ :  $c' = \frac{c_0}{n}$

$$\boxed{n = \sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \quad \text{Maxwell'sche Relation}$$

Meistens ist  $\mu \approx 1 \rightarrow n = \sqrt{\epsilon}$

### 1.3.5.2 Dispersion

experimentell: Brechungsindex hängt von der Frequenz ab.

z.B. Quarzglas:

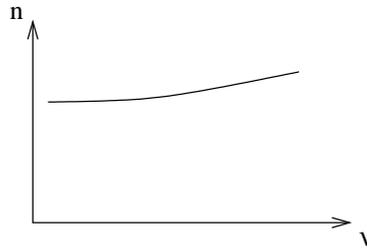
$\lambda[nm]$	480	589	656
$n$	1,464	1,458	1,456

d.h.  $c' = \frac{c_0}{n}$  hängt von  $\nu$  ab: Dispersion.

$n(\nu) \leftrightarrow \epsilon(\nu)$ , ( $\mu \approx 1$ )

Für Glas, ... i.A.

$$\frac{dn}{d\nu} > 0 : \quad \text{normale Dispersion}$$



### Atomares Modell der Dispersion

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{P} &= N \vec{p} \quad (\text{Polarisation}) \\ \vec{p} &= \alpha \vec{E}\end{aligned}$$

mit der Teilchendichte  $N$  und dem induzierten Dipolmoment  $\vec{p}$ .

$\alpha(\nu)$  : Polarisierbarkeit

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + N \alpha \vec{E} = \left(1 + \frac{N \alpha}{\epsilon_0}\right) \epsilon_0 \vec{E} \\ \Rightarrow \epsilon &= 1 + \frac{N \alpha}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Dies gilt für  $\epsilon \approx 1$ . Eine genauere Betrachtung führt zur Clausius-Mosotti-Gleichung

$$\underbrace{3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}}_{\approx \epsilon - 1 \text{ für } \epsilon \approx 1} = \frac{N \alpha}{\epsilon_0}$$

Vereinfachtes, klassisches Modell für  $\alpha$ :

Elektronen im Atom  $\longrightarrow$  gedämpfter harmonischer Oszillator.

$$m(\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x) = qE, \quad \vec{E} = (E, 0, 0), \quad q = -e_0$$

$$\begin{aligned}
E &= E_0 e^{-i\omega t} \\
\Rightarrow x(t) &= x_0 e^{-i\omega t} \\
x_0 &= \frac{q}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 && \text{(Physik I)} \\
x(t) &= \frac{q}{m} \underbrace{\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}}_{\text{Resonanzkurve}} E(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Dipolmoment } p &= q \cdot x \\
&= \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E \\
\Rightarrow \alpha &= \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}
\end{aligned}$$

realistischer:

- Atome haben mehrere Eigenfrequenzen  $\omega_{0k}$
- Oszillatorstärken  $f_k$

$$\rightarrow \alpha = \frac{e_0^2}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega}, \quad \sum_k f_k = 1$$

Mit  $\epsilon = n^2$  und Clausius Mosotti folgt

$$\boxed{3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N e_0^2}{m \epsilon_0} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega}} \quad \text{Drude'sche Formel}$$

- $n$  hängt von  $\omega$  ab: Dispersion.
- $n$  ist komplex:  $n = n_r + i\kappa$ .

Falls  $n \approx 1$  (z.B. in Gasen)

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \approx 2(n - 1) \Rightarrow n \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{N e_0^2}{m \epsilon_0} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega}$$

Was bedeutet  $\kappa$ ?

Betrachte ebene Welle

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \omega \in \mathbb{R} \\ k &= \frac{\omega}{v_{\text{ph}}} = \frac{\omega}{c'} = n \frac{\omega}{c_0} = n_r \frac{\omega}{c_0} + i\kappa \frac{\omega}{c_0} \\ \Rightarrow E_x &= E_0 e^{-\kappa\omega z/c_0} \cdot e^{i\omega(n_r z/c_0 - t)} \end{aligned}$$

Dies ist eine Welle mit Geschwindigkeit  $c_0/n_r$  (Phasengeschwindigkeit).  
Amplitude  $E_0 e^{-\kappa\omega z/c_0}$  fällt exponentiell ab.

Intensität  $I \sim E^2$

$\Rightarrow I(z) = I_0 e^{-2\kappa\omega z/c_0}$  d.h. es findet Absorption statt.

$I = I_0 e^{-\beta z}$	<b>Beer'sches Absorptionsgesetz</b>
------------------------	-------------------------------------

Absorptionskoeffizient:  $\beta = 2\kappa \frac{\omega}{c_0}$ .

Reibungskoeffizient  $\gamma \neq 0 \Rightarrow \kappa \neq 0$

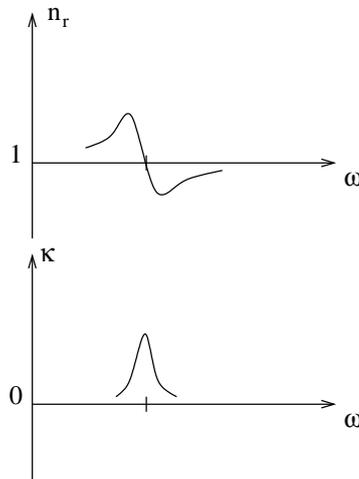
d.h. Absorption der Strahlung  $\Leftrightarrow$  Reibungsterm

In durchsichtigen Medien ist  $\kappa$  sehr klein.

Absorptionsmaxima: z.B. im Infrarot und im Ultraviolett.

In der Nähe einer Absorptionsfrequenz:

$$\begin{aligned} n_r &\approx 1 + \frac{1}{2} \frac{N e_0^2}{m \epsilon_0} f_k \frac{\omega_{0k}^2 - \omega^2}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_k^2 \omega^2} \\ \kappa &\approx \frac{1}{2} \frac{N e_0^2}{m \epsilon_0} f_k \frac{\gamma_k \omega}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_k^2 \omega^2} \end{aligned}$$



Normale Dispersion:  $\frac{dn_r}{d\omega} > 0$

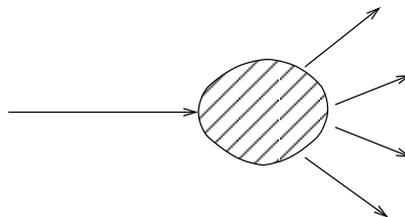
Anormale Dispersion:  $\frac{dn_r}{d\omega} < 0$ , max. Absorption

Bemerkung: obiges ist ein klassisches Modell; eine realistischere Beschreibung erfolgt in der Quantentheorie.

### 1.3.5.3 Kohärente und inkohärente Streuung

Vakuum: Ausbreitungsrichtung des Lichtes konstant  
 homogenes, isotropes Medium: dito  
 (z.B. Glas)

trübe Medien: Licht wird in andere Richtungen gestreut  
 (Milch, verschmutzte Luft)



*Lichtstreuung:* Erzeugung von Sekundärstrahlung mit anderer Ausbreitungsrichtungen in Medien.

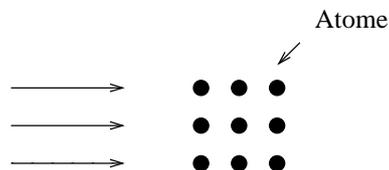
## Mikroskopisches Modell

oszillierendes  $\vec{E}$ -Feld  $\rightarrow$  Schwingung mikroskopischer Dipole  
 $\rightarrow$  Abstrahlung von sekundärer Strahlung (Hertz'scher Dipol)

Winkelverteilung? Warum geht Licht in klaren Medien fast nur geradeaus?

## Kohärente Streuung

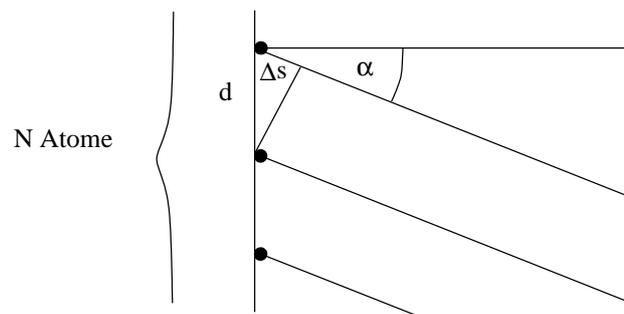
Betrachte einen idealen Kristall



einfallende Welle

$$\vec{k} = k\vec{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

betrachte eine Schicht  $z = \text{const.}$



Atome schwingen in Phase.

In Richtung  $\alpha$  gestreute Wellen benachbarter Atome:

Wegunterschied:  $\Delta s = d \cdot \sin \alpha$

Phasenunterschied:  $\Delta \varphi = k \cdot \Delta s = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \alpha$

$N$  Atome auf der Geraden in  $x$ -Richtung  $\longrightarrow$  Gesamtamplitude  
( $E$ -Feld nun ohne Vektorcharakter)

$$E = A \sum_{j=1}^N e^{-i(\omega t - \varphi_j)}$$

Phasenverschiebung:  $\varphi_j = (j - 1)\Delta\varphi$

$$\begin{aligned} E &= A e^{-i\omega t} \{1 + e^{i\Delta\varphi} + e^{i2\Delta\varphi} + \dots + e^{i(N-1)\Delta\varphi}\} \\ &= A e^{-i\omega t} \frac{e^{iN\Delta\varphi} - 1}{e^{i\Delta\varphi} - 1} = A e^{-i\omega t} \frac{e^{i\frac{N}{2}\Delta\varphi} \sin\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}{e^{i\frac{1}{2}\Delta\varphi} \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)} \end{aligned}$$

Intensität:  $I = c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle$

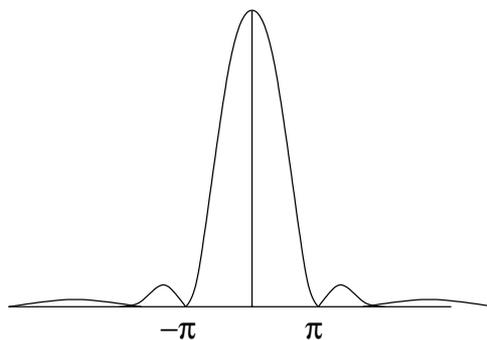
$$\Rightarrow I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2\left(N\pi\frac{d}{\lambda} \sin\alpha\right)}{\sin^2\left(\pi\frac{d}{\lambda} \sin\alpha\right)} \quad \text{mit} \quad I_0 = \frac{1}{2}c\epsilon_0 A^2$$

Mit  $x := N\pi\frac{d}{\lambda} \sin\alpha$

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{x}{N}}$$

Wir betrachten den Fall  $d \ll \lambda$ , d.h.  $|x| \ll N$ .

Für große  $N$ :



Hauptbeitrag für  $-\pi \leq x \leq \pi$ , dort ist

$$\frac{x}{N} \ll 1, \quad \sin \frac{x}{N} \approx \frac{x}{N}$$
$$\Rightarrow I(\alpha) = N^2 I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

Aus  $|x| \leq \pi$  folgt  $|\sin \alpha| \leq \frac{\lambda}{Nd}$ .

Falls also die Gesamtbreite  $Nd$  groß gegen  $\lambda$  ist, so ist  $\alpha$  sehr klein:

$$Nd \gg \lambda \Rightarrow |\alpha| \ll 1$$

Kohärente Streuung an makroskopischen Medien findet merklich nur bei sehr kleinen Winkeln statt.

Situationen, wo dies auftritt:

- Kristalle
- klare Gase, Flüssigkeiten (geringe Schwankungen der Dipoldichte).

### **Inkohärente Streuung**

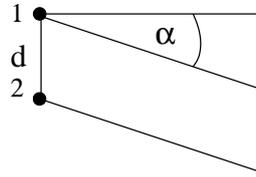
*Kohärenz:* Feldstärken werden addiert  
Phasen spielen eine Rolle

*Inkohärenz:* statistische Fluktuationen der Phasenunterschiede  
→ Verlust der Kohärenz  
→ Streuung bei größeren Winkeln

Ursachen:

- thermische Bewegung der Streuzentren
- unregelmäßige Anordnung von Streuzentren (Pulver)
- Schwankungen der Dipoldichte in Gasen und Flüssigkeiten
- Verunreinigungen

Betrachte 2 Streuzentren



Amplituden:

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t) \qquad E_2 = A_2 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$E = E_1 + E_2$$

$$\text{Intensität} \sim E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2$$

$$\begin{aligned} &= A_1^2 \cos^2(\omega t) + A_2^2 \cos^2(\omega t - \varphi) + 2A_1A_2 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \\ &= A_1^2 \cos^2(\omega t) + A_2^2 \cos^2(\omega t - \varphi) + A_1A_2[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi] \end{aligned}$$

$$\text{Zeitmittel: } I = c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

$$I_1 = c\epsilon_0 \langle E_1^2 \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 A_1^2$$

$$I_2 = c\epsilon_0 \langle E_2^2 \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 A_2^2$$

$$I = I_1 + I_2 + \underbrace{A_1A_2 \langle \cos \varphi \rangle}_{\text{Interferenzterm}}, \quad \text{wegen } \langle \cos(2\omega t - \varphi) \rangle = 0$$

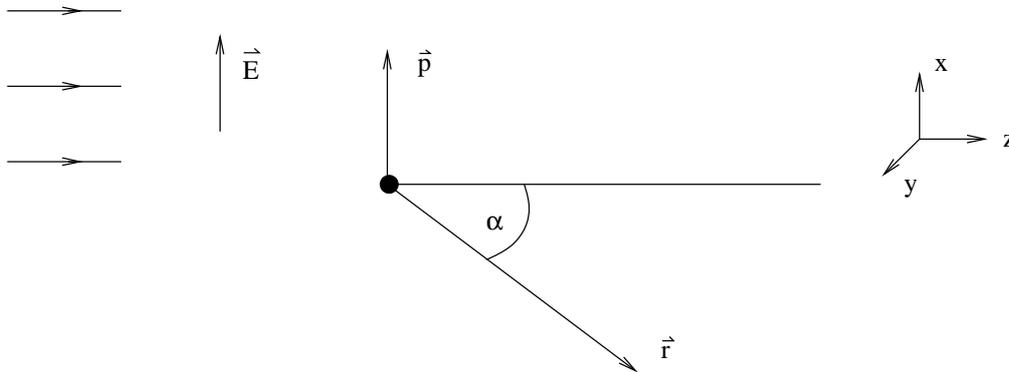
$$\text{kohärente Streuung: } \langle \cos \varphi \rangle = \cos \varphi$$

$$\text{inkohärente Streuung: } \langle \cos \varphi \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I = I_1 + I_2}$$

### Winkelverteilung bei inkohärenter Streuung

Streulicht eines einzelnen Dipols



$$\vec{r} = r(\sin \alpha \cos \varphi, \sin \alpha \sin \varphi, \cos \alpha) \quad \alpha : \text{Streuwinkel}$$

$$\vec{E} = (E, 0, 0), \quad \vec{p} = (p, 0, 0)$$

Abstrahlung des Dipols

$$I_1(\vartheta) = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta$$

Mit  $\vartheta = \angle(\vec{r}, \vec{p})$  und  $\cos \vartheta = \sin \alpha \cos \varphi$ .

$$I_1 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi)$$

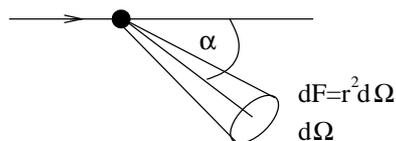
natürliches Licht: veränderliche Polarisation  $\longrightarrow$  Mittelung über  $\varphi$

$$\overline{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{2}, \quad \overline{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \alpha)$$

Inkohärente Summe über  $N$  Dipole:

$$I = \frac{N p_0^2 \omega^4}{64\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} (1 + \cos^2 \alpha)$$

Leistung  $dP$ , die in den Raumwinkel  $d\Omega$  gestreut wird.



$$dP = I dF$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = I \cdot r^2 = \frac{N p_0^2 \omega^4}{64\pi^2 \epsilon_0 c^3} (1 + \cos^2 \alpha)$$

- maximal für  $\alpha = 0$
- minimal für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Einsetzen von  $p_0$ :  $p_0 = \alpha_p E_0$ ,  $\alpha_p$  : Polarisierbarkeit

$$p_0^2 = |\alpha_p|^2 E_0^2$$

einfallende Intensität:  $I_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$

$$\Rightarrow p_0^2 = |\alpha_p|^2 \frac{2I_e}{\epsilon_0 c}$$

Damit gilt

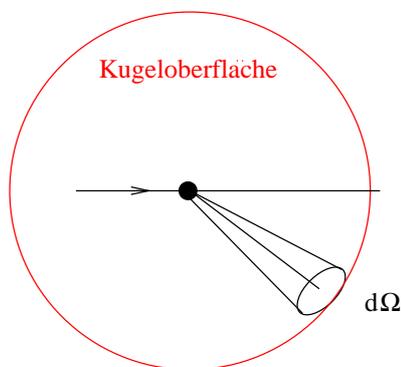
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{N |\alpha_p|^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 c^4} I_e (1 + \cos^2 \alpha)$$

### Streuquerschnitte

- differentieller Streuquerschnitt:  $\frac{\text{Leistung pro „Atom“}}{I_e}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{N I_e} \frac{dP}{d\Omega} = \frac{|\alpha_p|^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 c^4} (1 + \cos \alpha)$$

- totaler Streuquerschnitt



$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\alpha_p|^2 \omega^4}{6\pi \epsilon_0^2 c^4}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{|\alpha_p|^2 \omega^4}{6\pi \epsilon_0^2 c^4}} \quad \hat{=} \quad \text{„Fläche des Streuers“}$$

### „Rayleigh-Streuung“

John William Strutt (Lord Rayleigh) (1842-1919), Nobelpreis 1904

Rayleigh'sches Gesetz :  $\sigma \sim \frac{1}{\lambda^4}$

- blaue Farbe des Tageshimmels
- Abendrot, Morgenrot (Nebel, Schmutz)

#### 1.3.5.4 Wellen in leitenden Medien

z.B. Metalle

Strom:  $\vec{j}_a \neq 0$

Ohm'sches Gesetz:  $U = R \cdot I$

mikroskopisch:  $\vec{j}_a = \sigma \vec{E}$ ,  $\sigma$  : Leitfähigkeit

$$\rho_a = 0$$

Wellengleichung:

$$\Delta \vec{E} - \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{H} - \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \underbrace{\mu \mu_0 \sigma}_{\text{neu}} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

ebene Welle  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$  einsetzen:

$$\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$$

$$\Rightarrow k^2 - \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \omega^2 = i\mu \mu_0 \sigma \omega$$

$$k^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c_0^2} \left( 1 + i \frac{\sigma}{\omega\epsilon\epsilon_0} \right)$$

Wir schreiben wieder  $k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} n^2$

$$\Rightarrow n^2 = \mu\epsilon \left( 1 + i \frac{\sigma}{\omega\epsilon\epsilon_0} \right)$$

- $n$  komplex  $\longrightarrow$  Absorption (s. oben)  
 $n$  frequenzabhängig  $\longrightarrow$  Dispersion  
 auch  $\sigma$  ist frequenzabhängig  $\longrightarrow$  siehe folgende Elektronen-Theorie der Leitfähigkeit

### Elektronen-Theorie der Leitfähigkeit

Idee: Elektronen im Metall  $\sim$  freie Bewegung mit Reibung, klassisch

$$m(\ddot{x} + \gamma\dot{x}) = qE, \quad \vec{E} = (E, 0, 0), \quad q = -e_0$$

$$E = E_0 e^{-i\omega t}$$

Wie vorher (s.o), aber  $\omega_0^2 = 0$ .

$$\text{Strom: } \vec{j} = \varrho \vec{v} = Nq\vec{v} \quad (\text{in } x\text{-Richtung})$$

$$j = Nq\dot{x}$$

$$\Rightarrow m \frac{d}{dt} j + m\gamma j = Nq^2 E \quad (E \sim e^{i\omega t})$$

$$j(t) = j_0 e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow (-i\omega + \gamma)j = \frac{Nq^2}{m} E$$

$$\Rightarrow j = \frac{Nq^2/m}{-i\omega + \gamma} E \equiv \sigma E$$

$$\Rightarrow \text{Leitfähigkeit } \sigma(\omega) = \frac{Ne_0^2/m}{-i\omega + \gamma}$$

- $\sigma$  ist frequenzabhängig
- $\sigma$  ist komplex: es gibt eine relative Phase zwischen  $j$  und  $E$

$\omega = 0$  entspricht Gleichstrom

→ Gleichstromleitfähigkeit  $\sigma_0 = \frac{Ne_0^2}{m\gamma}$ , messbar

Mit der Dämpfungszeit  $\tau \equiv 1/\gamma$  ist  $\sigma_0 = \frac{Ne_0^2\tau}{m}$ , siehe Physik2.

Wir haben somit  $\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$ .

Außerdem haben wir  $\mu\epsilon \approx 1$  für Metalle, so dass

$$n^2 = 1 + i \frac{\sigma_0/\epsilon_0}{\omega(1 - i\omega\tau)}$$

Bemerkung: dies bekommt man auch aus dem vorigen Abschnitt mit  $\omega_0 = 0$  und  $n^2 - 1$  an Stelle von  $3 \frac{n^2-1}{n^2+1}$ .

a) kleine Frequenzen:  $\omega\tau \ll 1$  und  $\omega \ll \sigma_0/\epsilon_0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow n^2 &\approx 1 + i \frac{\sigma_0}{\epsilon_0\omega} \approx i \frac{\sigma_0}{\epsilon_0\omega} \\ n &= n' + i\kappa \approx (1 + i) \sqrt{\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0\omega}} \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } n' = \kappa = \sqrt{\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0\omega}}$$

$$\text{Absorptionskoeffizient } \beta = 2\kappa \frac{\omega}{c_0} = \sqrt{\frac{2\sigma_0\omega}{\epsilon_0 c_0^2}}$$

$$\text{Eindringtiefe (Skintiefe) } \delta = \frac{2}{\beta} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 c_0^2}{\sigma_0\omega}}$$

Anwendung: z.B. dünne Goldfolie auf Schutzbrille, absorbiert Infrarot

Typische Werte für Kupfer:

$$\tau \approx 2,7 \cdot 10^{-14} \text{ s}, \quad \sigma_0 = 6 \cdot 10^7 \text{ A/(Vm)}$$

$$\tau^{-1} = 3,7 \cdot 10^{13} \text{ Hz}, \quad \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = 6,8 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$$

Für  $\omega = 10^{12} \text{ Hz}$  ist die Skintiefe dann  $\delta = 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ .

b) große Frequenzen:  $\omega\tau \gg 1$

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega^2 \tau}$$

Mit der „Plasmafrequenz“  $\omega_p = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \tau}} = \sqrt{\frac{Ne_0^2}{\epsilon_0 m}}$  gilt

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Kupfer:  $\omega_p = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$

Falls  $\omega < \omega_p \rightarrow n$  imaginär, Absorption

Falls  $\omega > \omega_p \rightarrow n$  reell, keine Absorption

Metall wird transparent für  $\omega > \omega_p$ .

Bsp.: Röntgenstrahlen.

Zahlenwerte für  $\lambda_p = \frac{2\pi c_0}{\omega_p}$ :

Li 155 nm

Na 210 nm

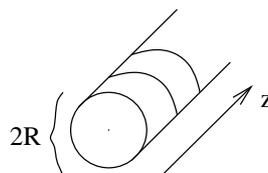
K 315 nm

Cu 120 nm

Rb 340 nm

### Zusatz: Skin-Effekt

Stromleitung in einem Draht.



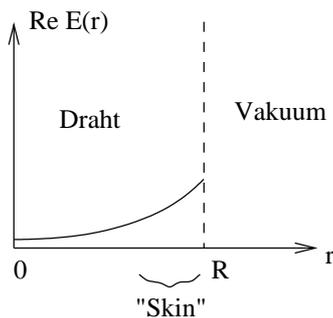
Annahme: kleine Frequenzen,  $\omega\tau \ll 1$ ,  $\omega \ll \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ ,  $\mu = 1$

Im Inneren:  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_z e^{-i\omega t}$ .

$$\begin{aligned}\Delta\vec{E} + \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0\omega^2\vec{E} &= -i\mu\mu_0\sigma\omega\vec{E} \\ \Rightarrow \Delta E(r) &= -i\mu_0\sigma_0\omega E(r) \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + i\frac{2}{\delta^2}\right) E(r) &= 0\end{aligned}$$

Lösung führt auf Besselfunktionen. Für große  $R$ :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2}{dr^2} + i\frac{2}{\delta^2}\right) E(r) &= 0 \\ E(r) &= E_0 e^{(1-i)\frac{r}{\delta}} \\ \text{Re } E(r) &= |E_0| e^{\frac{r}{\delta}} \cos\left(\frac{r}{\delta} - \omega t + \varphi\right)\end{aligned}$$



### 1.3.6 Wellenleitung

#### 1-Dimensionale-Welle

Elektromagnetische ebene Welle (linear polarisiert) trifft senkrecht auf eine leitende Ebene in der  $xy$ -Ebene.

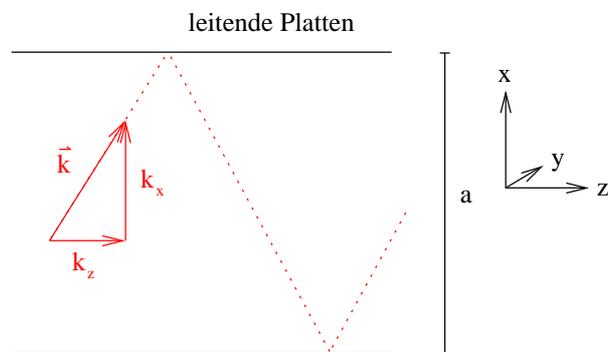
$$\begin{aligned}\vec{E} &= (E_x, 0, 0) \\ \vec{B} &= (0, B_y, 0).\end{aligned}$$

Auf der leitenden Oberfläche des Blechs ( $z = 0$ ) muss die Tangentialkomponente  $E_x$  verschwinden, daher gilt

$$\vec{E}(z = 0) = 0 = \vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{0r} = -\vec{E}_{0i}$$

$\Rightarrow$  Phasensprung um  $\pi$  für das E-Feld.

## Wellenleiter



Das  $\vec{E}$ -Feld soll nun so polarisiert sein, dass es nur in  $y$ -Richtung schwingt, also

$$\vec{E} = (0, E_y, 0).$$

Für den Wellenvektor gilt

$$\vec{k} = (k_x, 0, k_z), \quad |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}.$$

Reflexion der  $x$ -Komponente an den leitenden Platten:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \{ \sin(\omega t - k_x x - k_z z) - \sin(\omega t + k_x x - k_z z) \} \\ &= -2\vec{E}_0 \sin(k_x x) \cos(\omega t - k_z z) \end{aligned}$$

$2\vec{E}_0 \sin(k_x x)$ : in  $x$ -Richtung modulierte Amplitude.

$\cos(\omega t - k_z z)$ : propagierende Welle in  $z$ -Richtung.

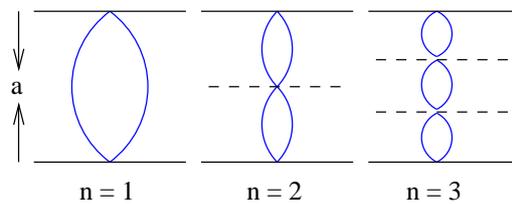
Aus der Randbedingung  $E(x = 0, a) = 0$  folgt

$$k_x = n \frac{\pi}{a}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Lage der Knoten:

$$n = 1 \quad \sin(k_x x) = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = a$$

$$n \geq 2 \quad k_x \cdot x = \pi \quad \rightarrow \quad \frac{n\pi}{a} x = \pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{a}{n}$$



Moden des elektrischen Feldes

Zwei Arten werden unterschieden:

transversale elektrische Moden **TE**  $\vec{E} \perp \vec{k}$  (hier)

transversale magnetische Moden **TM**  $\vec{B} \perp \vec{k}$

Moden bilden ein Orthonormalsystem.

Propagierende Welle:  $\cos(\omega t - k_z z)$

Phasengeschwindigkeit:  $v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_z}$

Freie elektromagnetische Wellen:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}$$

$$v_{\text{ph}} = \frac{1}{k_z} c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$k_y = 0$$

$$v_{\text{ph}} = c \cdot \sqrt{\frac{k_x^2 + k_z^2}{k_z^2}} = c \cdot \sqrt{1 + \frac{k_x^2}{k_z^2}} \Rightarrow v_{\text{ph}} > c !$$

Gruppengeschwindigkeit:

$$v_G = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\text{hier: } v_G = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{d\omega}{dk} \cdot \frac{dk}{dk_z} = \frac{c^2}{\omega} k_z = \frac{c^2}{v_{\text{ph}}} < c !$$

$v_{\text{ph}}$  und  $v_G$  hängen von der Frequenz  $\omega$  der Wellen ab.

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_z}; \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}}}$$

- Dispersion:  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow v_{\text{ph}} \rightarrow c$
- unterschiedliche Moden haben unterschiedliche  $v_{\text{ph}}$  und  $v_G$ .

Für eine sich ausbreitende Welle ist  $k_z$  reell.

$$E(\omega, k) = E_0 e^{i(\omega t - k_z t)}$$

$k_z$  imaginär  $\rightarrow$  starke Dämpfung.

$k_z$  reell  $\rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} > \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$

$\Rightarrow$  untere Grenzfrequenz:

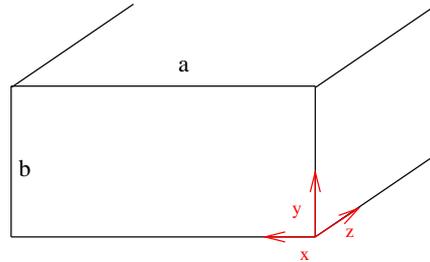
$$\omega > \omega_G = n \frac{\pi}{a} c$$

$$\nu > \nu_G = \frac{nc}{2a}$$

$$\Rightarrow \lambda < \lambda_G = \frac{c}{\nu_G} = \frac{2a}{n}$$

## Hohlleiter

2-D



$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y) \cos(\omega t - k_z z)$$

Randbedingungen für räumliche Feldverteilung:

$$k_x = \frac{n\pi}{a}, \quad k_y = \frac{m\pi}{b}$$

Eingesetzt in die obige Wellengleichung

$$E_x = E_{0x} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$E_y = E_{0y} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$E_z = 0$$

→ TE<sub>nm</sub>-Moden.

Beispiel: TE<sub>10</sub>-Mode

$$E_y = E_{0y} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) \cdot \cos(\omega - k_z z)$$

Magnetfeld dieser Mode mithilfe von  $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{E}$ :

$$B_x = -\frac{k_z}{\omega} E_{0y} \sin(k_x x) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = -\frac{k_x}{\omega} E_{0y} \cos(k_x x) \cos(\omega t - k_z z)$$

$\vec{B}$ -Feld hat von Null verschiedene Komponenten in  $x$ -Richtung und in  $y$ -Richtung.

$$E_x = E_{0x} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$E_y = E_{0y} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$E_z = 0$$

$$B_x = -\frac{k_x}{\omega} E_{0y} \sin(k_x x) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$B_y = 0$$

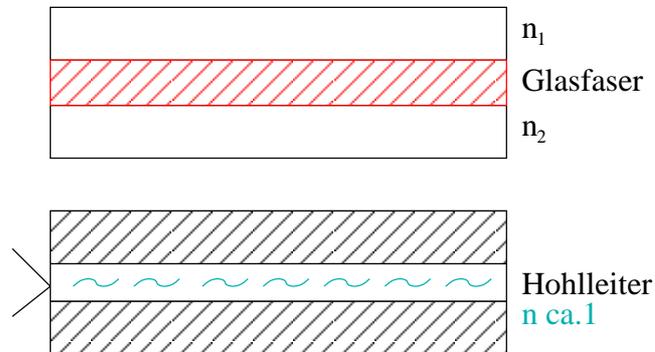
$$B_z = -\frac{k_x}{\omega} E_{0y} \cos(k_x x) \cos(\omega t - k_z z)$$

Untere Grenzfrequenz:

$$\omega > \omega_G = c\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

Dimensionen  $a$  und  $b$  bestimmen  $\omega_G$ . Durch geschickte Dimensionierung lässt sich eine bestimmte Mode bevorzugen.

Runde Wellenleiter  $\longrightarrow$  optischer Bereich



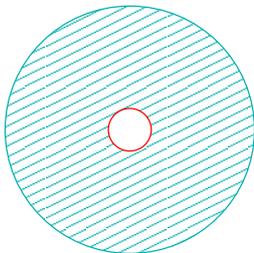
### Lecher-Leitung

$$\frac{\lambda}{2} = 35 \text{ cm}$$

$$\mu = 433 \text{ MHz}$$

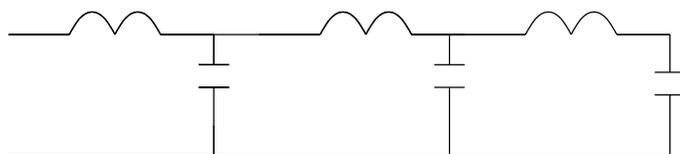
$$c = 0.7 \text{ m} \cdot 433 \text{ MHz} = 293.100 \text{ km/s}$$

### Koaxial-Kabel



Polyethylen

Ersatzschaltbild



RG 58 C/U:  $C = 101 \text{ pF/m}$ ;  $L = 0,25 \mu \text{ H/m}$

Spannung

$$\begin{aligned} \Delta U &= U(z + \Delta z) - U(z) \\ &= -\hat{L} \Delta z \frac{dI}{dt} \\ \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial z} &= -\hat{L} \frac{\partial I}{\partial t} \end{aligned}$$

Ladung pro Längeneinheit:  $q = \hat{C}U \cdot \Delta z$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\partial I}{\partial z} &= -\hat{C} \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= \hat{L} \hat{C} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} &= \hat{L} \hat{C} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Wellengleichung für Ausbreitung auf dem Koaxialkabel.

$$U = U_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$I = I_0 \sin(\omega t - kz)$$

Phasengeschwindigkeit:

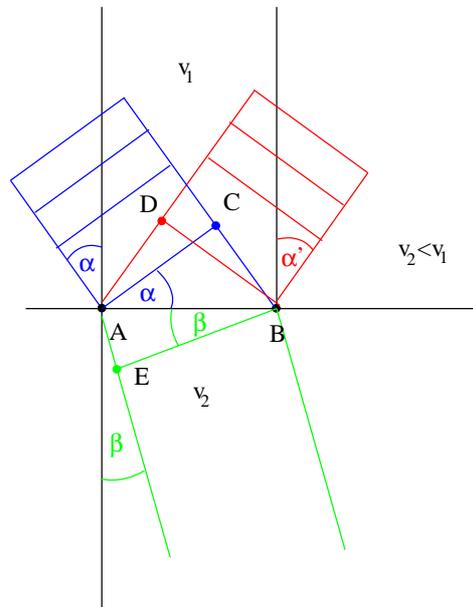
$$v_{\text{ph}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{L}\hat{C}}}$$

Wellenwiderstand des Kabel:

$$Z_0 = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{\hat{L}}{\hat{C}}}$$



Reflexion und Brechung einer ebenen Welle beim Übergang zwischen zwei Medien:



$$\overline{CB} = v_1 t \quad \text{für die einlaufende Welle.}$$

$$\overline{AD} = v_1 t \quad \text{für die reflektierte Welle.}$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{v_1 t}{\overline{AB}}$$

$$\sin \alpha' = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{v_1 t}{\overline{AB}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sin \alpha'$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \alpha'} \quad \text{Reflexionsgesetz}$$

$$\sin \beta = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{v_2 t}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\boxed{\frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}}$$

**Snellius'sches Brechungsgesetz**

Wenn  $n_2 > n_1$  ( $c_2 < c_1$ ) gilt, dann ist Medium II das optisch dichtere Medium. Es ist

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha < \sin \alpha$$

und damit gibt es für alle Winkel  $\alpha$  einen Winkel  $\beta$  mit  $\beta < \alpha$ .

Wenn  $n_2 < n_1$  gilt, dann ist  $n_1/n_2 > 1$  und

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha$$

ist damit nicht für alle Winkel  $\alpha$  definiert!

⇒ kein gebrochener Strahl, sondern *Totalreflexion*.

Grenzwinkel für die Totalreflexion:

$$\sin a_T = \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \sin \beta = 1$$

Katzenauge: das reflektierte Licht geht immer in die Richtung des einfallenden Strahls zurück.

Fernglas

Sucher von Spiegelreflexkameras

Wellenleiter: Glasfaserkabel

## 2.1.2 Amplituden reflektierter und gebrochener Wellen

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel \quad \text{mit} \quad \vec{E}_\perp = (0, 0, E_z), \quad \vec{E}_\parallel = (E_x, E_y, 0)$$

ebenso

$$\vec{B} = \vec{B}_\perp + \vec{B}_\parallel.$$

### Betrachtung von $\vec{E}_\perp$

$\vec{E}_\perp$  ist eine Tangentialkomponente in der Grenzfläche. Sie muss dort stetig sein, d.h.

$$\vec{E}_{i0\perp} + \vec{E}_{r0\perp} = \vec{E}_{t0\perp}.$$

Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente von  $\vec{B}/\mu$ . folgt, dass

$$-\frac{1}{\mu_i} \vec{B}_{i\parallel} \cdot \cos \vartheta_i + \frac{1}{\mu_r} \vec{B}_{r\parallel} \cdot \cos \vartheta_r = \frac{1}{\mu_t} \vec{B}_{t\parallel} \cdot \cos \vartheta_t.$$

Hier ist

$\vartheta_i$ : Einfallswinkel

$\vartheta_r$ : Winkel des reflektierten Strahls

$\vartheta_t$ : Gebrochener Strahl (transmittiert)

- bei nicht-magnetischen Materialien:  $\mu_i = \mu_r = \mu_t = 1$ .

-  $\vartheta_r = \vartheta_i$

-  $n_i = n_r$

-  $\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) \Rightarrow \frac{c}{n} \vec{B} = \vec{k}_0 \times \vec{E} \Rightarrow \frac{c}{n} |\vec{B}| = |\vec{k}_0 \times \vec{E}| = |\vec{E}|$

Einsetzen:

$$n_i (\vec{E}_{0i} - \vec{E}_{0r})_\perp \cos \vartheta_i = n_t E_{0t\perp} \cos \vartheta_t$$

ebene Wellen:  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$  auflösen nach  $\left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_\perp, \left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)_\perp$

$$\left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_\perp = \frac{n_i \cos \vartheta_i - n_t \cos \vartheta_t}{n_i \cos \vartheta_i + n_t \cos \vartheta_t} =: r_\perp \quad (\text{Reflexionskoeffizient})$$

$$\left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)_\perp = \frac{2n_i \cos \vartheta_i}{n_i \cos \vartheta_i + n_t \cos \vartheta_t} =: t_\perp \quad (\text{Transmissionskoeffizient})$$

## Reflektierte und transmittierte Amplituden

Tangentialkomponenten verhalten sich stetig an der Grenzfläche.

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{i0\perp} + \vec{E}_{r0\perp} &= \vec{E}_{t0\perp} \\
 n_i(E_{i0} - E_{r0})_{\perp} \cos \vartheta_i &= n_t E_{t0\perp} \cos \vartheta_t \\
 \Rightarrow E_{i0\parallel} \cos \vartheta_i - E_{r0\parallel} \cos \vartheta_r &= E_{t0\parallel} \cos \vartheta_t \\
 B_{i0\perp} + B_{r0\perp} &= B_{t0\perp} \\
 \left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_{\perp} &= \frac{n_i \cos \vartheta_i - n_t \cos \vartheta_t}{n_i \cos \vartheta_i + n_t \cos \vartheta_t} = r_{\perp} \\
 \left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)_{\perp} &= \frac{2n_i \cos \vartheta_i}{n_i \cos \vartheta_i + n_t \cos \vartheta_t} = t_{\perp} \\
 \left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_{\parallel} &= \frac{n_t \cos \vartheta_i - n_i \cos \vartheta_t}{n_t \cos \vartheta_i + n_i \cos \vartheta_t} = r_{\parallel} \\
 \left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)_{\parallel} &= \frac{2n_i \cos \vartheta_i}{n_t \cos \vartheta_i + n_i \cos \vartheta_t} = t_{\parallel}
 \end{aligned}$$

Das sind die *Fresnel-Formeln* für die Amplituden.

Ein Ausnutzen des Brechungsgesetzes

$$\frac{n_t}{n_i} = \frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_t}$$

liefert uns die Fresnel-Formeln ohne die expliziten Brechungsindizes:

$$\begin{aligned}
 r_{\perp} &= -\frac{\sin(\vartheta_i - \vartheta_t)}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)} & r_{\parallel} &= \frac{\tan(\vartheta_i - \vartheta_t)}{\tan(\vartheta_i + \vartheta_t)} \\
 t_{\perp} &= \frac{2 \cos(\vartheta_i) \sin(\vartheta_t)}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)} & t_{\parallel} &= \frac{2 \cos(\vartheta_i) \sin(\vartheta_t)}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t) \cos(\vartheta_i - \vartheta_t)}
 \end{aligned}$$

## Phasenfaktoren

(a)  $n_i < n_t$

$$\begin{aligned}
E_{r\perp}: & \text{ Phasensprung von } \Delta\phi_{\perp} = \pi. \\
E_{r\parallel}: & \text{ (i) } \vartheta_i + \vartheta_t > \pi/2 \Rightarrow \Delta\phi_{\parallel} = \pi. \\
& \text{ (ii) } \vartheta_i + \vartheta_r < \pi/2 \Rightarrow \Delta\phi_{\parallel} = 0. \\
& \vartheta_i + \vartheta_t = \pi/2 \Rightarrow \vartheta_i = \vartheta_B
\end{aligned}$$

## Diskussion der Fresnel-Formeln

Fresnel-Formeln beinhalten die Koeffizienten für die Amplituden.  
Jetzt sollen die Intensitäten betrachtet werden.

$$\begin{aligned}
\text{Poynting-Vektor } \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \\
\vec{B} &= \frac{n}{c} (\vec{k}_0 \times \vec{E}) \\
\vec{S} &= \frac{n}{c} E^2 \vec{k}_0
\end{aligned}$$

Energiefluss pro Flächeneinheit:

$$\begin{aligned}
\text{einfallende Welle: } & J_i = S_i \cos \vartheta_i \\
& J_i = \frac{n_i}{c} E_i^2 \cos \vartheta_i \\
\text{reflektierte Welle: } & J_r = \frac{n_i}{c} E_r^2 \cos \vartheta_r \\
\text{transmittierte Welle: } & J_t = \frac{n_t}{c} E_t^2 \cos \vartheta_t
\end{aligned}$$

Reflexionsvermögen:

$$R = \frac{J_r}{J_i} = \frac{E_r^2 \cos \vartheta_r}{E_i^2 \cos \vartheta_i} = r^2$$

Transmissionsvermögen:

$$T = \frac{J_t}{J_i} = \frac{n_t \cos \vartheta_t}{n_i \cos \vartheta_i} \frac{E_t^2}{E_i^2} = \frac{n_t \cos \vartheta_t}{n_i \cos \vartheta_i} t^2$$

## Spezialfälle

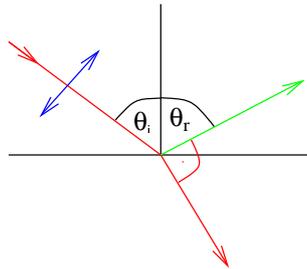
(a) Senkrechter Einfall:  $\vartheta_i = 0 \Rightarrow \vartheta_t = 0$

$$R_{\perp} = \left( \frac{n_i \cos(\vartheta_i) - n_t \cos(\vartheta_t)}{n_i \cos(\vartheta_i) + n_t \cos(\vartheta_t)} \right)^2$$
$$R_{\perp}(\vartheta_i = 0) = \left( \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t} \right)^2$$
$$R_{\parallel}(\vartheta_i = 0) = \left( \frac{n_t - n_i}{n_i + n_t} \right)^2 = R_{\perp}(\vartheta_i = 0)$$

(b) **Brewster-Winkel**  $\vartheta_B$

Abstrahlungcharakteristik eines Dipols:

- in Dipolachse wird keine Strahlung emittiert.



$$\vartheta_i = \vartheta_r = \vartheta_B$$

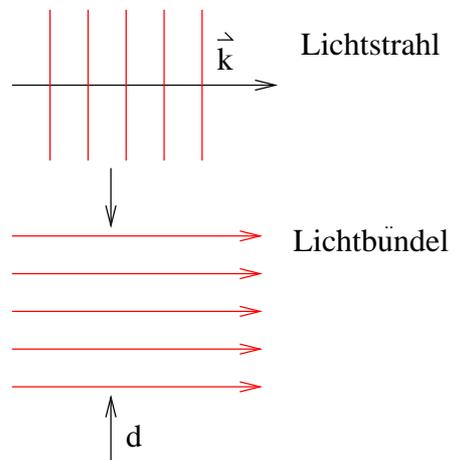
$$\vartheta_r + \vartheta_t = 90^\circ$$

$$\vartheta_t = 90^\circ - \vartheta_r = 90^\circ - \vartheta_B$$

$$n_i \sin(\vartheta_i) = n_i \sin(\vartheta_B) = n_t \sin \vartheta_t = n_t \sin(90^\circ - \vartheta_B) = n_t \cos \vartheta_B$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \vartheta_B}{\cos \vartheta_B} = \tan \vartheta_B = \frac{n_t}{n_i}$$

## 2.2 Geometrische Optik



Näherung, aber gilt schon wenn  $d > 20 \cdot \lambda$ ,

$\lambda = 500 \text{ nm} \rightarrow d \geq 10 \text{ } \mu\text{m}$

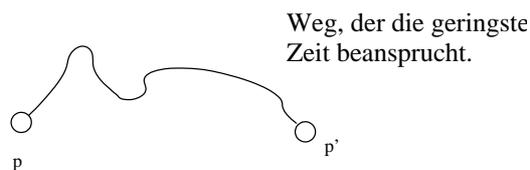
Gauß'sche Strahlen  $\rightarrow$  Laser

### 2.2.1 Grundaxiome der geometrischen Optik

- in optisch homogenen Medien sind Lichtstrahlen Geraden.
- Lichtbündel, die sich durchdringen, beeinflussen sich nicht.
- Übergang von einem Medium in ein anderes wird durch Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz beschrieben.
- Intensitäten werden dabei durch die Fresnel-Gleichungen beschrieben.

$\rightarrow$  *Lineare Optik*

### Fermat'sches Prinzip



## 2.2.2 Optische Abbildungen

verkleinernd: Fotoapparat

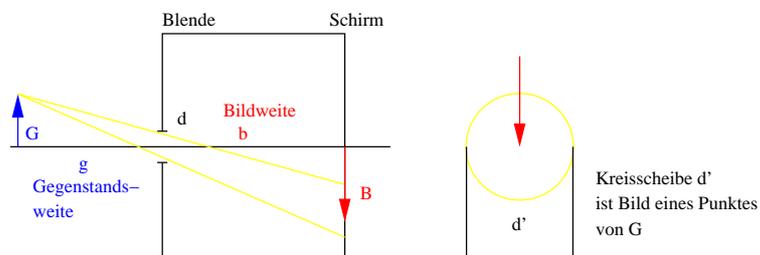
vergrößernd: Mikroskop

Ziel: möglichst winkeltreues und farbgetreues Bild.

Herausforderung an die Optik.

Optische Werkzeuge: gekrümmte Spiegel, gekrümmte Linsen.

### Lochblende



$$d' = \frac{g+b}{g} \cdot d$$

Beugung:

$$d_B = \frac{2b\lambda}{d} =: d' \quad \text{Wellenoptik}$$

Aus beiden folgt ein optimaler Durchmesser der Blende:

$$d_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{gb}{g+b} 2\lambda}$$

fester Blendendurchmesser

→ Lichtmenge ist konstant.

$\frac{\text{Öffnungsdurchmesser}}{\text{Bildweite}} = \frac{d}{b}$  : Öffnungsverhältnis

$\frac{b}{d}$  : Blende

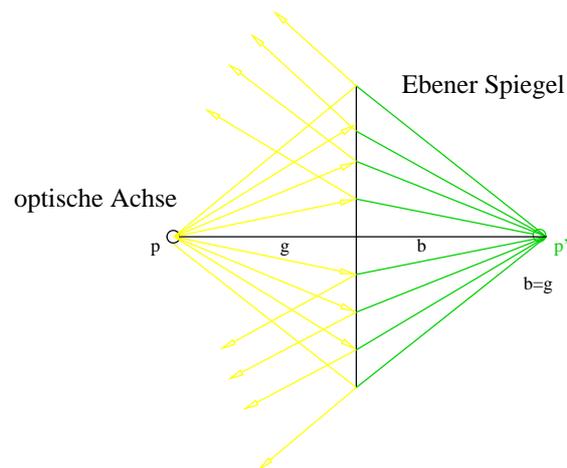
$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$  : Abbildungsmaßstab

Linsen, Spiegel:

Einstellen des Abbildungsmaßstabes.

Erhöhung der Lichtstärke.

### 2.2.3 Spiegel



Reflektierte Strahlen sind divergent.

### Hohlspiegel

reale, virtuelle Bilder

sphärische Hohlspiegel

- gute Eigenschaften für kleine Strahlenbündel.

*sphärisch* einfach, nicht ideal

*parabolisch* Punktquelle  $\Leftrightarrow$  paralleles Strahlenbündel

*elliptisch* Punkt-zu-Punkt-Abbildung

*hyperbolisch* Teleskope, Abbildungen

*toroidal* bei streifendem Einfall



P außerhalb von M: → Bild P' ist auf dem Kopf und verkleinert, reales Bild.

P zwischen F und M: → Bild P' ist vergrößert, auf dem Kopf und außerhalb M, reales Bild.

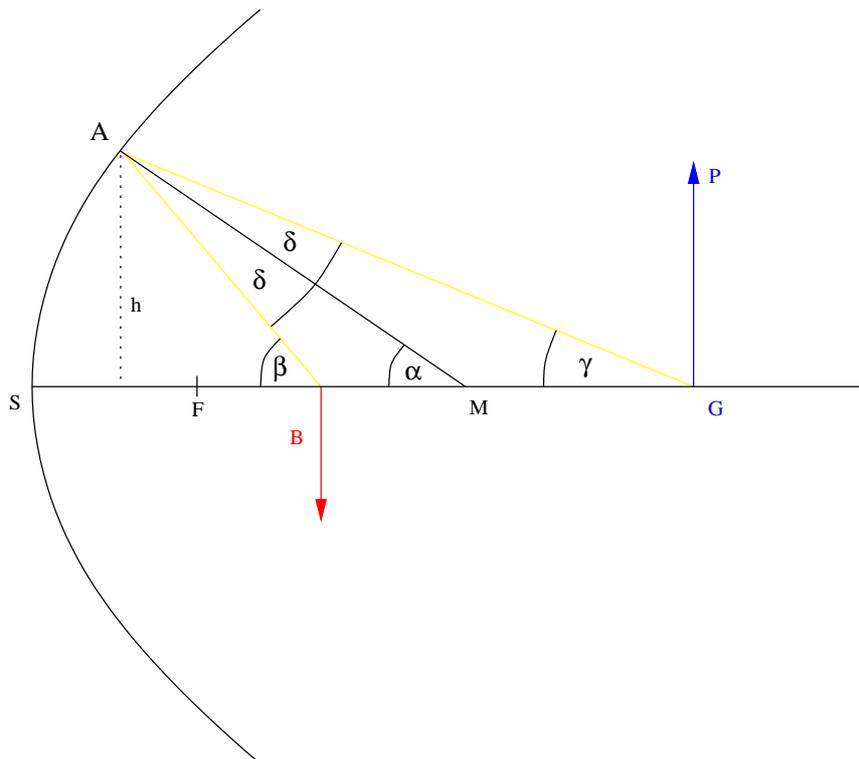
P zwischen F und S → divergente Strahlen vom Spiegel, kein reales Bild.

Rückseitige Verlängerung der Strahlen.

P' ist virtuell, vergrößert und aufrechtstehend.

Abbildungsmaßstab

$$\frac{\overline{P}}{\overline{P'}} = \frac{G}{B} = \frac{g - \overline{SM}}{\overline{SM} - b} \Rightarrow \frac{G}{B} = \frac{q - R}{R - b}$$



Dreieck MGA:  $\gamma + \delta = \alpha$

Dreieck BMA:  $\alpha + \delta = \beta \Rightarrow \gamma + \beta = 2\alpha$

Achsennahe Strahlen:  $\sin \alpha = \tan \alpha = \alpha$

$A \approx S$

$$\tan \gamma = \frac{h}{g} \approx \gamma \qquad \tan \beta = \frac{h}{b} \approx \beta \qquad \sin \alpha = \frac{h}{R} \approx \alpha$$

einsetzen:

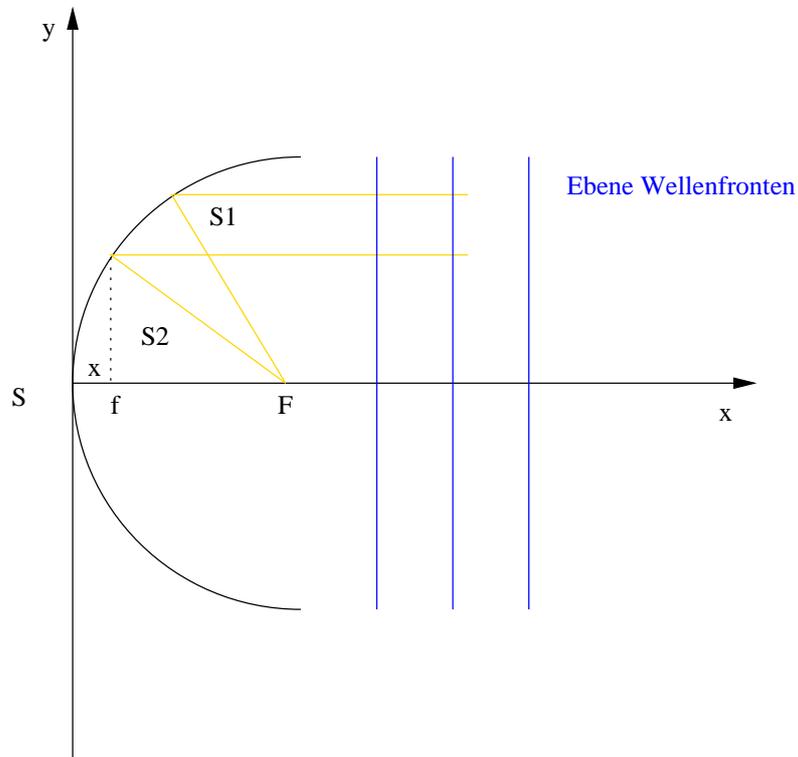
$$\frac{h}{g} + \frac{h}{b} \approx \frac{2h}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \approx \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$

Dies ist die Abbildungsgleichung für sphärische Hohlspiegel für achsennahe Strahlen.

Abbildungsmaßstab  $\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$

Nachteil des sphärischen Spiegels ist ein verschmierter Fokus durch *sphärische Aberration*.

## Parabolspiegel



$$S = S_1 + S_2$$

$$S_1 = f - x$$

$$S_2 = \sqrt{(f - x)^2 + y^2}$$

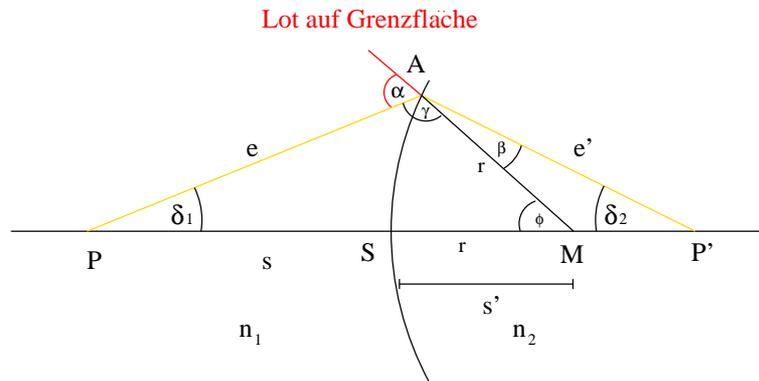
$$S = f - x + \sqrt{(f - x)^2 + y^2}$$

Parabelgleichung:  $y^2 = 4fx$

Damit ist  $S = 2f$  und der Parabolspiegel bildet ohne sphärische Aberration ab.

## 2.2.4 Linsen

### 2.2.4.1 Brechung an einer Kugelfläche



$r$  : Krümmungsradius

$S, S'$  : Schnittflächen

Vorzeichen-Konvention:

rechts vom Scheitelpunkt: positiv

links vom Scheitelpunkt: negativ

Dreieck PMA:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PA}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \varphi} = \frac{\sin (180^\circ - \alpha)}{\sin \varphi}$$

$$\overline{PM} = s + r, \quad \overline{PA} = l$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{s + r}{l} \quad (1)$$

Dreieck MP'A:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{AP'}} = \frac{\sin \beta}{\sin (180^\circ - \varphi)} = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi}$$

$$\overline{MP'} = s' - r, \quad \overline{AP'} = l'$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \varphi} = \frac{s' - r}{l'} \quad (2)$$

Man setzt das Brechungsgesetz ( $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$ ) in (2) ein und erhält

$$\frac{s' - r}{l'} = \frac{n_1 \sin \alpha}{n_2 \sin \varphi} = \frac{n_1 s + r}{n_2 l}$$

$$\boxed{n_1 \frac{s + r}{l} = n_2 \frac{s' - r}{l'}}$$

$$s' = \frac{n_1 l'}{n_2 l} (s + r) + r$$

Abhängig von  $\frac{n_1}{n_2}$ ,  $r$ ,  $s$ , aber auch von  $l$ .

⇒ sphärische Aberration.

Achsennahe Strahlen:  $l \approx s$  und  $l' \approx s'$

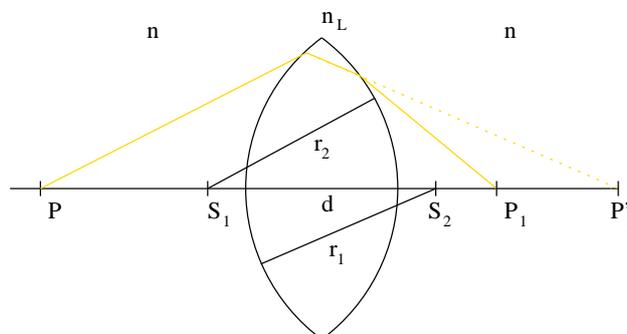
$$\Rightarrow n_1 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) = n_2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right)$$

Dies ist die *Abbe'sche Invariante* der Brechung.

## 2.2.4.2 Linsen

Sphärische Linsen

### Brechung an einer Linse



Betrachte die Abbe'schen Invarianten der Brechung:

linke Fläche:

$$\frac{n}{s_1} + \frac{n_L}{s'_1} = \frac{n_L - n}{r_1}$$

rechte Fläche:

$$\frac{n_L}{s'_1 - d} + \frac{n}{s_2} = \frac{n - n_L}{-r_2}$$

nach  $s'_1$  auflösen  $\rightarrow$

$$\boxed{\frac{n_L r_1 s_1}{(n_L - n) s_1 - n r_1} = \frac{n_L r_2 s_2}{(n_L - n) s_2 + n r_2} + d} \quad \text{Schnittweiten-Gleichung}$$

$n_L, r_1, r_2$  : Charakteristika d. Linse.

$\rightarrow$  Zusammenhang zwischen  $s_1$  und  $s_2$ .

### (a) Dünne Linsen:

Dünne Linsen:  $d \ll s_1, s_2$

$$n \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) = (n_L - n) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$d \ll s_1, s_2 \rightarrow s_1 = g, s_2 = b$

Mit der Abbildungsgleichung  $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$  (siehe Hohlspiegel) folgt

$$\frac{1}{f} = \frac{n_L - n}{n} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Und damit für die Brennweite einer dünnen Linse

$$\boxed{f = \frac{n}{n_L - n} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \quad \text{Brennweite einer dünnen Linse}$$

$n = 1$  (Luft), Bikonvexlinse:  $r_1 = -r_2 = r$

$$f = \frac{1}{n_L - 1} \cdot \frac{r}{2} \quad \text{dünne Bikonvexlinse}$$

$$f = \frac{r}{2} \quad \text{Hohlspiegel}$$

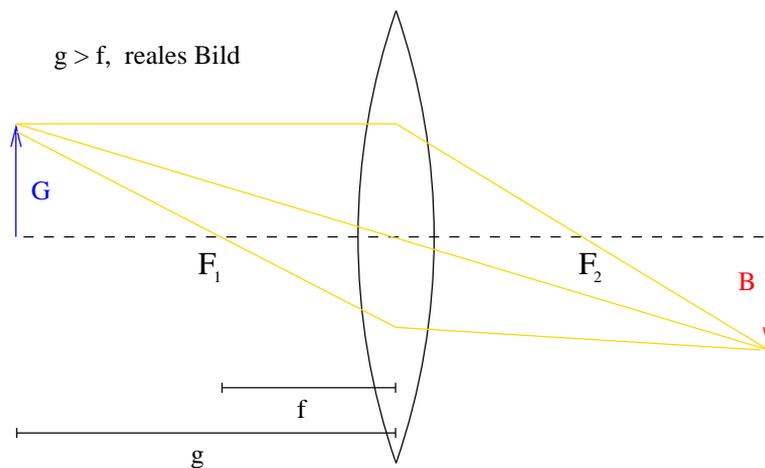
Brennweite einer Linse ebenso aus  $s_1 = \infty$ .

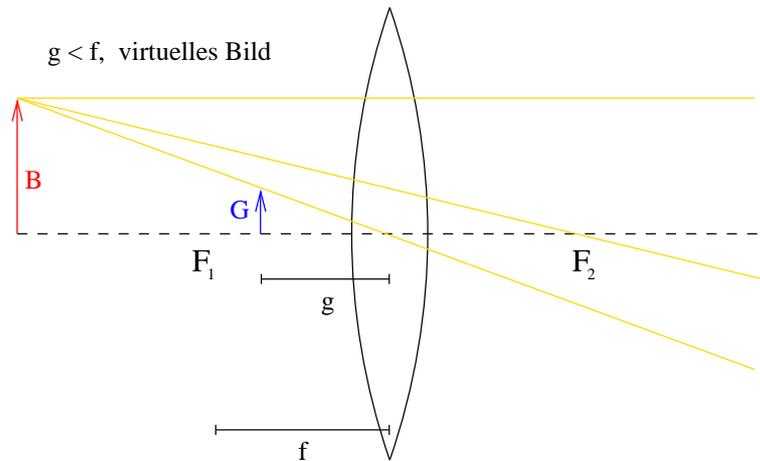
$$\frac{1}{f} =: D \quad \text{Brechkraft}$$

$$\left[ \frac{1}{\text{m}} \right] =: [D = \text{Dioptrie}]$$

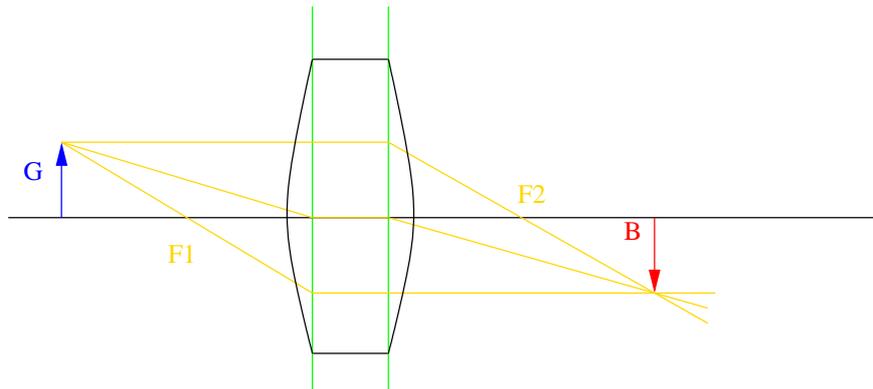
### Konstruktion von Abbildungen

- Strahlen parallel zur optischen Achse gehen durch den Brennpunkt.
  - Strahlen durch den Mittelpunkt der Linse werden nicht abgelenkt.
- ( $d = 0$ )





(b) Dicke Linsen



Lage der Hauptebenen

$$H_1 = -\frac{n_L - n}{n_L} f d \cdot \frac{1}{r_2}$$

$$H_2 = -\frac{n_L - n}{n_L} f d \cdot \frac{1}{r_1}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n_L - n}{n} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{n_L - n}{n_L} d \frac{1}{r_1 r_2} \right]$$

→ unübersichtliche Beschreibung.

## Matrixmethode (2x2 - Matrizen)

- optische Elemente
- Weg zwischen den Elementen

Translationsmatrix

$$T_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{x_2 - x_1}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

Linse:  $M_L = B_1 T_{12} B_2$

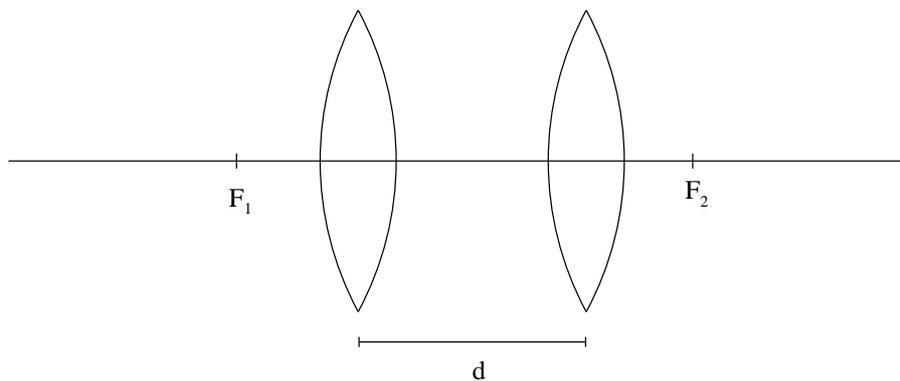
dünne Linse:  $M_L = \begin{pmatrix} 1 & -1/f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Abbildung:  $M_{GB} = T_G M_L T_B$

$$T_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix}, \quad T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$
$$M_{GB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

(Demtröder, S. 275 — 277)

### 2.2.4.3 Linsensysteme



Gesamtbrechkraft

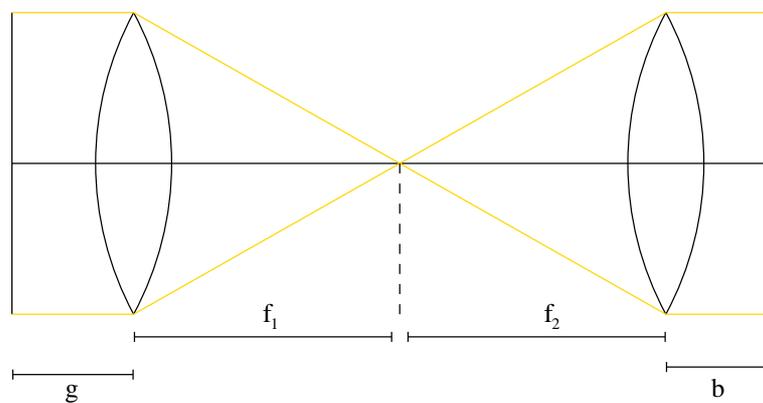
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$\Rightarrow f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

$$d < f_1 + f_2 \rightarrow f > 0, f < f_1, f_2$$

$$d > f_1 + f_2 \rightarrow f < 0$$

(aber liefert ein reales, vergrößertes Bild!)



Relay-Abbildung

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{f_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_1 + f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{f_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

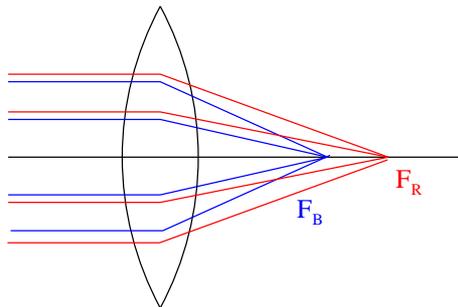
#### 2.2.4.4 Linsenfehler

Strahlen nahe der optischen Achse: paraxiale Näherung.

- Dispersion
- Seidel-Aberration
- sphärische Aberration
- chromatische Aberration
- Astigmatismus

- Bildfeldwölbung
- Koma
- Zernike Polynome

### Chromatische Aberration (Farbfehler)



Effekt aufgrund der Materialdispersion.

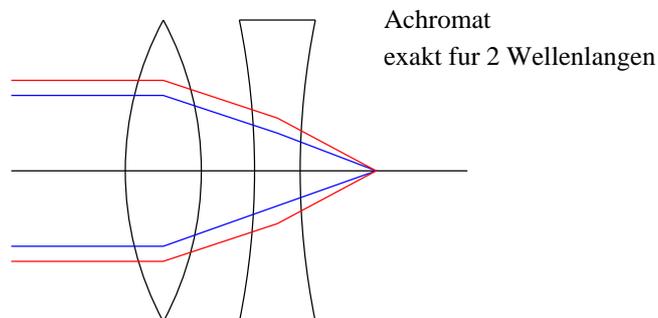
$$n_L(\lambda = 450 \text{ nm}) > n_L(650 \text{ nm})$$

Für die Brennweite von dünnen Linsen gilt

$$f = \frac{1}{n_L - 1} \frac{r_1}{2}$$

Wichtig im Blauen und UV.

Korrektur:



Luftspalt: Fraunhofer Achromat  
 ohne Luftspalt: verkittet (Canada-Balsam)

Korrektur eines größeren Spektralbereichs erfordert mehrere Linsen.

## 2.3 Wellenoptik

### 2.3.1 Interferenz

Zur Beobachtung ist mindestens eine partielle räumliche und zeitliche Kohärenz notwendig.

- Laser: einfach.
- Element-Lampen: einfach.
- Glühlampen: inkohärent.

Interferenz  $\Leftrightarrow$  Wellennatur des Objektes.

→ Interferometer: Aussagen über die Lichtquelle.

- zeitliche Kohärenz → Spektrum
- räumliche Kohärenz

(a) Wellenfrontteilende Interferometer

(b) Amplitudenteilende Interferometer

zu (a): Young'scher Doppelspalt, Fresnel'scher Spiegelversuch

zu (b): Zweistrahl-Interferometer, Vielstrahl-Interferometer

Zweistrahl-Interferometer:

Michelson I.

Twyman-Green I.

Kösters I.

Jamin I.

Mach-Zehnder I.

Sagnac I. (Messung von Rotationen)

Vielstrahl-Interferometer:

Fabry-Pérot-I.  
(Lummer-Gehrke-Platte)  
Interferenz-Filter  
dielektrische Spiegel  
sphärische Fabry-Pérot I.

Überlagerung zweier Felder:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{01} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_2) \\ \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2\end{aligned}$$

Intensität:

$$\begin{aligned}I &= c\epsilon_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \langle \vec{E}^2 \rangle \\ \langle \vec{E}^2 \rangle &= \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \rangle = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle + 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \\ \text{Interferenzterm } \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle &= \frac{1}{2} \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_1 - \varphi_2) \\ I_{12} &\propto \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos \Delta\varphi\end{aligned}$$

Gesamtintensität:

$$\begin{aligned}I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi \\ I_{\max} &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \Leftrightarrow \Delta\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots \\ I_{\min} &= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \Leftrightarrow \Delta\varphi = \pm\pi, \pm 3\pi \dots\end{aligned}$$

Für  $I_1 = I_2$ :  $I_{\max} = 4I_1, I_{\min} = 0$

Intensitätsverhältnis  $I_{\max}, I_{\min}$

- macht eine Aussage über die Kohärenz

$$V := \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad \text{Sichtbarkeit, Visibility}$$

Für  $I_{\min} = 0 \rightarrow V = 1$

$$V = |\gamma_{12}(\Delta t)| \cdot \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

$\gamma_{12}$ : normierte Korrelationsfunktion

$$|\gamma_{12}(\Delta t)| = \frac{\Gamma_{12}(\Delta t)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0) \Gamma_{22}(0)}}$$
$$\Gamma_{12}(\Delta t) = \langle \vec{E}_1(t) \cdot \vec{E}_2^*(t) \rangle$$

Longitudinale Kohärenz:

$$t_c = \frac{1}{\Delta\nu}, \quad l_c = ct_c$$

$t_c$ : Kohärenzzeit,  $l_c$ : Kohärenzlänge,  $c$ : Lichtgeschwindigkeit

Spektrallinie  $\Delta\nu = 2 \text{ GHz} \Rightarrow t_c = 5 \cdot 10^{-10} \text{ s} \Rightarrow l_c = 15 \text{ cm}$

## Young'scher Doppelspaltversuch

Räumliche Kohärenz einer Lichtquelle

$$\Delta S_{\max} = \frac{bd}{2D} < \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{d}{\lambda} < \frac{D}{b}$$

$d$ : Spaltabstand,  $b$ : Quellgröße,  $D$ : Abstand Spalt-Lichtquelle

Glühlampe ( $b = 1 \text{ cm}$ ),  $D = 0,5 \text{ m} \Rightarrow d < 25 \mu\text{m}$

$\alpha$ -Centauri:  $b = 10^{10} \text{ m}$ ,  $D = 44 \text{ LJ} \approx 4 \cdot 10^{16} \text{ m} \Rightarrow d \approx 2 \text{ m}$  bei  $\lambda = 500 \text{ nm}$

### 2.3.2 Michelson-Interferometer

- spektrale Breiten von Lichtquellen
- Absorption-/Emissionsspektren von Molekülen  
FT IR Spektrometer ( $\Delta\tilde{\nu} \sim 500 \text{ cm}^{-1} - 5000 \text{ cm}^{-1}$ )

- Dauer von ultrakurzen Pulsen
- Gravitationswellen-Detektoren
- Qualitätskontrolle von optischen Bauelementen

$\Delta s$  von  $\mu\text{m}$  bis  $\text{m}$ , 50 Hz bis 1/20 Hz.

spektrale Auflösung:  $\Delta\tilde{\nu} = \frac{1}{\Delta s}$  [ $\text{cm}^{-1}$ ]

$1 \text{ cm}^{-1} \equiv 30 \text{ GHz}$

einfallende Welle  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz)$

50 Prozent Strahlteiler:

$$E_1 = E_{10} \sqrt{RT} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$E_2 = E_{10} \sqrt{RT} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Intensität:

$$I_{\text{sp}} = \epsilon_0 c (E_1 + E_2)^2 = \epsilon_0 c R T E_{10}^2 [\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)]^2$$

Zeitliche Mittelung:  $\langle \cos^2(\omega t) \rangle_t = \frac{1}{2}$

$$I_{\text{sp}} = I_0 R T (1 + \cos \Delta\varphi), \quad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s$$

Für  $R = T = 0,5$ :  $I_{\text{sp}} = \frac{1}{4} I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi \Delta s}{\lambda}\right)$

$$\Delta\varphi = 2m\pi \quad \Rightarrow (I_{\text{sp}} \text{ maximal})$$

$$\Delta\varphi = (2m + 1)\pi \quad \Rightarrow (I_{\text{sp}} \text{ minimal})$$

Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\Delta s}{N}$ ,  $N$ : Anzahl der Maxima

$\lambda \sim 500 \text{ nm}$ ,  $\Delta s = 10 \text{ cm} \rightarrow N = 4 \cdot 10^5$  Maxima

Ungenauigkeit  $\Delta N = \pm 1$

$\rightarrow$  Messgenauigkeit für die Wellenlänge:  $\Delta\lambda = \pm 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$

„Wavemeter“

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim 10^{-8} \Rightarrow \Delta\lambda \sim \pm 5 \cdot 10^{-6} \text{ nm}, \quad \Delta\nu \sim 6 \text{ MHz}, \quad \nu_0 \sim 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

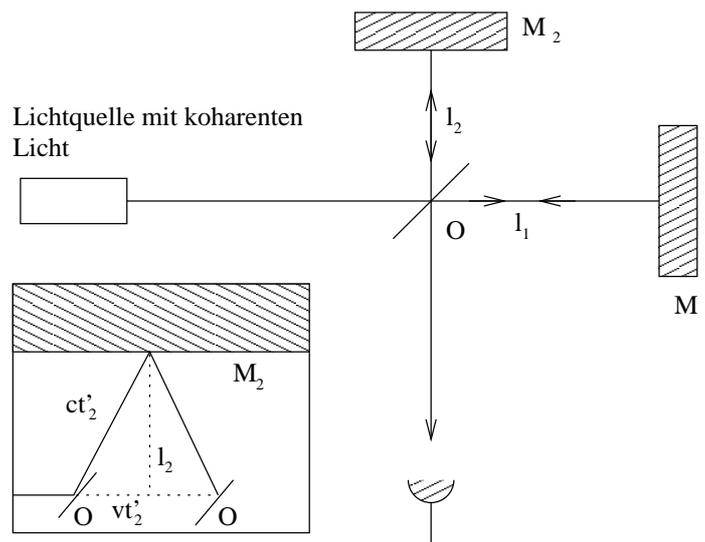
Kombination von zu messender Lichtquelle und frequenzstabilisiertem He-Ne-Laser.

Hg:  $\lambda = 546,1 \text{ nm}$ , Kohärenzlänge  $\sim 5\text{-}10 \text{ cm}$

Weißlichtquelle (Glühlampe):  $l_1 \sim 1 \mu\text{m}$

Test der Äther-Hypothese

Michelson–Morley Experiment



Zeiten für die Bewegung des Lichtes

$$t'_1(\overline{OM_1}) = \frac{l_1}{c - v}$$

$$t''_1(\overline{M_1O}) = \frac{l_1}{c + v}$$

$$t_1 = t'_1 + t''_1 = \frac{2l_1}{c} \gamma^2 \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Aus der Dreiecksbeziehung erhalten wir für die Zeiten zwischen  $O$  und  $M_2$

$$\begin{aligned}c^2 t_2'^2 &= v^2 t_2'^2 + l_2^2 \\ \Rightarrow t_2' &= \frac{l_2}{c} \gamma \\ t_2'' = t_2' &\Rightarrow t_2 = t_2'' + t_2' = 2 \frac{l_2}{c} \gamma\end{aligned}$$

Für  $l_1 = l_2 = l$  folgt damit für die Zeitdifferenz

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{l}{c} \left( \frac{v}{c} \right)^2$$

→ Differenz der Wegstrecken in Wellenlängen:

$$\Delta N = \frac{\Delta t}{T} = \nu \Delta t = \frac{c}{\lambda} \Delta t$$

Mit  $v = 30 \text{ km/s}$ ,  $\lambda = 550 \text{ nm}$ ,  $l = 11 \text{ m}$  erhält man die erwartete Verschiebung der Interferenzstreifen

$$\Delta N = \frac{2l}{\lambda} \left( \frac{v}{c} \right)^2 = 0,4, \quad \text{Empfindlichkeit: } \Delta N = \pm 0,1$$

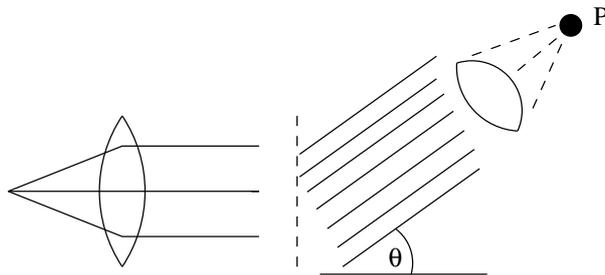
### 2.3.3 Vielstrahl-Interferenz

### 2.3.4 Dielektrische Spiegel

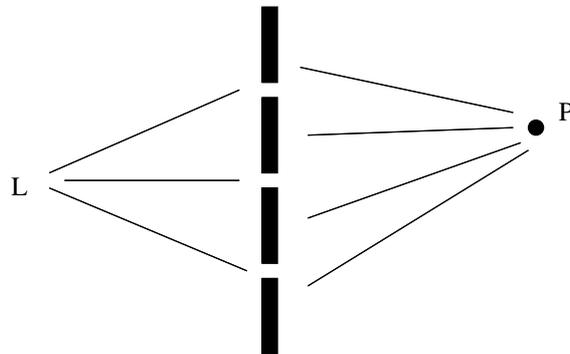
### 2.3.5 Beugung

Fraunhofer-Beugung (J. von Fraunhofer, 1787 — 1826)

- (i) einfallendes Licht: ebene Wellen  
bzw. parallele Lichtstrahlen
  
- (ii) gebeugtes Licht : betrachte parallele Strahlen  
unter definierten Winkeln  $\theta$



Abstände kleiner  $\rightarrow$  Strahlen nicht parallel,  $\lambda$  spielt eine Rolle  
 $\rightarrow$  **Fresnel-Beugung** (A. Fresnel, 1788-1827)



Fraunhofer-Beugung: Grenzfall

Fraunhofer-Beugung: Fernfeld, große Abstände

Fresnel-Beugung: Nahfeld, kleine Abstände

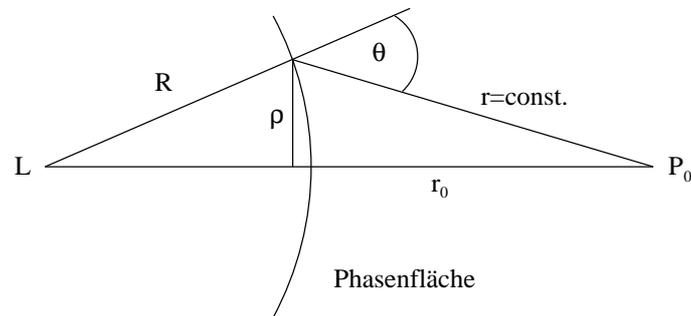
### **Poisson'scher Fleck**

Experiment: heller Fleck im Zentrum des Schattens einer Scheibe

Erklärung  $\rightarrow$

### **Fresnel'sche Zonen**

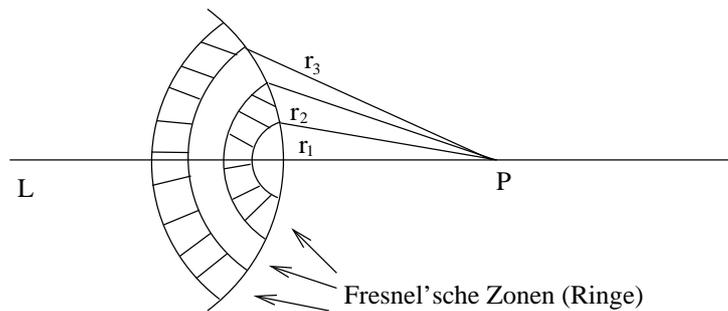
Betrachte Kugelwellen



$r = \text{const.} \rightarrow$  Kreise, konstanter Gangunterschied.

Betrachte Kreise mit Gangunterschied  $\frac{\lambda}{2}$ .

$$r_m = r_0 + m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$



Behauptung: Fläche der Fresnel-Zonen ist ungefähr konstant.

Grund: Sei  $R$  sehr groß,

$$\rightarrow \rho_m^2 = r_m^2 - r_0^2 = mr_0\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4} \approx mr_0\lambda$$

Fläche:  $\pi\rho_{m+1}^2 - \pi\rho_m^2 = \pi r_0\lambda = \text{const.}$

Beispiel:  $r_0 = 10 \text{ cm}, \lambda = 500 \text{ nm} \rightarrow \rho_1 = 0,22 \text{ mm}$

Fresnel'sche Konstruktion: Beitrag der  $m$ -ten Zone zur Gesamtamplitude  
 $= A_m$

(i)  $|A_m| \approx |A_{m+1}|$

- (ii) destruktive Interferenz:  $A_m$  und  $A_{m+1}$  haben verschiedene Vorzeichen.

Amplitude  $A$  im Punkt  $P_0$ :

$$\begin{aligned}
 A &= |A_1| - |A_2| + |A_3| - \dots \pm |A_N| \\
 &= \frac{1}{2}|A_1| + \underbrace{\left(\frac{|A_1|}{2} - |A_2| + \frac{|A_3|}{2}\right)}_{\approx 0} + \underbrace{\left(\frac{|A_3|}{2} - |A_4| + \frac{|A_5|}{2}\right)}_{\approx 0} + \dots \\
 &= \frac{1}{2}|A_1| \pm \frac{1}{2} \underbrace{|A_N|}_{\approx 0} \\
 \Rightarrow A &\approx \frac{1}{2}|A_1|
 \end{aligned}$$

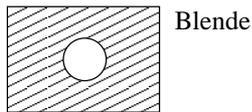
Paradoxe Konsequenzen:

- a) Blende

Größe = innerste Zone

→ liefert 4-fache Intensität in  $P_0$  wie ohne Blende.

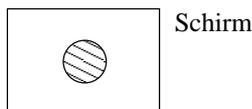
$$|A_1|^2 = 4|A|^2$$



- b) Poisson'scher Fleck

Schirm von der Größe der innersten Zone liefert genauso viel Intensität in  $P_0$  wie ohne Schirm.

$$|A - A_1|^2 = \frac{1}{4}|A_1|^2 = |A|^2$$



(Abb. 10.49 Demtröder 2)

## Fresnel'sche Zonenplatte

Jede zweite Zone abgedunkelt  $\rightarrow$  konstruktive Interferenz

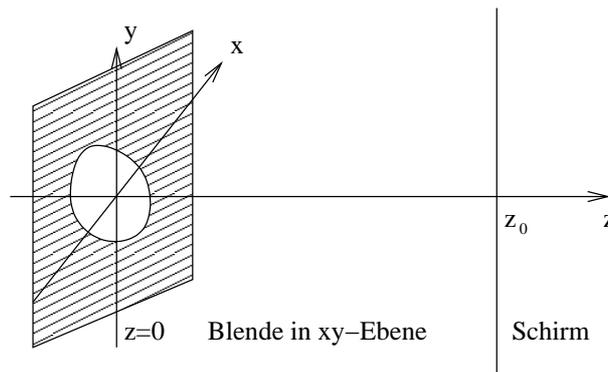
Wirkt wie eine Linse.

$$f = r_0 = \frac{\rho_m^2}{m\lambda} = \frac{\rho_1^2}{\lambda}$$

Anwendung: Röntgenlinsen

## Fresnel-Kirchhoff-Beugungsintegral

Allgemeinere und präzisere Beschreibung der Beugung



Amplitude bei  $z = 0$ :  $E_B(x, y) = E_0(x, y) e^{i\varphi(x, y)}$  (Blendenfunktion)

Zum Beispiel für ebene Wellen

$$E_B(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (x, y) \in \text{Öffnung} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beitrag am Punkt  $(x', y', z_0)$  auf dem Schirm:

$$dE_s = C E_B(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} dx dy$$

mit  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z_0^2}$

$C(x, y, x', y')$ : richtungsabhängige Abstrahlung des Flächenelements.

$$E_s = \iint C E_B(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} dx dy \quad \text{Beugungsintegral}$$

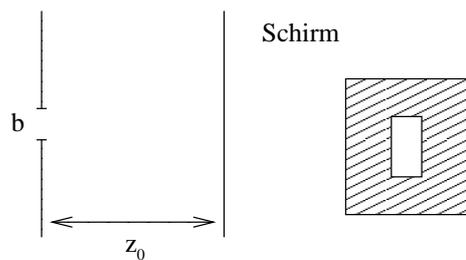
Oft setzt man  $C \approx \text{const.}$

Fernfeld: große  $z_0$   $\longrightarrow$  Fraunhofer-Beugung

Nahfeld: kleine  $z_0$   $\longrightarrow$  Fresnel-Beugung

Beispiele:

1. Beugung am Spalt



$$\text{Fernzone: } \varrho_1 = \sqrt{z_0 \lambda} \gg b \Rightarrow z_0 \gg \frac{b^2}{\lambda}$$

$$\text{Nahzone: } \varrho_1 = \sqrt{z_0 \lambda} \ll b \Rightarrow z_0 \ll \frac{b^2}{\lambda}$$

2. Beugung an einer Lochblende

3. Beugung an einer Kante

**Babinet'sches Theorem**

Komplementäre Blenden  $B_1$ ,  $B_2$ , z.B. Lochblende und Kreisscheibe.

$$A(B_1) + A(B_2) = A(\text{keine Blende}) \equiv A_0$$

$$A(B_2) = A_0 - A(B_1)$$

$\longrightarrow$  Beugungserscheinungen von  $B_1$  und  $B_2$  sind „ähnlich“.

Für Fraunhofer-Beugung außerhalb des Zentrums:  $A_0 = 0$

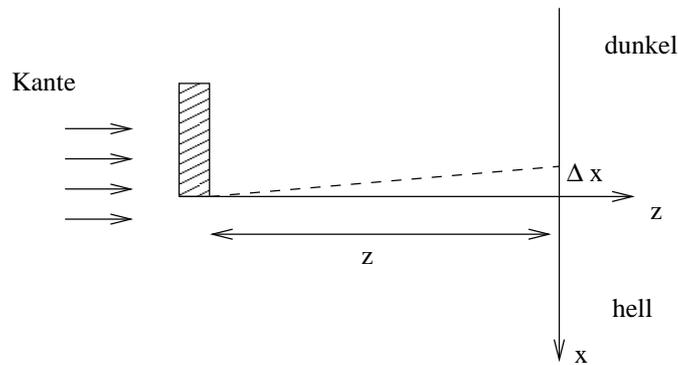
$$\Rightarrow |A(B_1)| = |A(B_2)|$$

### Grenzen der geometrischen Optik

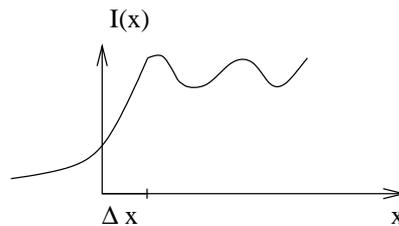
Beugungseffekte sind immer vorhanden.

geometrische Optik  $\longleftrightarrow$  Beugung vernachlässigbar

Es hängt von der Objektgröße  $b$  und der Wellenlänge  $\lambda$  ab, ob die Beugung vernachlässigbar ist.

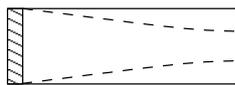


$$\Delta x \approx \sqrt{\lambda z}$$



Lage des ersten Maximums bei  $\Delta x = 0,86\sqrt{\lambda z}$

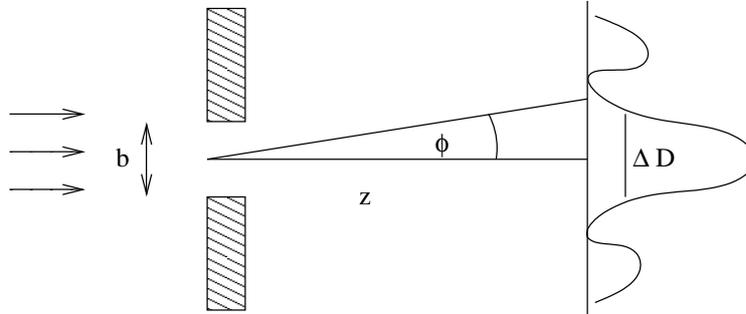
- Makroskopische Schirme



es ist hell im geometrischen Schatten, falls  $\frac{b}{2} \ll \sqrt{\lambda z}$  (Fresnel-Beugung)

geometrische Optik:  $\frac{b}{2} \gg \sqrt{\lambda z}$

- Makroskopische Blenden



(i) Fernbereich, Fraunhofer-Beugung

$$\sin \phi = \frac{\lambda}{b} = \frac{\Delta D}{z} \Rightarrow \Delta D = \frac{\lambda z}{b}$$

Beugung:  $\Delta D \gg b \Rightarrow b \ll \sqrt{\lambda z}$

Beispiel:  $b = 1 \text{ cm}, \lambda = 500 \text{ nm} \rightarrow z \gg 200 \text{ m}$

(ii) Nahbereich:  $b \gg \sqrt{\lambda z}$

→ geometrischer Schatten mit „Fransen“.

(iii) Zwischenbereich:  $b \approx \sqrt{\lambda z}$

## Holographie

D. Gabor, 1947, Nobelpreis 1971

(Auf Folien präsentiert.)

### 2.3.6 Beugungsgitter

$$I(p) = I^{(0)}(p) H\left(N, \frac{kp d}{2}\right)$$

$$p = \sin \vartheta - \sin \vartheta_0$$

Gittergleichung

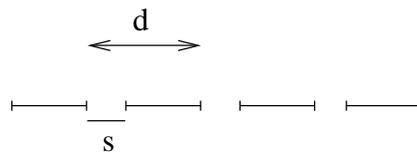
Richtung der Beugungsmaxima hängt ab von

- Gitterkonstante  $d$

- Wellenlänge  $\lambda$

Zerlegung von weißem Licht in die Spektralkomponenten.

Strichgitter:



$$I(p) = \frac{sE}{\lambda R^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}ksp\right)}{\left(\frac{1}{2}ksp\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}Nkpd\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}kpd\right)}$$

Spaltfunktion: 1. Minimum bei  $p = n\frac{\lambda}{s}$ .

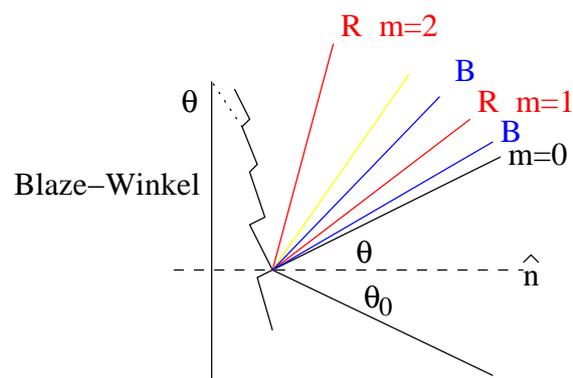
H-Funktion: Maxima bei  $p = m\frac{\lambda}{d}$ .

gültig für  $s > \lambda$

Strichgitter: 1200 bis 2400 1/mm  $\rightarrow d \sim 830 \text{ nm} - 415 \text{ nm}$ .

### Gitter mit kontrollierter Linienform

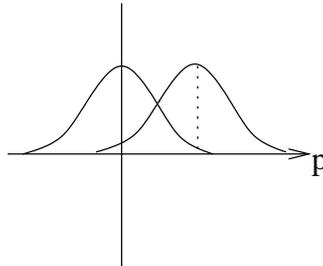
(Blaze)



In dem Beispiel bewirkt der Blaze-Winkel  $\gamma$ , dass mehr Intensität in die 2. Ordnung als in die 1. (oder 3.) gebeugt wird.

→ man benötigt Wellen- und Strahlenoptik.

### Spektrale Auflösungsvermögen



Minimum bei  $p = \sin \vartheta - \sin \vartheta_0 = \frac{m\lambda}{Nd}$ .

Zwei Spektralelemente kann man trennen.

$$\Delta p = \frac{\lambda}{Nd}$$

ändert man  $\lambda$  um  $\Delta\lambda \rightarrow \delta p = \frac{|m|}{d} \Delta\lambda$ .

$$\begin{aligned} \Delta p &= \delta p \\ \frac{\lambda}{Nd} &= \frac{|m|}{d} \Delta\lambda \\ \frac{\lambda}{\Delta\lambda} &= |m|N \end{aligned}$$

Für das spektrale Auflösungsvermögen ist die Anzahl der ausgeleuchteten Striche wichtig.

Beispiel:

$$\frac{1}{d} = 600 \text{ 1/mm}, \quad W = 50 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad N = 30000, \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = |m| \cdot 30000$$

für  $\lambda = 500 \text{ nm}$ :  $\Delta\lambda = 0.0083 \text{ nm}$ ,  $\Delta\tilde{\nu} = 0,33 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\delta\nu = 10 \text{ GHz}$

Prisma, Kantenlänge 50mm.

Dispersion:  $\frac{dn}{d\lambda} = 1000 \text{ cm}^{-1}$

$\Delta\lambda \sim 0,1 \text{ nm}$ .

## Spektrometer

Reflexionsgitter

### 2.3.7 Räumliches Auflösungsvermögen optischer Systeme

Teleskope, (Auge), Mikroskope

spektrale Auflösung:  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$

räumliche Auflösung  $\frac{1}{\delta x}, \frac{1}{\delta\vartheta}$ .

Rayleigh-Kriterium

Teleskop:

Radius (Spiegel, Linse):  $a$

Position des 1. Minimums

$$w = 0,610 \frac{\lambda}{a}$$
$$w = \sqrt{p^2 + q^2} \quad \text{Koordinaten } (p, q)$$

→ Winkelabstand  $\delta = 0,61 \frac{\lambda}{a}$ .

Mt. Palomar Telescope

$$2a = 5 \text{ m}$$

$$\lambda = 5600 \text{ \AA}$$

$$\delta \sim 0,028''$$

Auge: 1,5 und 6 mm

$$0,24'' < \delta < 1'34' \rightarrow \delta x = 6,7 \mu\text{m}$$

Dies ist der Abstand der Rezeptoren.

## 2.4 Polarisation und Kristalloptik

### 2.4.1 Polarisation elektromagnetischer Wellen

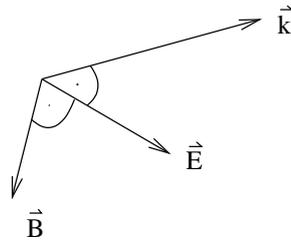
Wiederholung:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$$

$$\omega = c|\vec{k}|$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}, \quad |\vec{B}| = \frac{1}{c} |\vec{E}|$$



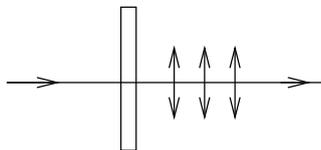
Es genügt,  $\vec{E}$  zu betrachten, das magnetische Feld folgt daraus.

Transversalwellen  $\Rightarrow$  Polarisation (linear, zirkular)

Praxis:

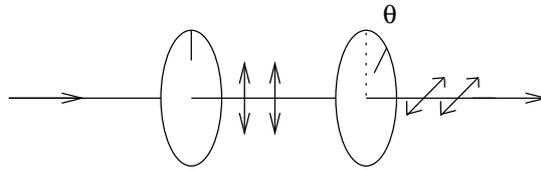
natürliches Licht (Glühlampen) ist unpolarisiert,  
die relative Phase  $\delta$  schwankt statistisch.

*Polarisator:* erzeugt polarisiertes Licht (z.B. linear).



*Analysator:* gleichartige Vorrichtung (zum Nachweis von Polarisation)

z.B. Polarisationsfilter



$$I(\theta) = I(0) \cdot \cos^2 \theta$$

**Gesetz von Malus**

## 2.4.2 Doppelbrechung

Kalkspat-Kristall  $\text{CaCO}_3$ .

Keine Isotropie,  $\vec{P}$  nicht parallel zu  $\vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{ist nicht parallel zu } \vec{E}$$

Einführung eines Tensors:

$$\vec{D} = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \vec{E}, \quad \tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

$\tilde{\epsilon}$  ist symmetrisch ( $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$ ) und daher diagonalisierbar. Es gibt ein Koordinatensystem mit

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

$$n_1 = \sqrt{\epsilon_1}, \quad n_2 = \sqrt{\epsilon_2}, \quad n_3 = \sqrt{\epsilon_3}$$

Optisch einachsige Kristalle:  $n_1 = n_2 \neq n_3$ .

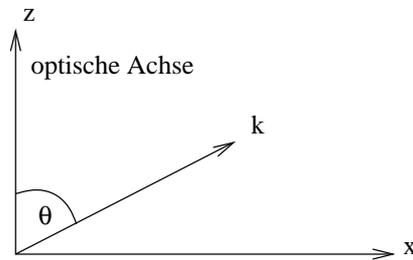
Hauptbrechzahlen  $n_1, n_3$

$n_3 > n_1$ : optisch positiv einachsige

$n_3 < n_1$ : optisch negativ einachsige

Optische Achse: 3-Achse

Zum Beispiel Kalkspat:  $n_1 = 1,6583$ ,  $n_3 = 1,4864$



Ohne Einschränkung der Allgemeinheit liegt  $\vec{k}$  in der  $xz$ -Ebene („Hauptschnitt“). Der Hauptschnitt enthält die optische Achse und den einfallenden Strahl.

1. Fall:

Polarisation senkrecht zur optischen Achse ( $\rightarrow$  in  $y$ -Richtung)

$$\vec{E} = (0, E_y, 0)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_1 E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon_0 \epsilon_1 \vec{E}$$

$\vec{D} \parallel \vec{E}$  wie im isotropen Medium, „ordentlicher Strahl“

$n_o = n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$  „ordentlicher Brechungsindex“, hängt nicht von  $\theta$  ab.

2. Fall:  $\vec{E} = (E_x, 0, E_z)$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_1 E_x \\ 0 \\ \epsilon_3 E_z \end{pmatrix} \quad \text{nicht parallel zu } \vec{E}$$

Außerdem  $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$  (wegen  $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ ), „außerordentlicher Strahl“

„außerordentlicher Brechungsindex“  $n_a(\theta) = \sqrt{\epsilon_a(\theta)}$

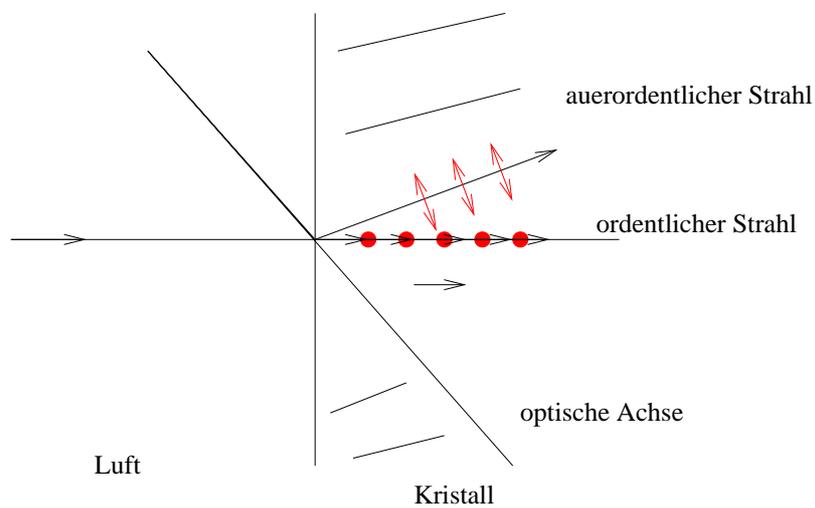
Phasengeschwindigkeiten

$$c'_o = \frac{c_0}{n_o}, \quad c'_a = \frac{c_0}{n_a}$$

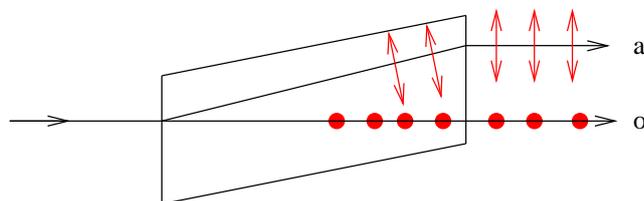
Konstruktion von  $n_a$  bzw.  $\epsilon_a$  (siehe Lehrbücher der Optik, z.B. Klein: Optics)

$$\left[ \frac{1}{n_a^2} = \frac{1}{n_3^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{n_1^2} \cos^2 \theta \right]$$

## Doppelbrechung



Parallel oder senkrecht zur optischen Achse findet keine Doppelbrechung statt.



Ordentlicher und außerordentlicher Strahl sind senkrecht zueinander polarisiert.

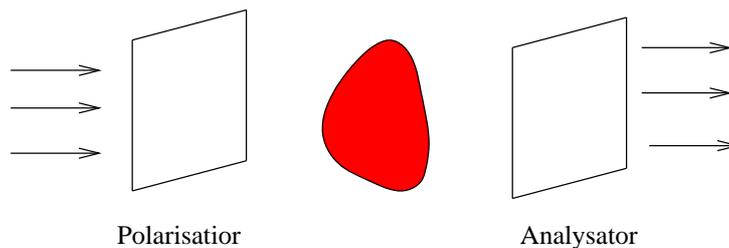
Anwendung: Erzeugung von linear polarisiertem Licht

- *Nicol'sches Prisma*  
mit negativ optisch einachsigen Kristallen  
Zwischenschicht:  $n_a < n < n_o$
- *Glan-Thompson-Polarisator*  
→ Abb. 8.34, Demtröder 2

## Spannungsdoppelbrechung

Zug/Druck auf homogene, isotrope Medien  
→ kann optische Anisotropie erzeugen.

Anwendung: Materialprüfung



## Dichroismus

Dichroitische („zweifarbige“) Kristalle:  
doppelbrechend,  
ordentlicher und außerordentlicher Strahl werden unterschiedlich stark absorbiert.

z.B. Turmalin

Anwendung: Polarisationsfolien,  
Kristalle sind gerichtet in eine Trägerfolie eingebettet.

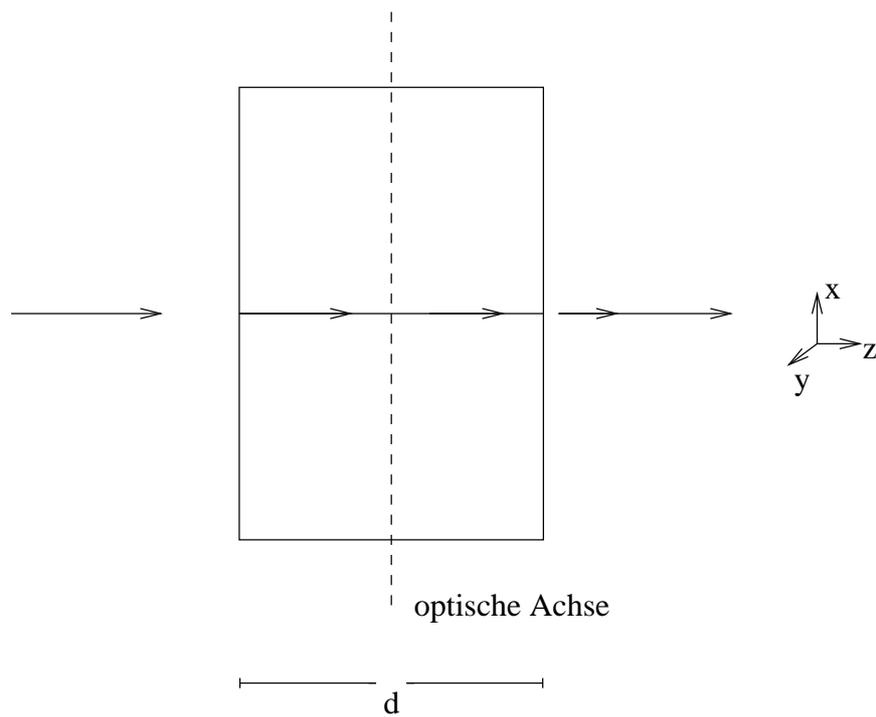
## Kerr-Effekt

Einige Flüssigkeiten (Nitrobenzol, Nitrotoluol,...) werden doppelbrechend in starken  $\vec{E}$ -Feldern ( $E > 10^4 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$ ).

Anwendung: elektro-optische Verschlüsse

### 2.4.3 Interferenz mit polarisiertem Licht

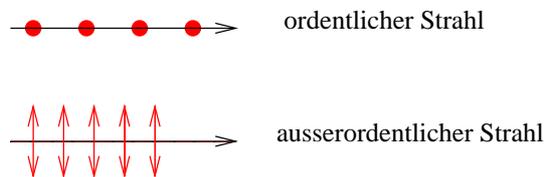
doppelbrechendes Medium



Phasengeschwindigkeit  $c'$

ordentlicher Strahl  $c' = c_0/n_o$

außerordentlicher Strahl  $c' = c_0/n_a$



ortsabhängige Phase:  $k \cdot z = \frac{\omega}{c'} z = \frac{\omega}{c_0} n \cdot z$

→ Phasendifferenz zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl nach Durchlaufen des Mediums.

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c_0}(n_a - n_o) \cdot d = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_a - n_o) \cdot d$$

→ die Polarisationsart ändert sich.

### Anwendungen:

#### 1. $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen

$d$  so gewählt, dass

$$(n_a - n_o)d = \frac{\lambda_0}{4} \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

vorher: linear polarisiert,  $\delta = 0$   
 $E_{0x} = E_{0y}$ , d.h.  $45^\circ$  zur optischen Achse.

hinterher:  $\delta' = \frac{\pi}{2}$ , zirkular polarisiert.

Anwendung: Erzeugung von zirkular polarisiertem Licht.

Wähle  $n_a - n_o$  möglichst klein.

Beispiel: Glimmer, zweiachsig.  $n_1 = 1,5612$ ,  $n_2 = 1,5944$ ,  $n_3 = 1,5993$

$$(n_3 - n_2) \cdot d = \frac{\lambda_0}{4}$$

für  $\lambda_0 = 500 \text{ nm} \rightarrow d = 0,0255 \text{ mm}$

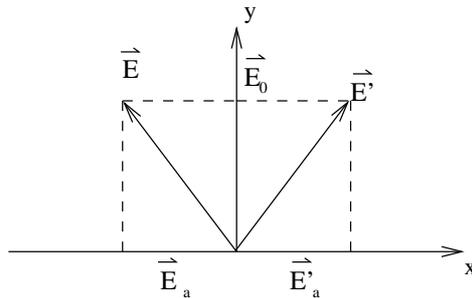
#### 2. $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen

$$(n_a - n_o)d = \frac{\lambda_0}{2} \quad \rightarrow \quad \Delta\varphi = \pi$$

vorher: linear polarisiert,  $\delta = 0$

hinterher: linear polarisiert,  $\delta = \pi$

aber: die Polarisationsrichtung hat sich gedreht.



## 2.4.4 Polarisation bei Streuung

Lichtstreuung an einem trüben Medium.

Senkrecht zur Strahlrichtung: linear polarisiert

Parallel zur Strahlrichtung: unpolarisiert

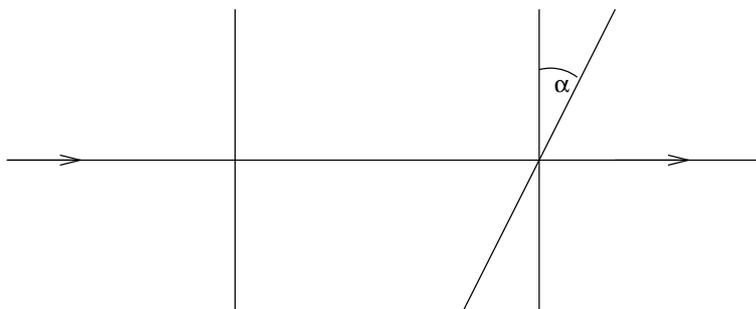
Erklärung: aufgrund der Schwingung der induzierten Dipole parallel zum elektrischen Feld und der Abstrahlcharakteristik der Dipole.

→ Himmelslicht ist teilweise polarisiert.

## 2.4.5 Optische Aktivität

Effekt: Drehung der Polarisationsrichtung von linear polarisiertem Licht in einer Zuckerlösung.

Drehung: unabhängig von der Richtung der Polarisations ebene.



Drehwinkel:  $\alpha = \alpha_s \cdot d$

$\alpha_s$ : spezifisches optisches Drehvermögen, hängt von  $\lambda$  ab.

rechtsdrehend (d, dexter), bzw +:  $\alpha > 0$

linksdrehend (l, laevus), bzw -:  $\alpha < 0$

Ursache:

- bei Kristallen: anisotrope Kristallstruktur.
- bei Flüssigkeiten: Moleküle besitzen einen Schraubensinn, „Chiralität“ (Händigkeit), rechtshändig, linkshändig

Optisch aktive Flüssigkeit: Konzentration der linksdrehenden und rechtsdrehenden Moleküle unterschiedlich.

Zucker: „Dextrose“, „Lävulose“

Beispiel: (jeweils für  $\lambda = 589,3 \text{ nm}$ )

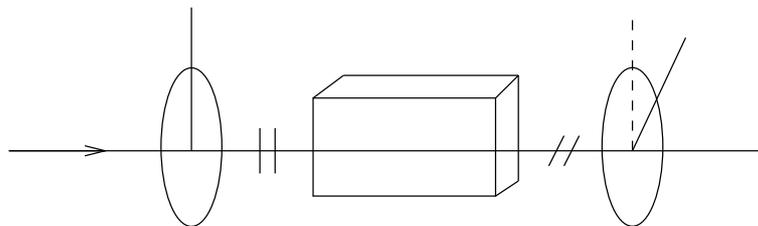
Zuckerlösungen  $66,5^\circ/\text{dm}$  bei  $1\text{g}/\text{cm}^3$

Menthol  $-49,7^\circ/\text{dm}$

Nikotin  $-162^\circ/\text{dm}$

Quarz  $\pm 21,7^\circ/\text{mm}$

Anwendung: Konzentrationsbestimmung mit Polarimetern.  $\alpha_s \sim$  Konzentration



Viele organische Substanzen sind „chiral“.

Vitamin C= L-Ascorbinsäure, Vitamin E, L-Aminosäuren

# Kapitel 3

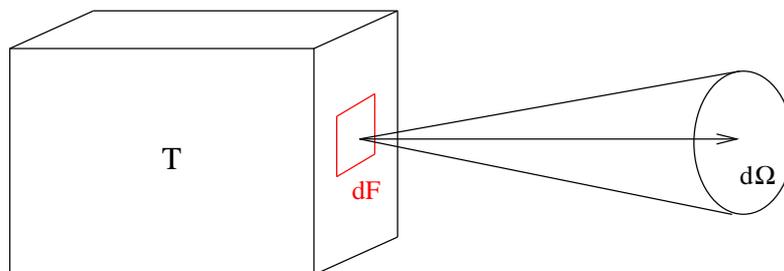
## Wellen und Quanten

### 3.1 Temperaturstrahlung und Lichtquanten

#### 3.1.1 Planck'sches Strahlungsgesetz

Feste Körper, Temperatur  $T \rightarrow$  Strahlung, „Glühen“

Wärmestrahlung



Leistung:

$$\frac{dW}{dt} = E^* \cdot dF d\Omega \quad (\text{senkrecht zur Fläche})$$

$E^*$  : Emissionsvermögen, hängt ab vom Material und der Temperatur.

Im Frequenzintervall  $d\nu$ :

$$\frac{dW}{dt} = E_\nu^*(\nu, T) \cdot dF d\Omega d\nu$$

$E_\nu^*$ : Spektrales Emissionsvermögen.

Absorptionsvermögen:

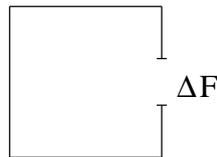
$$A = \frac{\text{absorbierte Leistung}}{\text{auftreffende Leistung}}$$

In einem engen Frequenzbereich:  $A_\nu(\nu, T)$ .

*Schwarzer Körper*:  $A = 1$ .

Experimentelle Realisierung in guter Näherung:

Hohlraum mit absorbierenden Wänden, kleine Öffnung.



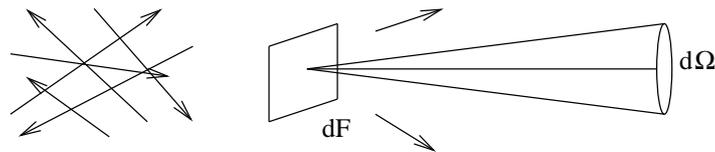
Es gilt das *Kirchhoff'sche Gesetz*:

$\frac{E_\nu^*}{A_\nu}$  ist unabhängig vom Material und hängt nur von der Temperatur ab.

⇒ Schwarze Körper emittieren Wärmestrahlung am stärksten.

## Strahlungsdichte

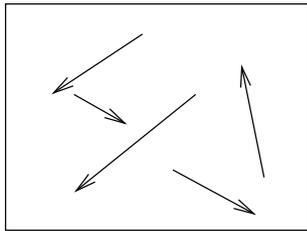
Die Strahlungsdichte ist eine charakteristische Größe für ein Strahlungsfeld. Die Strahlungsdichte  $S^*$  ist die Leistung, die pro Flächenelement  $dF$  in den Raumwinkel  $d\Omega$  senkrecht abgestrahlt wird.



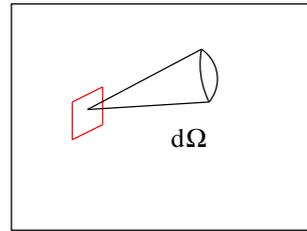
$$\frac{dW}{dt} = S^* dF d\Omega$$

$S_\nu^*$ : spektrale Strahlungsdichte

### Hohlraumstrahlung



Wände, Temperatur  $T$



Wände: Temperatur  $T$

Gleichgewicht: Emission = Absorption

$$\frac{dW_E(\nu)}{dt} = \frac{dW_A(\nu)}{dt}$$

→  $T =$  Temperatur der Hohlraumstrahlung.

Hohlraumstrahlung ist isotrop und homogen.

Betrachte einen kleinen Probekörper mit der Fläche  $\Delta F$  („kleine Münze“).

$$\text{absorbiert: } \frac{dW_A}{dt} = A_\nu S_\nu^* \Delta F d\Omega d\nu$$

$$\text{emittiert: } \frac{dW_E}{dt} = E_\nu^* \Delta F d\Omega d\nu$$

⇒ **Kirchhoff'sches Gesetz:**  $\frac{E_\nu^*}{A_\nu} = S_\nu^*(T)$ , hängt nur von  $T$  ab.

Für einen schwarzen Körper ( $A_\nu = 1$ ):  $E_\nu^* = S_\nu^*$

d.h. Schwarzkörper-Strahlung = Hohlraumstrahlung

### Energiedichte der Strahlung $w$

elektromagnetische Wellen:  $w = \epsilon_0 |\vec{E}|^2$

Intensität:  $I = |\vec{S}| = w \cdot c$

( $c$  = Vakuum-Lichtgeschwindigkeit in diesem Kapitel)

Energiedichte pro Frequenzintervall:  $w_\nu(\nu) d\nu$

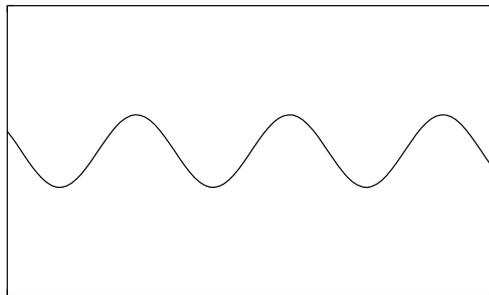
Für isotrope Strahlung gilt

$$S_\nu^* = \frac{c}{4\pi} w_\nu.$$

Wie hängt die spektrale Energiedichte  $w_\nu(\nu)$  von  $\nu$  ab?

→ Problem der klassischen Physik.

### Strahlungsgesetz von Rayleigh-Jeans



Schwingungsmoden in  
Hohlraum.

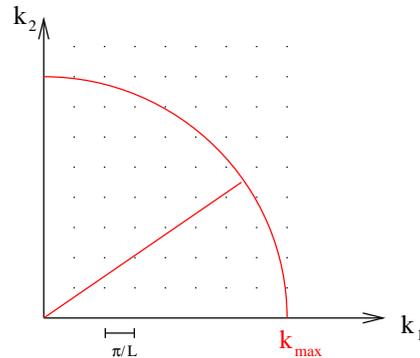
Stehende Wellen.

betrachte Würfel mit Kantenlänge  $L$ ,  $V = L^3$ .

$$\vec{k} = \frac{\pi}{L} \vec{n} = \frac{\pi}{L} (n_1, n_2, n_3) \quad n_i \in \mathbb{N}$$

$$\omega = c|\vec{k}|, \quad \omega = 2\pi\nu$$

Anzahl der Moden mit  $\nu \leq \nu_{\max}$ :  $N(\nu_{\max})$



$$2\pi\nu_{\max} = \omega_{\max} = c \cdot k_{\max}$$

$$\frac{1}{8} \text{ Kugelvolumen} = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} k_{\max}^3$$

$$\text{Volumen einer Zelle} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^3, \quad 2 \text{ Polarisierungen}$$

$$\Rightarrow N(\nu_{\max}) \approx \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} k_{\max}^3 \cdot \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \cdot 2 = \frac{L^3 \omega_{\max}^3}{3\pi^2 c^3} = \frac{8\pi \nu_{\max}^3 L^3}{3c^3}$$

$$\Rightarrow \frac{N(\nu)}{V} = \frac{8\pi \nu^3}{3c^3} \quad (L \text{ sehr groß})$$

Spektrale Modendichte:

$$n(\nu) = \frac{d}{d\nu} \frac{N(\nu)}{V} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3}$$

Thermisches Gleichgewicht:

Gleichverteilungssatz  $\rightarrow$  Energie  $kT$  pro Schwingungsmode

$$\boxed{w_\nu(\nu) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} kT} \quad \text{Rayleigh-Jeans-Strahlungsgesetz}$$

Experimentell gut bei sehr kleinen Frequenzen.

Problem: Gesamtenergiedichte

$$w = \int_0^\infty w_\nu(\nu) d\nu = \infty, \quad \text{„Ultraviolett - Katastrophe“}$$

**Wien'sches Strahlungsgesetz:**

$$w_\nu = A\nu^3 e^{-\frac{a\nu}{kT}}$$

ad hoc-Ansatz, passt bei großen Frequenzen.

### Planck'sches Strahlungsgesetz

Okt. 1900: Interpolation

$$w_\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{h}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Planck'sche Konstante:  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Js, „Wirkungsquantum“

Das Planck'sche Strahlungsgesetz stimmt für sehr kleine Frequenzen mit dem Rayleigh-Jeans-Strahlungsgesetz und für sehr große Frequenzen mit dem Strahlungsgesetz von Wien überein.

$\nu \rightarrow 0$ :

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = \frac{1}{\frac{h\nu}{kT} + \mathcal{O}(\nu^2)} = \frac{kT}{h\nu} + \dots \Rightarrow w_\nu \rightarrow \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \quad (\text{Rayleigh-Jeans})$$

$\nu \rightarrow \infty$ :

$$\frac{h}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \approx e^{-\frac{h\nu}{kT}} + \dots \Rightarrow w_\nu \rightarrow \frac{8\pi\nu^3}{c^3} h \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (\text{Wien})$$

Theoretische Begründung: Max Planck, 14.12.1900

Annahme: Licht wird emittiert und absorbiert in Energiequanten der Größe  $E = h \cdot \nu$  (Planck'sche Beziehung).

Betrachte Atome der Wand als harmonische Oszillatoren. Energie der Oszillatoren/Schwingungsmoden

$$E_n = n \cdot h\nu, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\Delta E = h\nu$$

Mittlere Energie im thermischen Gleichgewicht ( $\beta := \frac{1}{kT}$ ).

$$\bar{E} = \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

→ mittlere Energiedichte der Strahlung

$$w_\nu = n(\nu) \cdot \bar{E} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \bar{E} = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{4\pi}\right) - 1}$$