Econophysics WS1999/2000: Notizen zur Vorlesung über Econophysics

Jörg C. Lemm

Institut für Theoretische Physik I, Universität Münster
Wilhelm–Klemm–Str.9, D–48149 Münster, Germany
lemm@uni-muenster.de
http://pauli.uni-muenster.de/~lemm/

Inhaltsverzeichnis

1 Portfolios

In this lecture we will revisit portfolio theory as pioneered by Markowitz [13]. The following notes mainly gives the basic formulæ without much explaining text. Great part of the material is from [6]. Many enlightening figures can be found in [8], which also is a classical reference to portfolio theory. For a short autobiography of Markowitz and some additional material on CAPM, lower partial moments, a relation to spin glasses, and references see also the corresponding webpage `http://pauli.uni-muenster.de/~lemm/econoWS99/portfolio.html`.

1.1 Correlated assets

Following the discussion of optimal portfolios for uncorrelated assets in the last lecture by Klaus Pinn, we study now portfolios of correlated assets.

Let again be M = number of assets, x_0 = value of riskless asset, x_i = value of risky asset i, $i \neq 0$, and n_i = number of assets of kind i.

Investing in a portfolio with initial wealth

$$W = \sum_{i=0}^{M} n_i x_i^0, \tag{1}$$

at some later time T the wealth of portfolio will be

$$S(T) = \sum_{i=0}^{M} n_i x_i(T). \tag{2}$$

For convenience, we take again $W = 1$, $x_i^0 = 1$, i.e., $p_i = n_i$ so that the condition $\sum_{i=0}^{M} p_i = 1$ must hold.

To be specific, we will now asssume the δx_i to be Gaussian random variables

$$p(\delta x_1, \cdots, \delta x_M) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M \det C}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{ij}^{M}(\delta x_i - m_i) C_{ij}^{-1} (\delta x_j - m_i)}. \tag{3}$$

The real symmetric, positive definite covariance matrix C can be diagonalized by an orthogonal transformation $O^T = O^{-1}$. Thus, the asset combinations e_i defined by

$$\delta x_i = m_i + \sum_j O_{ij} e_j, \tag{4}$$

are uncorrelated.

In particular, we assume the expected returns of asset i

$$m_i = < \delta x_i >, \tag{5}$$

to be known. Hence, the expected return of portfolio is the linear combination

$$m_p = \sum_{i=0}^{M} p_i m_i. \tag{6}$$

Furthermore, we also assume the covariance matrix C_{ij} of assets to be known

$$\begin{aligned} C_{ij} &= < (\delta x_i - m_j)(\delta x_j - m_j) > && (7)\\ &= < \delta x_i \delta x_j > - < \delta x_i > m_j - m_i < \delta x_j > + m_i m_j && (8)\\ &= < \delta x_i \delta x_j > - m_i m_j. && (9) \end{aligned}$$

This is a nontrivial assumption, as guesses for covariances are difficult to obtain in practice. Similarly, we find for the covariance between asset i and the portfolio p

$$\begin{aligned} C_{ip} &= < (\delta x_i - m_j)(\delta S - m_p) > && (10)\\ &= \sum_{i=1}^{M} p_j < (\delta x_i - m_j)(\delta x_j - m_j) > && (11)\\ &= \sum_{i=1}^{M} C_{ij} p_j, && (12) \end{aligned}$$

and finally for the variance of portfolio p

$$D_p = C_{pp} = \sum_{i=1}^{M} p_i C_{ip} = \sum_{i,j=1}^{M} p_i C_{ij} p_j = \sum_{i=1}^{M} p_i^2 C_{ii} + \sum_{i,j=1,j\neq i}^{M} p_i C_{ij} p_j. \tag{13}$$

The main idea of Markowitz was to find an optimal portfolio by minimizing its variance D_p fixing its expected return m_p. Minimizing D_p must be done under some constraints. Necessary constraints are

$$\text{"normalization":} \quad \sum_{i=0}^{M} p_i = 1, \tag{14}$$

$$\text{expected return:} \quad \sum_{i=0}^{M} p_i m_i = m_p. \tag{15}$$

Note, that some p_i might be negative if short selling of assets is allowed. Other possible constraints, describing specific situations, can be, for example,

$$\text{dividends:} \quad \sum_{i=0}^{M} p_i d_i = D, \tag{16}$$

$$\text{no short selling:} \quad \sum_{i=0}^{M} |p_i| > 0, \tag{17}$$

$$\text{diversification:} \quad \sum_{i=0}^{M} p_i^2 = C, \tag{18}$$

$$\text{margins:} \quad \sum_{i=0}^{M} |p_i| x_i = F. \tag{19}$$

Example 1: Minimize portfolio variance D_p subject to (i) $\sum_{i=0}^{M} p_i = 1$ and (ii) $\sum_{i=0}^{M} p_i m_i = m_p$. Implementing the first constraint explicitly and introducing a Lagrange multiplier ζ for the second results in

$$E(p_0, p_1, \cdots, p_M) = \sum_{i,j=1}^{M} p_i C_{ij} p_j - \zeta \sum_{i=0} p_i m_i \tag{20}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{M} p_i C_{ij} p_j - \zeta \sum_{i=1} p_i (m_i - m_0) - \zeta m_0. \tag{21}$$

It follows from $\partial E / \partial p_i = 0$ for $i \neq 0$

$$2 \sum_{i=1}^{M} C_{ij} p_j = \zeta (m_i - m_0) \quad \Big(= 2C_{ip} \Big), \tag{22}$$

and thus, inverting the covariance C_{ij}

$$p_i = \frac{\zeta}{2} \sum_{j=1}^{M} C_{ij}^{-1} (m_i - m_0). \tag{23}$$

The Lagrange multiplier ζ is obtained from

$$\begin{aligned} m_p &= \sum_{i=0}^{M} p_i m_i && (24)\\ &= m_0 + \sum_{i=1}^{M} p_i (m_i - m_0) && (25)\\ &= m_0 + \frac{\zeta}{2} \sum_{i,j=1}^{M} (m_i - m_0) C_{ij}^{-1} (m_j - m_0), && (26) \end{aligned}$$

i.e.,

$$\zeta = 2 \frac{m_p - m_0}{\sum_{i,j=1}^{M} (m_i - m_0) C_{ij}^{-1} (m_j - m_0)}. \tag{27}$$

For D_p we find

$$\begin{aligned} D_p &= \sum_{i=1}^{M} p_i C_{ij} p_j && (28)\\ &= \frac{\zeta^2}{4} \sum_{i,j}^{M} (m_i - m_0) C_{ij}^{-1} (m_j - m_0) && (29)\\ &= \frac{(m_p - m_0)^2}{\sum_{i,j}^{M} (m_i - m_0) C_{ij}^{-1} (m_j - m_0)}, && (30) \end{aligned}$$

hence

$$\zeta = 2 \frac{D_p}{m_p - m_0} \tag{31}$$

Example 2: Minimize portfolio variance D_p without riskless asset subject to (i) $\sum_{i=0}^{M} p_i = 1$ and (ii) $\sum_{i=0}^{M} p_i m_i = m_p$. Implementing the both constraints by introducing Lagrange multiplier ζ and μ results in

$$E(p_1, \cdots, p_M) = \sum_{i,j=1}^{M} p_i C_{ij} p_j - \zeta \sum_{i=1} p_i m_i - \mu \sum_{i=1} p_i. \tag{32}$$

It follows from $\partial E / \partial p_i = 0$ for $i \neq 0$

$$p_i = \sum_{j=1}^{M} C_{ij}^{-1} (\frac{\zeta}{2} m_i + \frac{\mu}{2}). \tag{33}$$

The point with the lowest risk has $\xi = 0$, so that

$$p_i = \frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^{M} C_{ij}^{-1}, \tag{34}$$

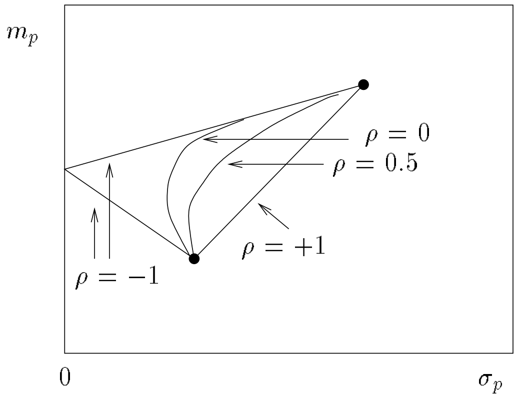

Abbildung 1: Portfolios of two risky correlated assets without short selling in the m_p–σ_p plane.

and for μ follows

$$1 = \sum_i p_i = \frac{\mu}{2} \sum_{ij} C^{-1}_{ij}, \tag{35}$$

i.e.,

$$\mu = \frac{2}{\sum_{ij} C^{-1}_{ij}}. \tag{36}$$

All optimal portfolios must have more risk. For the general case the Lagrange multipliers xi and μ can be obtained similarly as in Example 1.

Fig. 1 shows the dependency of a portfolio of two risky assets from their correlation coefficient. The correlation coefficient, defined as $\rho = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}C_{22}}}. = \frac{C_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$, can only take values between -1 (perfect anti–correlation) and $+1$ (perfect correlation). In the extreme case of perfect anti–correlation, i.e., $\rho = -1$, the two risky assets can be combined to a riskfree portfolio. If one of the two assets is riskfree, all the straight lines in the figure coincide (see example 1).

1.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

1.2.1 The Market Portfolio

Inserting Eq. (31) into Eq. (22) results in a relation between m_i and m_p,

$$m_i = m_0 + \underbrace{\frac{C_{ip}}{D_p}}_{\beta = C_{ip}/C_{pp}} (m_p - m_0). \tag{37}$$

(known as security market line) or, in terms of the standard deviation $\sigma_p = \sqrt{D_p}$,

$$m_i = \underbrace{m_0}_{\text{market price of time}} + \underbrace{\frac{C_{ip}}{\sigma_p}}_{\text{risk of asset}} \underbrace{\frac{m_p - m_0}{\sigma_p}}_{\text{market price of risk}}. \tag{38}$$

The Capital Asset Pricing Model (CAPM) assumes that all agents use this mean variance portfolio with the same guesses for m_i and D_i. It follows that the whole market can be considered as a mean variance portfolio, the so called market portfolio. Furthermore, the only free parameter of a rational investor should be the proportion p_0 of the riskless asset which is mixed with the market portfolio. I.e, letting m_p denote the expected return of the market portfolio, individual portfolios with returns m_i are on the line

$$m_i = m_0 + \sigma_i \frac{(m_p - m_0)}{\sigma_p}. \tag{39}$$

(capital market line) parametrized by σ_i [8]. Much empirical work has been devoted to check the validity of the CAPM with differing results.

1.2.2 Linear regression

Equation (37) follows also from predicting m_i from m_p by a linear regression model. Specifically, assume n data pairs (y_j, x_j). In the case of the CAPM these data will be pairs $(m_i(t_j), m_p(t_j))$, sampled for example at times t_j. Out aim is to find an optimal prediction of the y_i based on the x_i (i.e.,, for CAPM, prediction of the $m_i(t_j)$ based on the $m_p(t_j)$). To determine an optimal predicting function $f(x)$ we define a quadratic error measure

$$E = \sum_i \Big(f(x_i) - y_i \Big)^2. \tag{40}$$

In the particular situation of linear regression the function f is linear, $f(x) = \alpha + \beta x$. (A more flexible f would for example be a neural network.) The optimal parameters α, β are now found as usual by setting $\partial E/\partial\alpha = 0$ and $\partial E/\partial\beta = 0$. Thus,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\sum_i \Big(\alpha + \beta x_i - y_i\Big) && (41)\\ 0 &= 2\sum_i x_i\Big(\alpha + \beta x_i - y_i\Big) && (42) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \alpha &= < y > -\beta < x >, && (43)\\ 0 &= \alpha < x > +\beta < x^2 > - < xy >, && (44) \end{aligned}$$

from which follows

$$\beta = \frac{< xy > - < x >< y >}{< x^2 > - < x >^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}. \tag{45}$$

The definition of β being thus the same, Eq. (43) can now be identified with Eq. (37) with α corresponding to m_0, σ_{xy} to C_{ip}, and σ_x^2 to D_p.

1.3 Nonlinear constraints and spin glasses

Finally, we outline the main idea of how portfolios and spin glasses can be related [9]. This shows that nonlinear constraints can lead to many solutions for the optimal portfolio. Consider a portfolio with futures, for which a margin is required for both sides. Limiting such margins requires an additional constraint

$$\gamma \sum_i |p_i| x_i. \tag{46}$$

Hence, we may define an optimal portfolio as the minimum of

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} p_i C_{ij} p_j - \zeta \sum_i p_i m_i - \gamma \sum_i x_i |p_i|. \tag{47}$$

This yields,

$$0 = \sum_j C_{ij} p_j - \zeta m_i - \gamma x_i S_i, \tag{48}$$

i.e.,

$$p_i = \zeta \sum_j C_{ij}^{-1} m_j + \gamma \sum_j C_{ij}^{-1} x_j S_j, \tag{49}$$

where $S_i = \text{sign}(p_i)$. Setting $x_j = 1$, and taking the sign yields

$$S_i = \text{sign}\left[h_i + \sum_j^N J_{ij} S_j \right], \tag{50}$$

with $h_i = \zeta \sum_j C_{ij}^{-1} m_j$ and $J_{ij} = \gamma C_{ij}^{-1} x_j$. This is the equation, for a state which is (locally) stable under the discrete synchronous Hopfield dynamic, $S_i' = \text{sign}\left[h_i + \sum_j J_{ij} S_j \right]$, of a spin glass–like Hamiltonian

$$H = \sum_{ij}^N S_i J_{ij} S_j + \sum_i^N h_i S_i. \tag{51}$$

(For example, in a Hopfield model, $J_{ij} = \sum_a \xi_i^{(a)} \xi_j^{(a)}$, the $\xi_i^{(a)}$ representing patterns to be stored. In an EA-model (Edwards, Anderson) the J_{ij} are Gaussian random variables with distance dependent variance $\sigma_{J_{ij}} = \Delta(|i-j|)$. In a SK-model (Sherrington, Kirkpatrick) the J_{ij} are Gaussian random variables with distance independent variance $\sigma_{J_{ij}} = J^2/N$, For portfolio theory one can choose a covariance $\mathbf{C} = \mathbf{M}^T\mathbf{M} + \mathbf{D}$ built from random matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$.) As one knows that the ground state of spin glasses can be highly degenerated one can expect a similar effect for such portfolios. For a random matrix treatment see [9].

2 Forwards und Futures

In dieser Stunde werden als Vorbereitung zur Behandlung von Optionen (bedingten Terminkontrakten) unbedingte Terminkontrakte vorgestellt.

2.1 Forwards

Forwards sind unbedinge Terminkontrakte, also Geschäfte die jetzt vereinbart und später zu den jetzt vereinbarten Konditionen ausgeführt werden. D.h. zur Zeit t_0 wird der Terminkontrakt geschlossen und später zur Zeit t_N wird bezahlt und geliefert. Das Geschäft ist unbedingt (in Gegensatz beispielsweise zu Optionen), d.h. an keine Bedingungen geknüpft. Es kommt daher auf jeden Fall zustande, es sei denn es wird vorher rückgängig gemacht oder eine der beiden Parteien ist nicht in der Lage ihren Verpflichtungen nachzukommen.

2.2 Futures

Futures sind standardisierte, handelbare und abgesicherte unbedingte Terminkontrakte. Die Standardisierung erlaubt einen Handel mit genügender Nachfrage und Angebot. Ein Futurekontrakt kann daher in der Regel jederzeit zum aktuellen Marktpreis (Kurs) ge– und verkauft werden. Die freie Handelbarkeit basiert ebenfalls auf einer zusätzlichen Abgesicherung: Die Clearingstelle stellt durch das Fordern von Margins (Ein– und Nachschüsse, siehe unten) sicher, daß keine Partei ausfallen kann.

2.3 Einige grundlegende Begriffe

Die auf Termin gehandelten Waren (Aktien, Anleihen, Devisen oder andere Güter) sind das Underlying des Terminkontraktes. Folgender Sprachgebrauch ist üblich:

1. Underlying auf Termin verkaufen = *Short–Position*,
2. Underlying auf Termin kaufen = *Long–Position*,

wobei

1. eine Short–Position von fallenden Kursen profitiert,
2. und eine Long–Position von steigenden Kursen profitiert.

Mögliche Motivationen und Beziehungen von Terminmarktteilnehmern sind in Abb. 2 dargestellt. Eine Absicherung gegen schwankende Underlyingkurse wird als Hedging bezeichnet. Ein Hedger in der Long–Postion benötigt das Underlying (z.B. Rindfleisch) zum Zeitpunkt t_N. Um sich gegen Preisschwankungen zu schützen kann er bereits zu einem früheren Zeitpunkt t_0 das benötigte Underlying kaufen. Ein Hedger in der Short–Postion hat das Underlying (z.B. ein

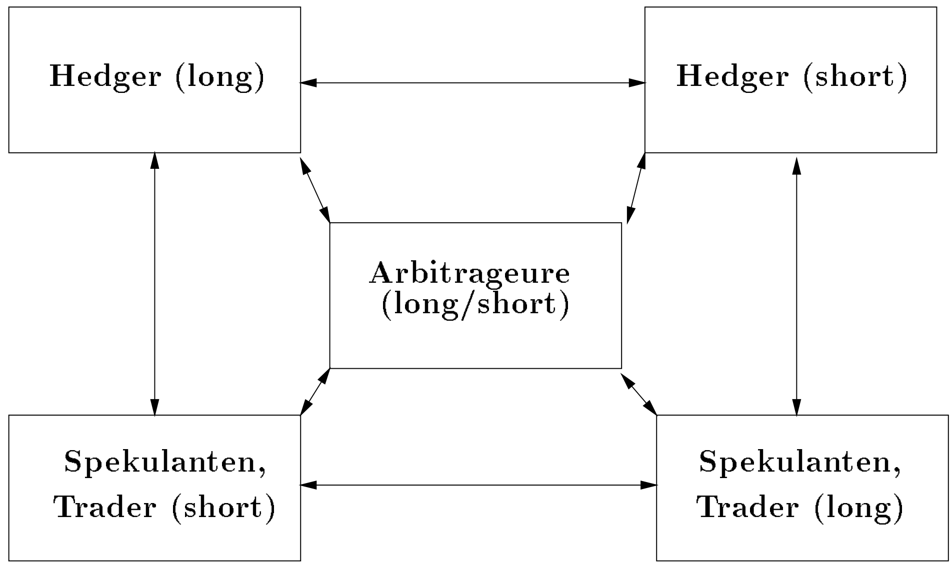

Abbildung 2: Mögliche Motivationen und Beziehungen von Terminmarktteilnehmern.

Bauer mit Rindern) und möchte sich Spekulanten haben und brauchen das Underlying nicht direkt, sie wollen an Kursschwankungen verdienen. Arbitrageure (siehe unten) werden aktiv sobald die Terminpreise zu hoch oder zu tief liegen und einen risikolosen gewinn Ermöglichen. In diesem Sinne tragen sie dazu bei, daß der Terminpreis marktgerecht ist. Für weitere Details siehe [4, 7, 18, 15].

2.4 Beispiel: DAX Futures (Eurex)

2.4.1 Spezifikation FDAX

Contract Standard: The Deutscher Aktienindex (DAX).

Contract Value: EUR 25 per DAX index point.

Settlement: Cash settlement based on the final settlement price, payable on the first exchange trading day immediately following the last trading day.

Quotation: In points, carried out one decimal place.

Min. Price Movem.: 0.5 of a point, representing a value of EUR 12,50.

Contract Terms: The three nearest months within the cycle March, June, September, December.

Last Trading Day: The third Friday of the expiration month, if that is an exchange trading day; otherwise, on the exchange trading day immediately prior to that Friday. Trading ceases at the start of the intra-day trading auction on the electronic trading system (Xetra), at 1:00 p.m. CET, as determined by the management of the Frankfurt Stock Exchange.

Daily Settlement Price: The last-paid price of the trading day; or, if the last-paid price is older than 15 minutes or does not reasonably reflect actual market conditions, then Eurex will establish the official settlement price.

Final Settlement Price: The value of the DAX, determined on the basis of the collective prices of the shares contained in the DAX index on the last trading day, as reflected in the intra-day trading auction on the electronic system of the Frankfurt Stock Exchange (Xetra).

Trading Hours: 8:50 a.m. until 5:30 p.m. CET.

2.4.2 Aktuelle Kurse des FDAX und des DAX

Die folgende Tabelle zeigt als Beispiel die aktuellen Kurse des FDAX (Wertpapierkennnummer (WKN): 846959) der momentan erhältlich ist mit den folgenden drei Fälligkeitsterminen: 03/2000, 06/2000, 09/2000. (Quelle: Eurex `http://www.eurexchange.com/`).

Dax–Futures am 14.1.2000 (FDAX):

Delivery	Opening	Daily High	Daily Low	Closing Price	Settlement	Traded Contracts	Open Interests
Mar 00	7050.00	7246.00	7050.00	7229.00	7229.00	63'855	139'346
Jun 00	7115.00	7296.00	7115.00	7296.00	7283.00	946	11'952
Sep 00	7213.00	7322.00	7212.00	7300.00	7354.00	25	1'344

Zum Vergleich der Kurs des "Underlyings" d.h. des DAX (Quelle Handelblatt vom 17.1.2000):

Dax–Performance–Index am 14.1.2000:

	Anfang	Tages–Hoch	Tages–Tief	Schluß	Settlement	Vortag
DAX	6960.29	7207.45	6960.29	7173.22	7094.23	6955.98

(Historische Volatilität des DAX: 26.17% per annum in den letzten 30 Tagen bzw. 21.29% per annum in den letzten 250 Tagen.)

Die folgende Tabelle zeigt die relativen prozentualen Differenzen zischen den Terminpreisen des DAX und dem Kassapreis des DAX:

	FDAX-DAX	$\frac{100(\text{FDAX} - \text{DAX})}{\text{DAX}}$	Monate	$\frac{12}{\text{Monate}} \frac{100(\text{FDAX} - \text{DAX})}{\text{DAX}}$
Mar 00	134.77	1.9%	ca. 2	11.4%
Jun 00	188.77	2.7%	ca. 5	6.48%
Sep 00	259.77	3.7%	ca. 8	5.5%

Zum Beispiel beträgt die Differenz der Settlement–Preise FDAX(Mar 00) - DAX = 7229.00 DM−7094.23 DM = 134.77 DM. Dies entspricht einer Verzinsung von ca. 1.9% auf den DAX bis zum Fälligkeitstermin in ca. 2 Monaten (3.ter Freitag im März), und damit einer jährlichen Verzinsung (ohne Zinseszinseffekte) von ungefähr 11%. Falls den DAX representierende Papiere zu diesem Zeitpunkt zum aktuellen DAX–Kurs erworben werden konnten, hätte der Kauf des DAX–Futures zum aktuellen Kurs in diesem Moment eine lohnende risikolose Rendite ermöglicht (siehe auch Abschnitt 3).

Nachtrag vom 19.1.2000: Am 18.1.2000 betrug der Settlementpreis des DAX Futures mit Fälligkeit März 2000 (FDAX(Mar 00)–Kontrakt) 7123.00 DM bei einem DAX–Schlußkurs von 7072.12 DM. Die Differenz hat sich also reduziert auf 50.88 DM, beziehungsweise prozentual auf den DAX bezogen, auf 0.72%. Dies entspricht einer jährlichen Verzinsung von ungefähr 4.3%. und damit eher dem Zinsniveau von risikoarmen Anleihen. Die folgende Tabelle gibt den Stand vom 18.1.2000 wieder:

	FDAX	FDAX-DAX	$\frac{100(\text{FDAX} - \text{DAX})}{\text{DAX}}$	$\frac{12}{\text{Monate}} \frac{100(\text{FDAX} - \text{DAX})}{\text{DAX}}$
Mar 00	7123.00	50.88	0.72%	4.31%
Jun 00	7177.00	104.88	1.48%	3.56%
Sep 00	7249.00	176.88	2.50%	3.75%

2.5 Margin–Konto

Zur Absicherung des Erfüllungsrisikos benötigt jeder der einen Futurekontrakt kaufen will ein Marginkonto, auf dem die durch die täglichen Kursschwankungen des Futures sich ergebenden Gewinne oder Verluste verbucht werden. Bei Kauf eines Kontraktes muß hierbei eine Sicherheitsleistung (Ertseinschuß oder Initial Margin, and der Deutschen Börse: Additional Margin) eingezahlt werden. Der Initial Margin wird dabei so bemessen, daß er die größte für möglich erachtete Tagesschwankung (worst case) auffangen kann. Bei für den Akteur negativer Kursentwicklung muß dann das durch die aktuellen Verluste belastete Marginkonto wieder aufgefüllt werden (Nachschüsse oder Variation Margin) so daß die hinterlegte Summe stets mindestens dem Initial Margin entspricht. Ist er dazu nicht in der Lage wird seine Position automatisch glattgestellt, d.h. sein Kontrakt zum aktuellen Kurs weiterverkauft. Dadurch ist garantiert das der Future erfüllt werden kann und keine Partei ausfällt. Diese Sicherheit ist ein wesentlicher Vorteil eines Futures gegenüber eines ungesicherten Forwards.

Außerdem ermöglicht dies die unmittelbare Realisierung der aktuellen Gewinne und Verluste.

Beispiel: Angenommen, Kunde A kaufte am 13.1.2000 einen FDAX(Mar 00) Kontrakt zum Schlußkurs von 7009.00 DM (long position, Spekulation auf steigenden DAX oder Absichern geplanter Aktienkäufe gegen steigenden DAX) von Kunden B (short position, Spekulation auf fallenden DAX oder Absichern eigener Aktien gegen fallenden DAX).

Bei einem Settlementpreis am 14.1.2000 von 7229.00 DM beträgt die Wertänderung eines FDAX(Mar 00)–Kontraktes (mit einem Wert von 25 Euro pro Indexpunkt, wie oben angegeben)

$$\begin{aligned} 7009.00 * 25\mathrm{EUR} &= 175225\mathrm{EUR} \\ 7229.00 * 25\mathrm{EUR} &= 180725\mathrm{EUR} \\ \text{Differenz} & \quad\ \ 5500\mathrm{EUR} \end{aligned}$$

Nehmen wir an der Initial Margin sei auf 15000 EUR pro Kontrakt festgelegt. Dann ergibt sich nach Abschluß der Handelsperiode am 14.1.2000 für das Marginkonto der folgende Kontostand:

	A (long position)			B (short position)		
Datum	Kontostand	Gutschrift	Belastung	Gutschrift	Belastung	Kontostand
13.1.2000	15000 EUR	-	-	-	-	15000 EUR
14.1.2000	20500 EUR	5500 EUR	-	-	5500 DM	9500 EUR

A kann seinen Gewinn unmittelbar verwenden (z.B. abheben), B hingegen bekommt einen Margin Call und muß sein Konto wieder auf den Stand des Initial Margin (15000 EUR) auffüllen. Ist B dazu nicht in der Lage, wird seine Position glattgestellt, d.h. die Clearingstelle kauft stellvertretend für B eine kompensierende Long–Position zu dem aktuellen Kurs. B hat dadurch einen Verlust von 5500 EUR realisiert. Das Marginkonto wird nach jedem Handelstag aktualisiert (marked to market).

3 Der "faire" Preis eines Forwards

3.1 Erwartungswertprinzip (Bachelier)

Hehmen wir an, daß die am Termingeschäft beteiligten Parteien nicht anderweitig mit dem Underlying handeln, sondern nach Abschluß des Kontraktes schlicht auf den Fälligkeitstermin warten. Kommt Forwardkontrakt zustande so ist dann der Verlust(bzw. Gewinn) des Halters der Long–Position der Gewinn (bzw. Verlust) des Halters der Short–Position (Nullsummenspiel). Dies ist in Abb. 3. dargestellt. Von einem fairen Preis sollte man also erwarten, daß der erwartete Gewinn für beide Parteien gleich, d.h. also Null, ist. (Vgl. aber nächsten Abschnitt.) Der Schreiber eines Forwards (short position), beispielsweise, erhält

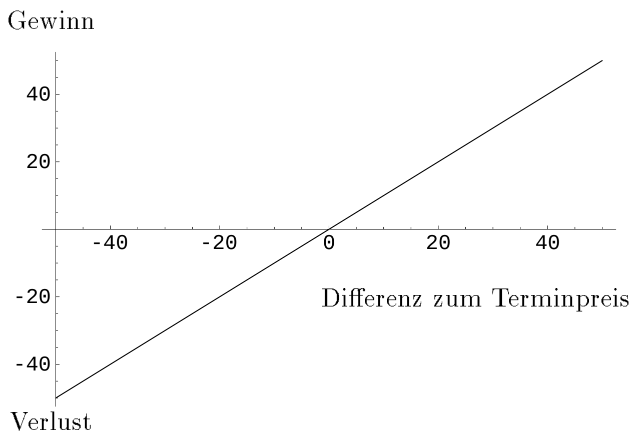

Abbildung 3: Abhängigkeit des Gewinns von Aktuellen Preis des Underlyings am Fälligkeitstermin beim Halten der Long–Position eines Terminkontraktes.

zum Fälligkeitstermin t_N die Summe F und muß dafür das Underlying liefern zum aktuellen Preis x_N. Seine Vermögensänderung zur Zeit t_N ist dann also

$$\Delta W = F - x_N. \tag{52}$$

Ein fairer Preis sollte also die erwartete Vermögensänderung auf Null setzen $< \Delta W_N > = 0$. Es ergibt sich also

$$< \Delta W >= 0 \Rightarrow F =< x_N >, \tag{53}$$

worin $< x_N >$ den Erwartungswert des Underlyingkurses bezeichnet.

3.2 No–Arbitrage–Prinzip

Die Überlegungen des vorherigen Abschnitts basieren auf der Annahme, daß die beteiligten Parteien keine weiteren Handelsaktionen mit dem Underlying ausführen. Dies ist etwa der Fall wenn das Underlying gar nicht handelbar ist. Unter der Annahme jedoch, daß das Underlying auch bereits zur Zeit t_0 gehandelt werden kann hat der Schreiber des Forwards (d.h., der Halter der Short–Position) eine andere Möglichkeit: Er kann seine Position absichern (hedgen). In diesem Falle kauft er das Underlying bereits zum Zeitpunkt t_0 zum Preis x_0. Ihm entgeht dabei ein Zinsgewinn von $x_0(1 - e^{r(t_N - t_0)}$ (cost of carry). Als fairer Preis ergibt sich daher

$$F = x_0 e^{r(t_N - t_0)}. \tag{54}$$

Ein höherer Forwardpreis F, beispielsweise, würde ihm eine risikolose Verdienstmöglichkeit (Arbitrage) ermöglichen. Ähnlich liesse sich aus einem zu niedrigem Forwardpreis ein risikoloser Gewinn machen, falls die Möglichkeit des Leerverkaufens (Shorten) des Underlyings existiert.

Analog läßt sich beispielsweise eine Short–Position auf den Kauf einer Kuh absichern durch den Kauf einer Kuh. Ein marktgerechter Forwardpreis wäre in diesem Fall der Erwartungswert der folgenden Summe: Preis einer Kuh +Kosten für Futter und Stall -Ertrag für Milch +Zinsen für die dafür nötigen Geldmittel.

Ein Halter der Short–Position der sich in dieser Weise abgesichert hat trägt bei solch einem marktgerechten Preis kein Risiko. (Er macht dann allerdings auch keinen Gewinn. Weiterhin nimmt er dann auch nicht an einer etwaigen für ihn positiven Kursentwicklung teil.)

Der Halter der Long–Position behält dagegen das Risiko (Es sei denn er hat das Underlying vorher leerverkauft, d.h. "geshorted"). Der Verlust/Gewinn des Halters der Long–Position wird dann indirekt durch Dritte am Markt kompensiert. Also zum Beispiel von demjenigen Dritten der zur Zeit t_0 das Underlying an den Halter der Short–Position verkauft hat. Man bemerke allerdings, daß sich unter diesen idealisierten Bedingungen der Terminkontrakt für beide Seiten nicht lohnt. Der Halter der Long–Position könnte beispielsweise zu dem gleichen Preis selbst das Underlying direkt zur Zeit t_0 kaufen und die notwendigen Zinsen direkt übernehmen anstatt sie über den Terminkontrakt zu bezahlen. In der Praxis sind aber zum Beispiel die Haltungskosten (cost of carry) individuell verschieden. (Ein Farmer kann eine zusätzliche Kuh leichter unterbringen als ein Banker. Die gewährten Zinsraten sind individuell unterschiedlich.) In diesem Sinne, braucht ein Terminkontrakt kein Nullsummenspiel zu sein. Dies wahren Motivationen für Terminkontrakte sind in der idealisierten Theorie nicht enthalten. Diese kann also nur Anhaltspunkt sein zur Bestimmung der Terminpreise die sich am Markt tatsächlich ergeben.

Im allgemeinen sind die Preise, die sich aus dem No–Arbitrage– und dem Erwartungswertprinzip ergeben, verschieden. Auch wenn der Erwartungswert $< x_N >$ in der Regel nicht mit dem No–Arbitrage–Preis $x_0 e^{r(t_N - t_0)}$ zusammenfällt, so sind sie jedoch nicht völlig entkoppelt. Ist mit dem Underlying mit geringem Risiko ein sehr viel größerer Gewinn zu machen (d.h. $< x_N > -x_0$ groß, $< x_N^2 >$ klein) wird es auch für den Halter der Short–Position interessant das geliehene Kapital selbst in das Underlying zu investieren (anstatt zum Hedgen des Terminkontraktes und den Gewinn somit zum Fälligkeitstermin an den Halter der Long–Position abzutreten) und auf einen Kursgewinn zu setzen. (Subtrahiert man von den erwarteten Gewinn einer riskanten Anlageform den möglichen Gewinn einer risikolosen Anlage so findet man den Risikoaufschlag. Dieser sollte einigermaßen homogenen sein für verschiedene Anlageformen. In diesem Sinne also sind Zinsniveau r und Erwartungswert $< x_N >$ durchaus gekoppelt.)

3.3 Handelsstrategien zur Risikominimierung

Um die Behandlung von Optionen vorzubereiten und die grundlegenden Begriffe einzuführen leiten wir den fairen Preis eines Forwardkontraktes nocheinmal etwas formaler her. (Die Vorgehensweise entspricht der in [6].) Es seien W_n das Gesamtvermögen eines Akteurs zum Zeitpunkt t_n, von dem wir nun annehmen, daß es sich aufteilt in Barvermögen B_n und ϕ_n Anteile eines frei handelbaren

Underlyings (von welchem wir nun annehmen es handele sich um eine Aktie) mit einem Stückpreis (Kurs zum Zeitpunkt t_n) von x_n. Für das Gesamtvermögen zum Zeitpunkt t_n gilt also

$$W_n = B_n + \phi_n x_n. \tag{55}$$

Weiterhin nehmen wir an, dem betrachteten Akteur stehe eine risikolose Anlageform für sein Geldvermögen zur Verfügung mit dem Zinssatz r. Konkret heißt das, in dem Zeitraum $\tau = t_{n+1} - t_n$, vermehre sich das Geldvermögen B_n um den Betrag $B_n\rho \approx B_n(1 - e^\rho)$, wobei $\rho = r\tau$. Der Wert des Aktienvermögens ändert sich dagegen durch Änderung der Kurse $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$.

Zur formalen Beschreibung ist es hilfreich die zeitliche Entwicklung des Vermögens W_n in zwei Schritte zu unterteilen: (a) die zeitliche Veränderung des Vermögens durch Verzinsung des Geldes einerseits und die Veränderung des Aktienkurses andererseits. (b) die (instantane) Umschichtung des Vermögens zwischen Bargeld und Aktien. Dies führt auf folgendes Modell:

$$\begin{array}{lccccc} \text{Geld}: & B_n & \rightarrow & B_n(1+\rho) & \rightarrow & B_n(1+\rho)-(\phi_{n+1}-\phi_n)x_{n+1} = B_{n+1} \\ \text{Aktien}: & \underbrace{\phi_n x_n}_{\text{Zeit: } t_n} & \underbrace{\rightarrow}_{\text{(a)}} & \underbrace{\phi_n x_{n+1}}_{\text{Zeit: } t_{n+1}} & \underbrace{\rightarrow}_{\text{(b)}} & \underbrace{\phi_{n+1} x_{n+1}}_{\text{nochmals die gleiche Zeit: } t_{n+1}} \end{array} \ldots . \tag{56}$$

(a) Die zeitliche Entwicklung des Vermögens in der Zeit $\tau = \Delta t = t_{n+1} - t_n$ ist daher

$$\Delta B_n^{(a)} = B_n\rho, \tag{57}$$

$$\Delta W_{n,\phi}^{(a)} = \phi_n \Delta x_n, \tag{58}$$

wobei $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. und $W_{n,\phi} = \phi_n x_n$.

(b) Eine Vermögensumschichtung bedeutet Aktienkauf bei Verminderung des Barvermögens bzw. Aktienverkauf bei Erhöhung des Barvermögens,

$$\Delta B_n^{(b)} = -\Delta\phi_n x_{n+1} \tag{59}$$

$$\Delta W_{n,\phi}^{(b)} = \Delta\phi_n x_{n+1}, \tag{60}$$

wobei $\Delta\phi_n = \phi_{n+1} - \phi_n$. Die Vermg̈ensumschichtung selbst ist erfolgsneutral $\Delta W_n^{(b)} = 0$. Insgesamt erhalten wir daher für die Änderung des Vermögens ΔW $= \Delta W^{(a)}$, d.h.,

$$\Delta W_n = B_n\rho + \phi_n \Delta x_n, \tag{61}$$

$$\Delta B_n = B_n\rho - \Delta\phi_n x_{n+1}. \tag{62}$$

Durch Iteration folgt

$$\begin{aligned} B_n &= B_{n-1} + \Delta B_{n-1} = B_{n-1}(1+\rho) - \Delta\phi_{n-1}x_n \\ &= B_{n-2}(1+\rho)^2 - \Delta\phi_{n-2}x_{n-1}(1+\rho) - \Delta\phi_{n-1}x_n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\dots\\
&= B_0(1+\rho)^n - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m x_{m+1}(1+\rho)^{n-m-1}\\
&= (1+\rho)^n \left(B_0 - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m \underbrace{x_{m+1}(1+\rho)^{-(m+1)}}_{\widetilde{x}_{m+1}} \right)\\
&= (1+\rho)^n \left(B_0 - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m \widetilde{x}_{m+1} \right), \qquad (63)
\end{aligned}
$$

mit diskontierten (auf t_0 abgezinsten) $\widetilde{x}_n = x_n(1+\rho)^{-n}$. Damit erhalten wir ebenfalls

$$
\begin{aligned}
W_n &= B_n + \phi_n x_n\\
&= \underbrace{B_0(1+\rho)^n}_{\text{verzinstes Barkapital}} \underbrace{- \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m x_{m+1}(1+\rho)^{n-m-1}}_{\text{zwischenzeitlich in Aktien angelegtes Kapital ohne Verzinsung}} \underbrace{+\phi_n x_n}_{\text{Endkapital in Aktien}}\\
&= \underbrace{(W_0 - \phi_0 x_0)}_{B_0}(1+\rho)^n + \phi_n x_n - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m x_{m+1}(1+\rho)^{n-m-1}\\
&= (1+\rho)^n \left(W_0 - \phi_0 \underbrace{x_0}_{\widetilde{x}_0} + \phi_n \underbrace{x_n(1+\rho)^{-n}}_{\widetilde{x}_n} - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m \underbrace{x_{m+1}(1+\rho)^{-(m+1)}}_{\widetilde{x}} \right)\\
&= (1+\rho)^n \big(W_0 + \underbrace{\phi_n \widetilde{x}_n - \phi_0 \widetilde{x}_0 - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m \widetilde{x}_{m+1}}_{\sum_{m=0}^{n-1} \phi_m \Delta\widetilde{x}_m} \big)\\
&= (1+\rho)^n \left(W_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \phi_m \Delta\widetilde{x}_m \right) \qquad (64)\\
&= (1+\rho)^n \left(W_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \phi_m [\widetilde{x}_{m+1} - \widetilde{x}_m] \right)\\
&= W_0(1+\rho)^n + \sum_{m=0}^{n-1} \phi_m [x_{m+1} - (1+\rho)x_m](1+\rho)^{n-m-1}. \qquad (65)
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir benutzt, daß $W_0 = B_0 + \phi_0 x_0$, und, als diskretes Analogon einer partiellen Integration,

$$
\sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m \widetilde{x}_{m+1}
$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} (\phi_{m+1} - \phi_m) \widetilde{x}_{m+1}$$

$$= \left(\phi_n \widetilde{x}_n - \phi_0 \widetilde{x}_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \phi_m (\widetilde{x}_m - \widetilde{x}_{m+1}) \right)$$

$$= \left(\phi_n \widetilde{x}_n - \phi_0 \widetilde{x}_0 - \sum_{m=0}^{n-1} \phi_m \Delta \widetilde{x}_m) \right) . \tag{66}$$

Addieren wir für den Schlußabrechnungstag (zur Zeit t_N) noch die Vermögensänderung durch den zu erfüllenden Terminkontrakt (F - x_N aus der Sicht einer Short–Position), so erhalten wir

$$W_N = F - x_N + (1+\rho)^N \left(W_0 + \sum_{m=0}^{N-1} \phi_m \Delta \widetilde{x}_m \right) , \tag{67}$$

oder, mit $x_N = \widetilde{x}_N (1+\rho)^N$ und $\widetilde{x}_N = x_0 + \sum_{m=0}^{N-1} \Delta \widetilde{x}_m$,

$$W_N = F - (1+\rho)^N \left(x_0 - W_0 - \sum_{m=0}^{N-1} (\phi_m - 1) \Delta \widetilde{x}_m \right) . \tag{68}$$

Wir erkennen, daß die Wahl

$$\phi_m = 1, \quad \forall m, \tag{69}$$

den Tradingterm vollständig eliminiert. Damit werden auch alle Zufallfaktoren, d.h. die probabilistische Entwicklung der Aktienkurse x_n eliminiert. Die Wahl $\phi_m = 1$ minimiert also das Risiko für den Halter der Short–Position. Dies entspricht einer Hedgestrategie bei dem das Underlying zu Beginn, d.h. zur Zeit t_0, gekauft und bis zum Ende t_N gehalten wird. Unter diesen Umständen ergibt sich

$$W_N = F - (1+\rho)^N (x_0 - W_0) . \tag{70}$$

Ein "fairer" Preis F entspricht der Bedingung,

$$W_N = W_0 (1+\rho)^N . \tag{71}$$

Es folgt

$$F = (1+\rho)^N x_0 \approx x_0 e^{\rho} , \tag{72}$$

d.h. der faire Forwardpreis entspricht dem aufgezinsten Preis des Underlying zum Zeitpunkt t_0. Falls der Forwardpreis dieser Bedingung nicht genügt, sind daher Arbitragegewinne möglich. Idealerweise sorgen also entsprechende Arbitrageure dafür, daß sich dieser Preis am Markt einstellt. In der Praxis können allerdings z.B. nichtverschwindende Transaktionskosten und ein variables Zinsniveau r zu Abweichungen führen.

4 Optionen

Nach der vorbereiteten Behandlung von Forwards und Futures kommen wir nun zur Bepreisung von Optionen auf der Basis des Ansatzes von Bouchaud–Sornette–Potters [6]. Dieser Ansatz, basierend auf einem Kriterium der minimalen Varianz, und ist allgemeiner als der klassische Black–Scholes–Zugang [15, 20, 21, 2, 16, 17], den wir später vorstellen werden. Er erfordert jedoch mehr Rechenaufwand als der klassiche Weg über den Ito–Kalkül. Einige typische Rechnungen führen wir in dieser Vorlesung exemplarisch im Detail vor.

4.1 Grundlegende Begriffe

Eine Option ist ein bedingtes Termingeschäft. Vekauft wird ein Recht. Der Käufer kann dieses Recht einlösen, er muß es aber nicht. Käufer und Verkäufer befinden sich bei eienm Optionsgeschäft in folgender Situation:

Der **Käufer (Long–Position)**

A. erwirbt ein Recht.

B. Für dieses Recht zahlt er eine Prämie.

Der **Verkäufer (Schreiber, Stillhalter, Short–Position)**

A. übernimmt eine Pflicht.

B. Für das Übernehmen dieser Pflicht erhält er eine Prämie.

Die Prämie wird üblicherweise sofort gezahlt.

Insbesondere gibt es folgende Optionsgrundtypen:

Call–Option (Kaufoption): Der Käufer erwirbt das Recht auf Kauf eines Underlyings (etwa einer Aktie) zu einem bestimmten Preis (Basispreis, "strike price") an (oder bis zu) einem bestimmten Verfalls(Ablauf,Fälligkeits)datum.

Put–Option (Verkaufsoption): Der Käufer erwirbt das Recht auf Verkauf eines Underlyings (etwa einer Aktie) zu einem bestimmten Preis (Basispreis, strike price) an (oder bis zu) einem bestimmten Fälligkeitsdatum.

Die Abbildungen 4, 5, sowie 6, 7 zeigen die Gewinne und Verluste am Verfallstag in Abhängigkeit vom Preis des Underlyings (z.B. Aktienkurs) für die entsprechenden vier Kombinationsmöglichkeiten von Call– und Put–Optionen in Long– und Short–Position. Diese vier Grungtypen von Optionspositionen können als Bausteine dienen um komplexere Gewinn/Verlustfunktionen zu konstruieren.

Bei einem “spread” werden beispielsweise Optionen gleichen Typs (Call/Put) aber unterschiedlichen Basispreisen gekauft und verkauft. Abb. 8 zeigt einen “bullish vertical spread”, die Kombination eines Calls in Long–Position und eines Calls in Short–Position letzterer mit höherem Basispreis. Bei einer “combination” werden Calls und Puts kombiniert. Abb. 9 zeigt z.B. eine “bottom vertical combination” die Kombination eines Calls in Long–Position und eines Puts in Long–Position mit höherem Basispreis.

Der Käufer eines Calls, sowie der Schreiber eines Puts profitieren von steigenden Underlyingkursen. Umgekehrt profitieren der Schreiber eines Calls, sowie der Käufer eines Puts von fallenden Kursen. Neben spekulativen Gesichtspunkten, kann eine Option als Versicherung eingesetzt werden. Beispielsweise sichert der Kauf Einer Put–Option für eine Aktie im eigenen Besitz gegen einen Kursverfall dieser Aktie.

Weiterhin unterscheidet man:

Europäische Option: Das Recht auf Kauf (Call) oder Verkauf (Put) gilt nur für den Verfallstag der Option.

Amerikanische Option: Das Recht auf Kauf (Call) oder Verkauf (Put) gilt ab sofort bis zum Verfallstag der Option.

Wir werden uns im Folgendem hauptsächlich mit europäischen Optionen beschäftigen (wie z.B. die DAX–Option). Da eine amerikanische Option ein umfassenderes Recht als eine entsprechende europäische Option einräumt, kann ihr Wert (Preis) insbesondere nie geringer als die einer europäischen Option sein.

Ähnlich zu Futures sind an der Börse handelbare Optionen stark genormt (im Gegensatz zu mehr individuellen “over the counter” (OTC) Optionen oder individuellen Versicherungsverträgen). Außerdem ist bei börsennotierten Optionen das Erfüllungsrisiko durch ein Marginkonto abgesichert (siehe Notizen zu Forards und Futures). Man beachte, daß nach Abschluß eines Optionsgeschäftes (Call oder Put) nur der Halter der Short–Position ein verbleibendes Risiko zu tragen hat. Der Käufer hat seine Verpflichtung mit der Bezahlung der Prämier bereits erfüllt. Im Gegensatz zu einem unbedingten Termingeschäft (Forward oder Future) ist hier die Situation asymmetrisch. Deshalb ist auch nur für den Schreiber einer Option ein Marginkonto erforderlich um seine Erfüllungspflicht zum Ablaufdatum abzusichern.

Wie bei Futures, gibt es auch Optionen bei welchen das Underlying nicht tatsächlich geliefert werden muß sondern bei Einlösung der Option ein Barausgleich erfolgt.

Für weitergehende Informationen zu praktischen Aspekten im Zusammenhang mit Optionen siehe beispielsweise [18, 3, 4].

4.2 Beispiel ODAX (Eurex)

Als Beispiel seien die Spezifikationen der DAX–Optionen hier wiedergegeben. Quelle:
`http://www.eurexchange.com/entrancehall/e_specification_odax.html`

Underlying Instrument: The Deutscher Aktienindex (DAX).

Contract Value: EUR 5 per DAX index point.

Settlement: Cash settlement, payable on the first exchange trading day immediately following the last trading day.

Quotation: In points, carried out one decimal place.

Min. Price Movem.: 0.1 of a point, representing a value of EUR 0,50.

Last Trading Day: The third Friday of the expiration month, if that is an exchange trading day; otherwise, on the exchange trading day immediately prior to that Friday. Trading ceases at the start of the intra-day trading auction on the electronic trading system (Xetra) at 1:00 p.m. CET.

Daily Settlement Price: The last-paid price of the trading day; or, if the last-paid price is older than 15 minutes or does not reasonably reflect actual market conditions, then Eurex will establish the official settlement price.

Final Settlement Price: The value of the DAX, determined on the basis of the collective prices of the shares contained in the DAX index as reflected in the intra-day trading auction on the electronic system of the Frankfurt Stock Exchange (Xetra).

Exercise Period: European style, i.e. an option may only be exercised on the last trading day of the options series up to the end of the Post-Trading Period.

Expiration Months: The three nearest calendar months, the three following months within the cycle March, June, September and December, as well as the two following months of the cycle June and December; i.e. options contracts are available with a duration of 1, 2, 3, max. 6, max. 9, max. 12, as well as max. 18 and max. 24 months.

Exercise Prices: Exercise price gradations for DAX options are as follows:

Expiration Months with a remaining term up to	Number of strike prices	Exercise price gradations in index points
6 months	9	50
12 months	5	100
24 months	5	200

Each contract month will be introduced with at least five strike prices.

Option Premium: The EUR equivalent of the premium in points is payable on the first trading day immediately following the trade date.

Trading Hours: 8:50 a.m. until 5:30 p.m. CET.

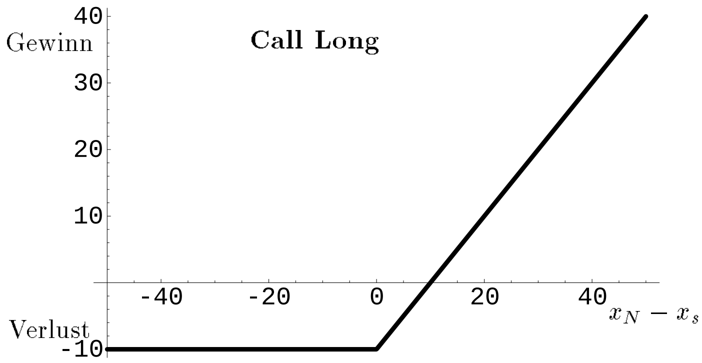

Abbildung 4: Gewinn/Verlust zum Zeitpunkt T_N in Abhängigkeit von der Differenz $x_N - x_s$ for den Käufer (Long–Position) einer Call–Option mit Berücksichtigung der Optionsprämie.

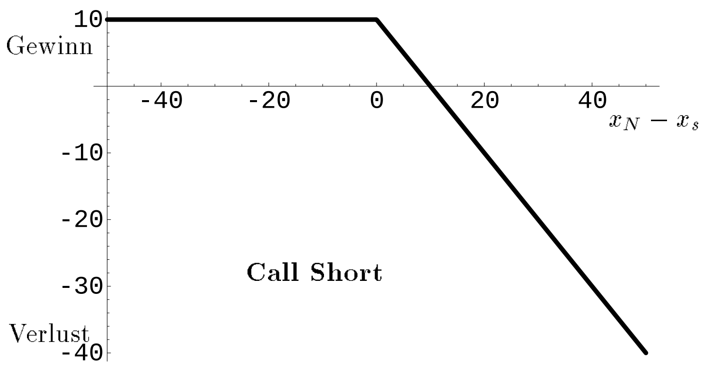

Abbildung 5: Gewinn/Verlust zum Zeitpunkt T_N in Abhängigkeit von der Differenz $x_N - x_s$ for den Schreiber (Stillhalter, Short–Position) einer Call–Option mit Berücksichtigung der Optionsprämie.

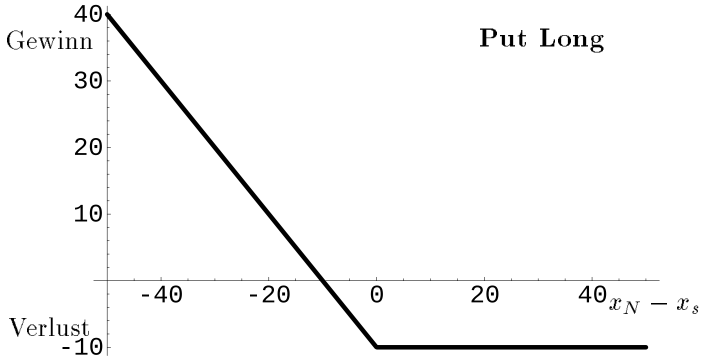

Abbildung 6: Gewinn/Verlust zum Zeitpunkt T_N in Abhängigkeit von der Differenz $x_N - x_s$ for den Käufer (Long–Position) einer Put–Option mit Berücksichtigung der Optionsprämie.

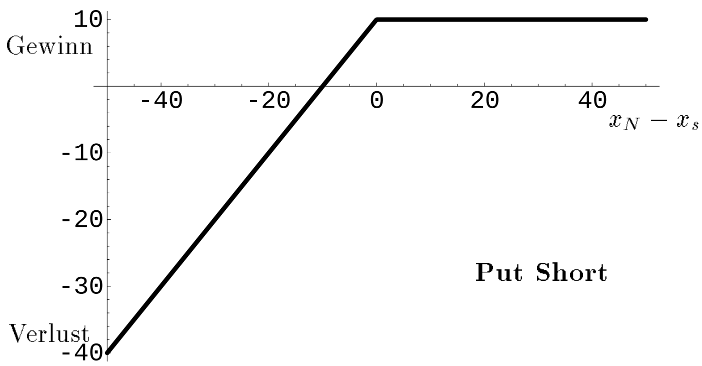

Abbildung 7: Gewinn/Verlust zum Zeitpunkt T_N in Abhängigkeit von der Differenz $x_N - x_s$ for den Schreiber (Stillhalter, Short–Position) einer Put–Option mit Berücksichtigung der Optionsprämie.

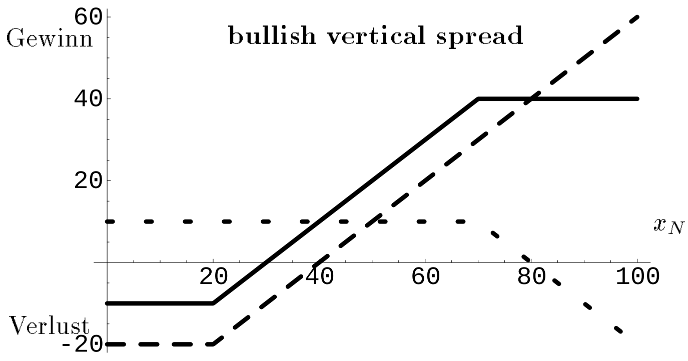

Abbildung 8: Schematische Darstellung eines “bullish vertical spread”. Gewinn/Verlust zum Zeitpunkt T_N in Abhängigkeit von dem Preis x_N bei Kombination eines Calls in der Long–Position mit Basispreis $x_s^{(c,l)} = 20$ und eines Calls in der Short–Position mit Basispreis $x_s^{(c,s)} = 70$.

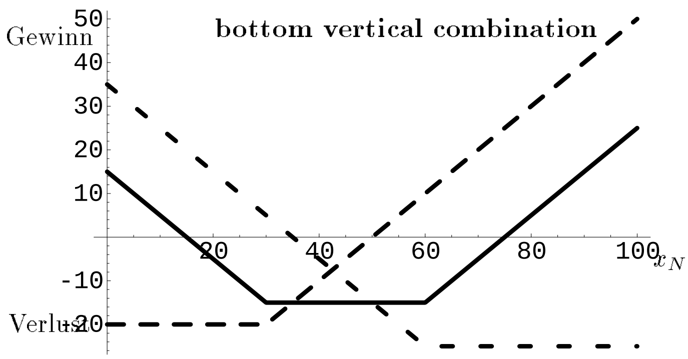

Abbildung 9: Schematische Darstellung einer “bottom vertical combination”. Gewinn/Verlust zum Zeitpunkt T_N in Abhängigkeit von dem Preis x_N bei Kombination eines Calls in der Long–Position mit Basispreis $x_s^{(c,l)} = 30$ und eines Puts in der Long–Position mit Basispreis $x_s^{(p,l)} = 60$.

5 Der "faire" Preis einer Option

5.1 Erwartungswertprinzip und "No–Arbitrage"–Prinzip

Ist ein Handel mit dem Underlying eines Termingeschäftes nicht möglich, so ergibt sich aus einem Anfangsvermögen W_0 zur Zeit t_0 für ein Termingeschäft mit der Vermögenswirkung W_T zur Zeit t_N ein Gesamtvermögen $W(t_N) = W_N$ zur Zeit t_N von

$$W_N = \underbrace{W_0(t_N)}_{\substack{\text{Aufgezinstes}\\ \text{Anfangsvermögen}}} + \underbrace{W_T(t_N)}_{\substack{\text{Gewinn/Verlust aus}\\ \text{Termingeschäft}}} \quad . \tag{73}$$

Für ein Forward hatten wir beispielsweise gesehen, daß für den Halter der Short–Position

$$W_T(t_N) = F - x_N, \tag{74}$$

wobei $F = F(t_N)$ den Kaufpreis representiert zu dem der Halter der Short–Position sich zur Zeit t_0 verpflichtet hat das Underlying zur Zeit t_N zu kaufen. Die Variable x_N bezeichnet den tatsächlichen Preis des Underlyings der sich zur Zeit t_N ergeben hat. Nehmen wir für risikolose Anleihen eine Zinsrate an von r für die Zeit $\tau = T/N$, so ergibt sich nach N Zeitschritten

$$W_0(t_N) = W_0(t_0)(1+\rho)^N, \tag{75}$$

mit $\rho = r\tau$ bei konstantem $\tau = \Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. Eine naheliegende Bedingung an einen fairen Preis ist die Forderung, daß keine Partei durch das Termingeschäft bevorzugt oder benachteiligt werden soll. Dies bedeuted das das Vermögen W_N zur zeit T_N nicht durch Abschluß des Geschäftes beinflußt werden darf, also

$$0 = \Delta_\rho W_N = W_N - (1+\rho)^N W_0, \tag{76}$$

wobei $(1+\rho)^N W_0$ dasjenige Vermögen darstellt, was sich ohne Termingeschäft zur Zeit T_N ergäben hätte. Für den (unrealistischen) Fall eines Forwards auf ein Underlying mit deterministischer Zeitentwicklung ergäbe sich beispielsweise das triviale Resultat,

$$W_N = W_0(1+\rho)^N \Rightarrow F(t_N) = x_N. \tag{77}$$

Typischerweise ist x_N jedoch eine Zufallsgröße. Dann führt die Forderung, daß keine Partei im Mittel bevorzugt oder benachteiligt werden soll, zu,

$$0 =< \Delta_\rho W >=< W_N > -W_0(1+\rho)^N. \tag{78}$$

Im Falle eines Forwards folgt also

$$< W_N >= W_0(1+\rho)^N \Rightarrow F(t_N) =< x_N > . \tag{79}$$

Diese Methode einen Preis für ein Termingeschäft zu berechnen nennt sich deshalb **Erwartungswertprinzip** (Bachelier).

Sobald das Underlying aber handelbar ist, kann sich die Situation wesentlich verändern. Beschränken wir uns auf den Handel mit dem Underlying des betrachteten Termingeschäftes, so können wir eine Handelstrategie kennzeichnen durch die Anzahl ϕ_k der zur Zeit t_k gehaltenen Underlyinganteile zum momentanen Preis von x_k. Bezieht man den Gewinn bzw. Verlust aus dem Handel mit dem Underlying in die Vermögensbilanz mit ein, so verallgemeinert sich Gl. (73) zu,

$$W_N = \underbrace{W_0(t_N)}_{\substack{\text{Aufgezinstes}\\ \text{Anfangsvermögen}}} + \underbrace{W_\phi(t_N)}_{\substack{\text{Gewinn/Verlust}\\ \text{aus Handel}}} + \underbrace{W_T(t_N)}_{\substack{\text{Gewinn/Verlust aus}\\ \text{Termingeschäft}}} . \tag{80}$$

Den Gewinn bzw. Verlust aus dem Handel mit dem Underlying haben wir bereits im Kapitel über unbedingte Termingeschäfte berechnet,

$$W_\phi(t_N) = (1+\rho)^N \left(\sum_{k=0}^{N-1} \phi_k[\widetilde{x}_{k+1} - \widetilde{x}_k] \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k[x_{k+1} - (1+\rho)x_k](1+\rho)^{N-k-1}, \tag{81}$$

bezogen auf die Zeit t_N und mit diskontierten (auf t_0 abgezinsten) $\widetilde{x}_k = x_k(1+\rho)^{-k}$. Verschiedene Handelstrategien $\phi = \{\phi_k | 0 \le k \le N-1\}$ führen jetzt im allgemeinen zu einer unterschiedlichen Verteilung $p(W_N)$. Die Veränderung des Vermögens $\Delta_\rho W_N$ im Zeitraum T enthält zwei Zufallsanteile, nämlich

$$\Delta_\rho W_\phi = W_\phi(t_N) - W_\phi(t_0)(1+\rho)^N, \tag{82}$$

$$\Delta_\rho W_T = W_T(t_N) - W_T(t_0)(1+\rho)^N. \tag{83}$$

Zur Bestimmung eines Preises für ein Termingeschäft müssen wir uns also als erstes auf eine (Hedging–)Strategie ϕ festlegen. Ähnlich zu unserem Vorgehen bei Portfolio–Optimierung besteht nun eine Möglichkeit darin auf das **Prinzip der minimalen Varianz** zurückzugreifen. In diesem Falle verstehen wir als optimale Strategie dasjenige ϕ^*, welches die Varianz der Vermögensänderung minimiert,

$$\phi^* = \mathrm{argmin}_\phi < [\Delta_\rho W_N(\phi)]^2 > . \tag{84}$$

Anstatt den Erwartungswert wie bei der Portfolio–Optimierung zu fixieren, können wir ihn nun zur Bestimmung eines fairen Preis verwenden indem wir fordern,

$$0 =< \Delta_\rho W_N(\phi^*) >=< W_N(\phi^*) > -W_0(1+\rho)^N, \tag{85}$$

also

$$< \Delta_\rho W_{\phi^*} > + < \Delta_\rho W_T > . \tag{86}$$

Üblicherweise nehmen wir an, daß die Akteure keine marktbeherschende Stellung einnehmen, d.h., daß die Handelstrategie ϕ den Preis x_N nicht beeinflußt, also $\Delta_\rho W_T \neq \Delta_\rho W_T(\phi)$.

Im Falle eines Forward fanden wir

$$W_\phi = -W_T = F - x_N = F - x_0(1+\rho)^N - W_{\phi=1}, \tag{87}$$

(wobei $F = F(t_N)$, $W_\phi = W_\phi(t_N)$, $W_T = W_T(t_N)$ und $W_\phi(t_0) = 0$, $W_T(t_0) = 0$), also

$$W_\phi = x_N - F = W_{\phi=1} + x_0(1+\rho)^N - F. \tag{88}$$

Damit ist also bei der Wahl $\phi_k^* = 1$ die Varianz $< [\Delta_\rho W_N(\phi)]^2 > = 0$, so daß

$$F = x_0(1+\rho)^N. \tag{89}$$

Wir haben bereits diskutiert, daß für den Fall der Handelbarkeit des Underlyings, sich dieser Preis einstellen muß da eine Abweichung davon risikolose Gewinne (Arbitrage) möglich macht. In solch einem risikolosen Fall spricht man vom **"No–Arbitrage"–Prinzip** zur Preisbestimmung eines Termingeschäftes.

Im Falle von Optionen ist eine Handelsstrategie, die eine Streuungsfreie Vermögensbilanz zur Zeit t_N liefert nur unter idealisierten Bedingungen möglich, auf denen z.B. der klassische Black–Scholes–Ansatz beruht.

Im allgemeinen Fall, wenn keine Hedging–Strategie ϕ^* mit verschwindender Varianz $< [\Delta_\rho W_N(\phi^*)]^2 > = 0$ möglich ist, wird der Verkäufer eine Risikoprämie C_{Risiko} zu dem aus der Forderung $< \Delta W_N >= 0$ bestimmten Preis $C_{\text{Erwartungswert}}(\phi^*)$ addieren. Als Gesamtpreis einer Option C_{Option} ergibt sich dann,

$$C_{\text{Option}} = C_{\text{Erwartungswert}}(\phi^*) + C_{\text{Risiko}}(\phi^*). \tag{90}$$

5.2 Vermögensbilanz bei Optionsgeschäften

Betrachten wir nun die Vermögensbilanz des Schreibers (Long–Position) einer europäischen Call–Option mit Ausübungspreis (strike price) x_s,

$$W_N = (W_0 + C)(1+\rho)^N - \max(x_N - x_s, 0) + (1+\rho)^N \sum_{m=0}^{N-1} \phi_m \Delta\widetilde{x}_m, \tag{91}$$

wobei wir berücksichtigt haben, daß die Optionsprämie bereits bei Abschluß, also zur Zeit t_0 fällig wird.

Aus der Bedingung für einen fairen Preis

$$0 =< \Delta_\rho W_N >=< W_N > -W_0(1+\rho)^N, \tag{92}$$

folgt für den Optionspreis (dem in dem realistischen Fall, in dem keine risikofreie Hedging–Strategie möglich ist, noch eine Risikozulage zugeschlagen werden muß),

$$C = (1+\rho)^{-N} < \max(x_N - x_s, 0) > - < \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k \Delta\widetilde{x}_k > . \tag{93}$$

Hierbei ist

$$\Delta\tilde{x}_k = \tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k = (1+\rho)^{-(k+1)} \Delta_\rho x \tag{94}$$

mit

$$\Delta_\rho x_k = x_{k+1} - (1+\rho)x_k = \Delta x_k - \rho x_k \tag{95}$$

und $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Analog zu den relativen Änderungen

$$\eta_k = \frac{\Delta x_k}{x_k}, \tag{96}$$

definieren wir nun

$$\tilde{\eta}_k = \frac{\Delta \tilde{x}_k}{(1+\rho)\tilde{x}_k} = \frac{\Delta_\rho x_k}{x_k}, \tag{97}$$

welches zu η_k in der Beziehung steht $\eta_k = \tilde{\eta}_k + \rho$.

Wir nehmen nun an, daß die $\Delta_\rho x_k$ bzw. $\tilde{\eta}_k = \frac{\Delta_\rho x_k}{x_k}$ unabhängig normalverteilt sind. In beiden Fälen können wir die Kurse x_n durch die unabhängigen Zufallsgrößen $\Delta_\rho x_k$ bzw. $\tilde{\eta}_k$ ausdrcken. Für $\Delta_\rho x_k$ erhalten wir beispielsweise durch Iteration, analog zu $x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k \left[= x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_\rho x_k + \rho x_k)\right]$,

$$\begin{aligned}
x_n &= x_{n-1} + \Delta x_{n-1} = x_{n-1} + \Delta_\rho x_{n-1} + \rho x_{n-1} \\
&= x_{n-1}(1+\rho) + \Delta_\rho x_{n-1} \\
&= x_{n-2}(1+\rho)^2 + \Delta_\rho x_{n-2}(1+\rho) + \Delta_\rho x_{n-1} \\
&\quad \ldots \\
&= x_0(1+\rho)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_\rho x_k (1+\rho)^{N-k-1}.
\end{aligned} \tag{98}$$

Dies bedeutet, daß x_n nur von den $\Delta_\rho x_k$ mit $k < n$ abhängt. Dasselbe gilt daher für die Zahl der gehaltenen Aktien $\phi_n(x_n)$, die nur vom bekannten aktuellen Kurs x_n, aber nicht von der noch unbekannten zukünftigen Kursänderung $\Delta_\rho x_k$ abhängt. Die Unabhängigkeit der ϕ_n von $\Delta_\rho x_n$, bedeutet

$$< \phi_n \Delta_\rho x_n > = < \phi_n > < \Delta_\rho x_n > . \tag{99}$$

In der Tat, folgt diese Beziehung direkt aus Gleichung (98) und der Unabhängigkeit der $\Delta_\rho x_k$, d.h. einer faktorisierenden gemeinsamen Wahrscheinlichkeit $p(\Delta_\rho x_0, \cdots, \Delta_\rho x_n)$ $= \prod_{k=0}^{n} p(\Delta_\rho x_k)$,

$$\begin{aligned}
< \phi_n \Delta_\rho x_n > &= \int \left(\prod_{k=0}^{n} d(\Delta_\rho x_k) p(\Delta_\rho x_k) \right) \underbrace{\phi_n(x_n)}_{\substack{\text{von } \Delta_\rho x_n \\ \text{unabhängig}}} \Delta_\rho x_n \\
&= \underbrace{\left[\int \left(\prod_{k=0}^{n-1} d(\Delta_\rho x_k) p(\Delta_\rho x_k) \right) \phi_n(x_n) \right]}_{< \phi_n >} \underbrace{\left[\int d(\Delta_\rho x_n) p(\delta_\rho x_n) \Delta_\rho x_n \right]}_{< \Delta_\rho x_n >} \\
&= < \phi_n > < \Delta_\rho x_n > .
\end{aligned} \tag{100}$$

Ähnlich wie (98) läßt sich x_n auch durch die bis zum Zeitpunkt t_n bereits aufgetretenen η_k bzw. $\tilde{\eta}_k$ ausdrücken

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k x_k = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{\eta}_k + \rho)\, x_k. \tag{101}$$

Expliziter erhalten wir durch Iteration,

$$\begin{aligned}
x_n &= x_{n-1} + \eta_{n-1} x_{n-1} = x_{n-1}(1+\eta_{n-1}) \\
&= x_{n-2}(1+\eta_{n-2})(1+\eta_{n-1}) \\
&\dots \\
&= x_l(1+\eta_l)(1+\eta_{l+1})\cdots(1+\eta_{n-1}) \\
&= x_l \prod_{k=l}^{n-1}(1+\eta_k) = x_0 \prod_{k=0}^{n-1}(1+\eta_k),
\end{aligned} \tag{102}$$

für $0 \le l \le k$, und ebenso für die $\tilde{\eta}_k$,

$$\begin{aligned}
x_n &= x_{n-1} + \tilde{\eta}_{n-1} x_{n-1} + \rho x_{n-1} = x_{n-1}(1+\rho+\tilde{\eta}_{n-1}) \\
&= x_{n-2}(1+\rho+\tilde{\eta}_{n-2})(1+\rho+\tilde{\eta}_{n-1}) \\
&\dots \\
&= x_l(1+\rho+\tilde{\eta}_l)(1+\rho+\tilde{\eta}_{l+1})\cdots(1+\rho+\tilde{\eta}_{n-1}) \\
&= x_l \prod_{k=l}^{n-1}(1+\rho+\tilde{\eta}_k) = x_0 \prod_{k=0}^{n-1}(1+\rho+\tilde{\eta}_k).
\end{aligned} \tag{103}$$

Für den Fall, daß die $\tilde{\eta}_k$ als unabhängige Zufallsvariablen aufgefaßt werden gilt daher,

$$< \phi_n \Delta_\rho x_n > = < \phi_n x_n \tilde{\eta}_n > = < \phi_n x_n >< \tilde{\eta}_n > . \tag{104}$$

Unter der Annahme $< \Delta_\rho x_k > = m_1 = m\tau = 0$ bei unabhängigen Zufallsvariablen $\Delta_\rho x_k$, bzw. $< \tilde{\eta}_k > = m_1 = m\tau = 0$ bei unabhängigen $\tilde{\eta}_k$, fällt also der ganze "Tradingterm" $< \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k \Delta \tilde{x}_k >$ aus Gl. (93) heraus.

5.3 Abschätzung des Einflusses von m

Da wir im Folgenden spezeill den Fall $m = 0$ näher diskutieren wollen, schätzen wir den Einfluß von m auf den Optionspreis ab. Wir berechnen dazu den Erwartungswert

$$< \max(x_N - x_s, 0) >= \int_{x_s}^{\infty} dx \, \frac{x - x_s}{\sqrt{2\pi DT}} e^{-\frac{(x-x_0-mT)^2}{2DT}}, \tag{105}$$

für eine "At the money"–Option, d.h., für $x_0 = x_s$. Da eine normale und log–normale Verteilung in ihrem zentralen Bereich gut übereinstimmen, wählen wir eine Gaußverteilung für die Differenz $x_N - x_0$ mit Mittelwert mT und Varianz $DT = \sigma^2 x_0^2 T$. (Unter der Annahme $\eta_k = \Delta x_k / x_k \approx \Delta x_k / x_0$ gilt $\sigma^2_{\Delta x_k} = x_0^2 \sigma^2_{\eta_k}$). Wir erhalten für $x_0 = x_s$,

$$\begin{aligned}
< \max(x_N - x_s, 0) > &= \int_{x_s}^{\infty} dx \, \frac{x - x_s}{\sqrt{2\pi DT}} e^{-\frac{(x-x_s-mT)^2}{2DT}} \\
\left[\text{Substitution } z = \tfrac{x-x_s-mT}{\sqrt{DT}}\right] &= \sqrt{\frac{DT}{2\pi}} \int_{-\frac{mT}{\sqrt{DT}}}^{\infty} dz \, z \, e^{-\frac{z^2}{2}} + \frac{mT}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{mT}{\sqrt{DT}}}^{\infty} dz \, e^{-\frac{z^2}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{[Integrale (107) und (108)]} \quad &= \sqrt{\frac{DT}{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{mT}{\sqrt{DT}}\right)^2}{2}} + \frac{mT}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(-\frac{mT}{\sqrt{2DT}}\right)\right] \\
\text{[Entwicklung (110) und (111)]} \quad &\approx \sqrt{\frac{DT}{2\pi}} + \frac{mT}{2}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{mT}{\sqrt{DT}}\right] \\
\text{[Annahme (112)]} \quad &\approx \sqrt{\frac{DT}{2\pi}} + \frac{mT}{2}. \qquad (106)
\end{aligned}
$$

mit $y = x - x_0 - mT$, $z = \frac{y}{\sqrt{DT}}$. Hierbei haben wir benutzt, daß

$$
\int_a^b dz\, z\, e^{-\frac{z^2}{2}} = -e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_a^b = -e^{-\frac{a^2}{2}} - e^{-\frac{b^2}{2}}, \qquad (107)
$$

sowie

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad (108)
$$

Schließlich haben wir bis zur ersten Ordnung in mT entwickelt gemäß

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \cdots, \qquad (109) \\
e^{-\frac{x^2}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x^2)^n \approx 1, \qquad (110) \\
\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \approx x, \qquad (111)
\end{aligned}
$$

und angenommen, daß

$$
\frac{mT}{\sqrt{DT}} << 1, \qquad (112)
$$

ist (also $mT << \sqrt{DT}$).

Bei $T = 100$ Tagen, einer Tagesvolatilität von $\sigma^2 = 1\%$, einer durchschnittlichen jährlichen Rendite von $m = 5\%$ und einem Underlyingkurs von $x_0 = 100$ Punkten, erhalten wir

$$
\sqrt{\frac{DT}{2\pi}} \approx 4 \text{ Punkte}, \quad \frac{mT}{2} \approx 0.67 \text{ Punkte}. \qquad (113)
$$

Resultate für $m = 0$ können also eine sinnvolle erste Näherung sein. Insbesondere ist die klassische Black–Scholes–Lösung m–unabhängig.

5.4 Der Fall $m = 0$

Als nächstes nehmen wir an, daß über die risiokofreie Verzinsung mit $\rho = rT$ kein weiterer systematischer Drift im Aktienkurs zu finden ist. Wir haben gesehen, daß bei $m\tau = < \Delta_\rho x_k > = 0$, bzw. $m\tau = < \tilde{\eta}_k > = 0$, der "Tradingterm" $< \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k \Delta \tilde{x}_k >$ in Gl. (93) nicht beiträgt. Es verbleibt also,

$$
\begin{aligned}
C &= (1+\rho)^{-N} < \max(x_N - x_s, 0) > \\
&= (1+\rho)^{-N} \int_{x_s}^{\infty} dx_n \, (x_N - x_s, 0) p(x_N). \qquad (114)
\end{aligned}
$$

Wir diskutieren den Fall einer log–normalen Verteilung der Aktienkurse, also von normalverteilten $\tilde{\eta}_k$, mit $< \tilde{\eta}_k > = 0$. Hierzu ist es zweckmäßig zu logarithmischen Kursen überzugehen. Definieren wir

$$
y_N = \log x_N - \log x_0 (1+\rho)^N = \log \frac{x}{x_0(1+\rho)^N}, \qquad (115)
$$

d.h. $x_N = x_0(1+\rho)^N e^y$, und

$$
y_s = \log x_s - \log x_0 (1+\rho)^N = \log \frac{x_s}{x_0(1+\rho)^N}, \qquad (116)
$$

d.h. $x_s = x_0(1+\rho)^N e^y_s$, so folgt aus (114) für $m = 0$,

$$
C = x_0 \int_{y_s}^{\infty} dy_N \, (e^{y_N} - e^{y_s}) \, p(y_N). \qquad (117)
$$

Definieren wir weiterhin, analog zu (115) und (116),

$$
y_m = \log x_m - \log x_0 (1+\rho)^m = \log \frac{x_m}{x_0(1+\rho)^m}, \qquad (118)
$$

so folgt für die Differenz $\Delta y_m = y_{m+1} - y_m$,

$$
\begin{aligned}
y_{m+1} - y_m &= \log \frac{x_{m+1}}{x_0(1+\rho)^{m+1}} - \log \frac{x_m}{x_0(1+\rho)^m} \\
&= \log \frac{x_{m+1}}{x_m(1+\rho)} \\
&= \log \frac{x_m(1+\rho) + \Delta_\rho x_m}{x_m(1+\rho)} \\
&= \log \left(1 + \frac{\tilde{\eta}_m}{1+\rho}\right) \\
&\approx \frac{\tilde{\eta}_m}{1+\rho} - \frac{\tilde{\eta}_m^2}{2(1+\rho)^2} \\
&\approx \frac{\tilde{\eta}_m}{1+\rho} - \frac{\tilde{\eta}_m^2}{2}, \qquad (119)
\end{aligned}
$$

mit $\tilde{\eta}_m = \frac{\Delta_\rho x_m}{x_m}$ und unter Benutzung von $\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ bei Mitnahme des Terms 2ter Ordnung in $\tilde{\eta}$ und Weglassen von Termen höherer Ordnung in $\tilde{\eta}$ und ρ.

Wir sind interessiert an der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Variablen y_N zum Ablaufzeitpunkt t_N der Option. Die Variable y_N läßt sich als Summe über Inkremente Δy_k schreiben,

$$y_N = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\tilde{\eta}_k}{1+\rho} - \frac{\tilde{\eta}_k^2}{2} \right), \tag{120}$$

da $y_0 = 0$. Solch eine "verallgemeinerte" Summenvariable entspricht einer "verallgemeinerte" Faltung und läßt sich durch eine "verallgemeinerte" Fouriertransformation berechnen. Ganz analog zur Berechnung der Verteilung einer einfachen Summenvariable finden wir für unabhängig, identisch verteilte $\tilde{\eta}_n$, d.h. $p(\tilde{\eta}_0, \cdots, \tilde{\eta}_{N-1}) = \prod_{k=0}^{N-1} p(\tilde{\eta}_k)$,

$$\begin{aligned}
p(y_N) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{N-1} d\tilde{\eta}_k p(\tilde{\eta}_k) \right) \delta \left[y_N - \sum_{k=0}^{N-1} \Delta y_k(\tilde{\eta}_k) \right] \\
\text{[mit (122)]} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} \left(\prod_{k=0}^{N-1} d\tilde{\eta}_k p(\tilde{\eta}_k) \right) e^{-iz\left[y_N - \sum_{k=0}^{N-1} \Delta y_k(\tilde{\eta}_k)\right]} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{-izy_N} \underbrace{\left(\prod_{k=0}^{N-1} d\tilde{\eta}_k p(\tilde{\eta}_k) e^{iz\Delta y_k(\tilde{\eta}_k)} \right)}_{\tilde{p}(z)^N \text{[siehe Def. (123)]}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{-izy_N}\, \tilde{p}(z)^N.
\end{aligned} \tag{121}$$

Hierbei haben wir die Fourierdarstellung der δ–Funktion benutzt

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-izx}, \tag{122}$$

und eine verallgemeinerte Fouriertransformation definiert

$$\tilde{p}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta}_k\, e^{iz\Delta y_k(\tilde{\eta}_k)} p(\tilde{\eta}_k) \approx \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta}_k\, e^{iz\left[\frac{\tilde{\eta}_k}{1+\rho} - \frac{\tilde{\eta}_k^2}{2}\right]} p(\tilde{\eta}_k), \tag{123}$$

unter Benutzung von (119). Das bedeutet, die Verteilung einer verallgemeinerten Summe von unabhängigen Zufallsvariablen wird berechnet durch multiplizieren der verallgemeinerten Fouriertransformierten und anschließender (normaler) Fourierrücktransformation.

Die Berechnungsmethode (121) können wir nun verwenden für den Fall normalverteilter $\tilde{\eta}_k$,

$$p(\tilde{\eta}_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\tau} e^{-\frac{\tilde{\eta}_k^2}{2\sigma_\tau^2}}, \tag{124}$$

wobei $\sigma_\tau = \sigma\sqrt{\tau}$. Als verallgemeinerte Fouriertransformierte finden wir

$$\tilde{p}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta}_k\, e^{iz\left[\frac{\tilde{\eta}_k}{1+\rho} - \frac{\tilde{\eta}_k^2}{2}\right]} p(\tilde{\eta}_k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\tau^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta}_k \, e^{iz\left[\frac{\tilde{\eta}_k}{1+\rho} - \frac{\tilde{\eta}_k^2}{2}\right]} e^{-\frac{\tilde{\eta}_k^2}{2\sigma_\tau^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\tau^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta}_k \, e^{-\frac{1+iz\sigma_\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\left[\tilde{\eta}^2 + 2\tilde{\eta}\frac{iz\sigma_\tau^2}{(1+\rho)(1+iz\sigma_\tau^2)}\right]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\tau^2}} \, e^{-\frac{z^2\sigma_\tau^2}{2(1+\rho)^2(1+iz\sigma_\tau^2)}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta}_k \, e^{-\frac{1+iz\sigma_\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\left[\tilde{\eta} + \frac{iz\sigma_\tau^2}{(1+\rho)(1+iz\sigma_\tau^2)}\right]^2}}_{\sqrt{\frac{2\pi\sigma_\tau^2}{1+iz\sigma_\tau^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+iz\sigma_\tau^2}} e^{-\frac{z^2\sigma_\tau^2}{2(1+\rho)^2(1+iz\sigma_\tau^2)}} , \qquad (125)
\end{aligned}
$$

wobei wir wieder den Exponenten quadratisch ergänzt und das verbleibende Gauß–Integral ausgeführt haben. Um die Verteilung für y_N zu erhalten müssen wir nun $\tilde{p}(z)^N$ invers fouriertransformieren,

$$
\begin{aligned}
p(y_N) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \, e^{-izy_N} \tilde{p}(z)^N \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \, e^{-izy_N} \frac{1}{\sqrt{1+iz\sigma_\tau^2}^N} e^{-\frac{z^2 N\sigma_\tau^2}{2(1+\rho)^2(1+iz\sigma_\tau^2)}} . \qquad (126)
\end{aligned}
$$

Dies ist ein unangenehmes Integral, insbesondere ist es kein Gauß–Integral in z. Es genügt uns jedoch den Fall $\tau \to 0$ zu betrachten, also $N \to \infty$ und $\sigma_\tau \to 0$, wobei aber $N\sigma_\tau^2 = T\sigma^2$ (mit $T = t_N - t_0 = N\tau$) endlich bleiben soll. Daraus haben wir $1 + iz\sigma_\tau^2 \to 1$ für den Term im Exponenten, und für den Vorfaktor erhalten wir

$$
\frac{1}{\sqrt{1+iz\sigma_\tau^2}^N} = e^{-\frac{N}{2}\log(1+iz\sigma_\tau^2)} \to e^{-\frac{izN\sigma_\tau^2}{2}} , \qquad (127)
$$

nach Entwickeln der Logarithmusfunktion, also $\log(1+iz\sigma_\tau^2) \approx iz\sigma_\tau^2$. Damit wird die inverse Fouriertransformation (126) durchführbar und wir erhalten durch quadratische Ergänzung

$$
\begin{aligned}
p(y_N) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \, e^{-iz\left(y_N + \frac{N\sigma_\tau^2}{2}\right)} e^{-\frac{z^2 N\sigma_\tau^2}{2(1+\rho)^2}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \, e^{-\frac{N\sigma_\tau^2}{2(1+\rho)^2}\left(z^2 + 2zi\frac{(y_N + \frac{N\sigma_\tau^2}{2})(1+\rho)^2}{N\sigma_\tau^2}\right)}
\end{aligned}
$$

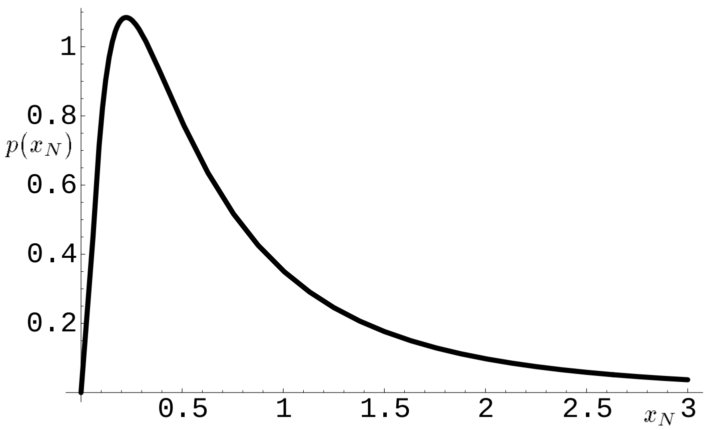

Abbildung 10: Beispiel einer Wahrscheinlichkeit $p(x_N)$ für den Preis des Underlyings bei Fälligkeit, die sich aus $p(y_N)$ aus Gl. (129) ergibt ($N = 1000$, $\rho = 0$, $\sigma_\tau = 1/\sqrt{N}$).

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\left(y_N+\frac{N\sigma_\tau^2}{2}\right)^2}{2N\frac{\sigma_\tau^2}{(1+\rho)^2}}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz\; e^{-\frac{N\sigma_\tau^2}{2(1+\rho)^2}\left(z-\frac{(y_N+\frac{N\sigma_\tau^2}{2})(1+\rho)^2}{N\sigma_\tau^2}\right)^2}}_{\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\frac{1+\rho}{\sigma_\tau}}$$

$$= \frac{1+\rho}{\sigma_\tau\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{\left(y_N+\frac{N\sigma_\tau^2}{2}\right)^2}{2N\frac{\sigma_\tau^2}{(1+\rho)^2}}} . \tag{128}$$

Wenn wir auch noch benutzen, daß $\rho = r\tau \to 0$, so können wir schreiben

$$p(y_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma_\tau^2}} e^{-\frac{\left(y+\frac{N\sigma_\tau^2}{2}\right)^2}{2N\sigma_\tau^2}} . \tag{129}$$

Dies ist also eine Gaußverteilung mit Mittelwert $\mu_{y_N} = -\frac{N\sigma_\tau^2}{2}$ und Varianz $\sigma_{y_N} = N\sigma_\tau^2 = T\sigma^2$. Wir wollen noch bemerken, daß diese Formel bei Verwendung des Ito–Kalküls (siehe nächste Stunde) sehr viel schneller erhalten werden kann. Ein Beispiel einer aus Gl. (129) resultierenden Verteilung $p(x_N)$ ist in Abb. 10 gezeigt.

Nun sind wir in der Lage den Optionspreis (114), d.h. das Integral in (117), zu berechnen. Setzen wir also (129) für $p(y_N)$ in (117) ein, so erhalten wir mit Hilfe quadratischer Ergänzung, den Substitutionen $z = \frac{y \mp \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$ und unter

Verwendung von

$$(1+\rho)^{-N} = e^{-N\ln(1+\rho)} \to e^{-N\rho} = e^{-Nr\tau} = e^{-rT}, \tag{130}$$

also

$$y_s \to \log\frac{x_s}{x_0} - rT, \tag{131}$$

und

$$e^{y_s} \to \frac{x_s}{x_0}e^{-rT}, \tag{132}$$

die *Black–Scholes–Formel*,

$$\begin{aligned}
C(x_0,x_s,T,\sigma,r) &= x_0\int_{y_s}^{\infty} dy\,\frac{e^y - e^{y_s}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}e^{-\frac{\left(y+\frac{\sigma^2 T}{2}\right)^2}{2\sigma^2 T}} \\
&= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}\left(\int_{y_s}^{\infty} dy\, e^{y-\frac{\left(y+\frac{\sigma^2 T}{2}\right)^2}{2\sigma^2 T}} - e^{y_s}\int_{y_s}^{\infty} dy\, e^{-\frac{\left(y+\frac{\sigma^2 T}{2}\right)^2}{2\sigma^2 T}}\right) \\
&= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}\left(\int_{y_s}^{\infty} dy\, e^{-\frac{\left(y-\frac{\sigma^2 T}{2}\right)^2}{2\sigma^2 T}} - e^{y_s}\int_{y_s}^{\infty} dy\, e^{-\frac{\left(y+\frac{\sigma^2 T}{2}\right)^2}{2\sigma^2 T}}\right) \\
&= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\frac{y_s-\frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} - e^{y_s}\int_{\frac{y_s+\frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}}\right) \\
&= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\frac{y_-}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} - \frac{x_s}{x_0}e^{-rT}\int_{\frac{y_+}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}}\right),
\end{aligned} \tag{133}$$

wobei

$$y_- = \log\frac{x_s}{x_0} - rT - \frac{\sigma^2 T}{2}, \tag{134}$$

$$y_+ = \log\frac{x_s}{x_0} - rT + \frac{\sigma^2 T}{2}. \tag{135}$$

Mit Hilfe der Funktionen G, Φ oder erf, definiert durch (siehe auch Abb.11),

$$G(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_y^{\infty} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} = \Phi(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-y} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}(\frac{y}{\sqrt{2}})\right], \tag{136}$$

läßt sich die Black–Scholes-Formel auch schreiben als

$$\begin{aligned}
C(x_0,x_s,T,\sigma,r) &= x_0 G\left(\frac{\log\frac{x_s}{x_0} - rT - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right) - x_s e^{-rT} G\left(\frac{\log\frac{x_s}{x_0} - rT + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= x_0\Phi\left(\frac{\log\frac{x_0}{x_s} + rT + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right) - x_s e^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\frac{x_0}{x_s} + rT - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x_0 G\left(\frac{y_-}{\sigma\sqrt{T}}\right) - x_s e^{-rT} G\left(\frac{y_+}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= x_0 \Phi\left(\frac{-y_-}{\sigma\sqrt{T}}\right) - x_s e^{-rT} \Phi\left(\frac{-y_+}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= \frac{x_0 - x_s e^{-rT}}{2} - \frac{x_0}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{y_-}{\sigma\sqrt{2T}}\right) + \frac{x_s e^{-rT}}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{y_+}{\sigma\sqrt{2T}}\right). \quad (137)
\end{aligned}
$$

Die Abhängigkeit des Preises einer Call–Option von x_0, T, und r ist in den Abbildungen 12 – 14 dargestellt. Eine simultane Skalierung von σ^2 und r entspricht dabei einer entsprechenden inversen Änderung der Zeit T.

Für $T = 0$ wird $G(x)$ eine Stufenfunktion mit den Werten 1 für $x < 0$ und 0 für $x > 0$ sowie 0.5 für $x = 0$ (siehe Abb. 11),

$$
\lim_{\sigma\to 0} G_\sigma(x) = \lim_{\sigma\to 0} G(x/\sigma) = \lim_{\sigma\to 0} \Phi(-x/\sigma) = \theta(-x), \quad (138)
$$

und es wird daher $C(T=0) = \max(x(T) - x_s, 0)$, wie es sein muß.

Im risikolosen Fall $\sigma = 0$, ergibt sich,

$$
C = \max(x_0 - x_s e^{-rT}, 0). \quad (139)
$$

In der Tat, wenn der Preis eines nicht risikobehafteten Gutes jetzt x_0 beträgt, wird er (bei kontinuierlicher Verzinsung) eine Zeit T später $x_0 e^{rT}$ betragen. Eine Call–Option zum Basispreis x_s wird also $\max(x_0 e^{rT} - x_s, 0)$ einbringen. Abgezinst auf $T = 0$ ist dies gerade $\max(x_0 - x_s e^{-rT}, 0)$, also Gl. (139).

5.5 Put–Call Parität

Hat man den Preis einer Call–Option berechnet findet man den Preis einer Put–Option mit demselben Basispreis x_s und demselben Fälligkeitstermin anhand folgender Überlegung. Ein Portfolio, bestehend aus 1. einem Underlying (Long–Position), 2. einer gekauften Put–Option (Long–Position) und 3. einer verkauften Call–Option (Short–Position) hat am Fälligkeitstag genau den (risikofreien) Wert x_s. In der Tat,

$$
W_N = x_N + \max(x_s - x_N, 0) - \max(x_N - x_s, 0) = x_s, \quad (140)
$$

unabhängig von x_N. (Siehe Abb. 18.) Es muß also gelten

$$
x_N + C_{\mathrm{put}}(t_N) + C_{\mathrm{call}}(t_N) = x_s, \quad (141)
$$

oder das Underlying zue Zeit t_k gekauft und x_s entsprechend abgezinst

$$
C_{\mathrm{call}}(t_k) = x_k + C_{\mathrm{put}}(t_k) - x_s e^{-r(t_N - t_k)}. \quad (142)
$$

Die Abhängigkeit des Preises einer Put–Option vom aktuellen Underlyingkurs x_0, Zeit zur Fälligkeit $T = t_N - t_0$, und Zinsrate r ist in den Abbildungen 15 – 17 dargestellt. Man sieht, daß bei Put–Optionen Zins– und Volatilitätseffekt gegenläufig arbeiten. Bei Call–Optionen, dagegen, wirken beide Effekte

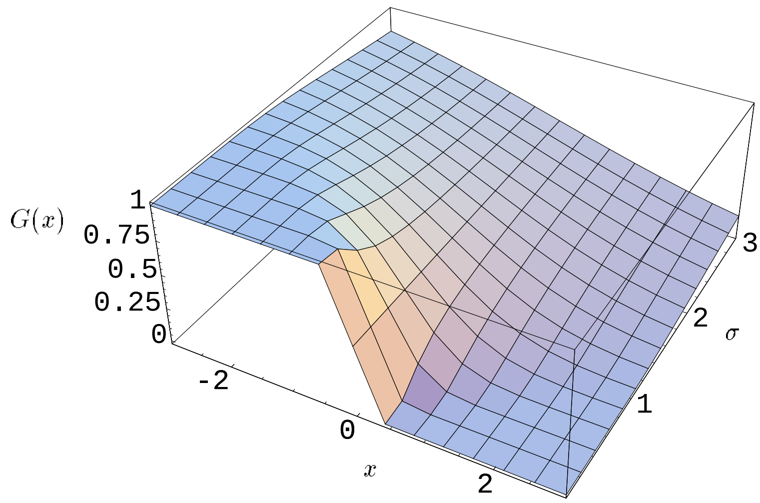

Abbildung 11: Die Funktion $G_\sigma(x) = G(x/\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_x^\infty e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right]$ in Abhängigkeit von x und σ.

gleichsinnig. Man überlegt sich leicht, daß die Tatsache, daß der Preis einer Put–Option unter der Geraden, die die Differenz $x_s - x$ darstellt, liegen kann, eine sofortige Einlösung der Option lohnend machen würde. Bei europäischen Optionen ist dies nicht möglich, Preise amerikanischer Put–Optionen aber dürfen aus diesem Grunde nicht unter der Differenz $x_s - x$ liegen. Bei Call–Optionen, deren Preis ja über $x - x_S$ liegt, ist eine frühzeitige Einlösung dagegen nicht sinnvoll. Eine Formelsammlung zur Bepreisung verschiedenster anderer Varianten von Optionen findet man beispielsweise in [14].

5.6 Die optimale Hedging–Strategie

5.6.1 Das Prinzip der minimalen Varianz

In Abschnitt 5.1 hatten das Prinzip der minimalen Varianz [Gl. (84)] vorgestellt um eine optimale Hedging–Strategie ϕ^* zu bestimmen,

$$\phi^* = \mathrm{argmin}_\phi < [\Delta_\rho W_N(\phi)]^2 > . \tag{143}$$

Für den Fall einer Call–Option ergibt sich,

$$\begin{aligned}(\Delta_\rho W_N)^2 \quad = \quad & c + \sum_{k=0}^{N-1}(1+\rho)^{2(N-k-1)} < (\phi_k)^2(\Delta_\rho x_k)^2 > \\ & -2\sum_{k=0}^{N-1}(1+\rho)^{N-k-1} < \phi_k\,\Delta_\rho x_k \max(x_N - x_s, 0) >, \end{aligned} \tag{144}$$

wobei c kollektiv diejenigen Terme bezeichnet, die unabhängig sind von ϕ.

Für den ersten ϕ_k–abhängigen Term in Gl. (144) erhalten wir unter der Annahme unabhängiger $\Delta_\rho x_k$,

$$\begin{aligned}
& < (\phi_k)^2 (\Delta_\rho x_k)^2 > \\
= & \int \left(\prod_{m=0}^{N-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) [\phi_k(x_k)]^2 \, [\Delta_\rho x_k]^2 \\
= & \underbrace{\left(\int \left(\prod_{m=0}^{k-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) [\phi_k(x_k)]^2 \right)}_{<\phi_k^2>} \underbrace{\left(\int d(\Delta_\rho x_k) p(\Delta_\rho x_k) \, [\Delta_\rho x_k]^2 \right)}_{<(\Delta_\rho x_k)^2>} \\
= & < (\phi_k)^2 >< (\Delta_\rho x_k)^2 >, \qquad (145)
\end{aligned}$$

da weder ϕ_k noch $\Delta_\rho x_k$ von $\Delta_\rho x_m$ mit $m > k$ abhängen und aufgrund der Normierung von Wahrscheinlichkeiten,

$$\int \left(\prod_{m=k}^{N-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) = \prod_{m=k}^{N-1} \int d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) = 1. \qquad (146)$$

Mit

$$p(x_k) = \int \left(\prod_{m=0}^{k-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) \delta \left(x_k - x_0 (1+\rho)^{N-k} - \sum_{m=0}^{k-1} \Delta_\rho x_m (1+\rho)^{N-k-1} \right), \qquad (147)$$

läßt sich auch schreiben,

$$< \phi_k^2 > = \int dx_k \, p(x_k) \, \phi_k^2. \qquad (148)$$

Für den zweiten ϕ_k–abhängigen Term in Gl. (144) ist es nützlich die Kursentwicklung von $x_0 \to x_N$ in die drei Abschnitte $x_0 \to x_k$, $x_k \to x_{k+1}$ und $x_{k+1} \to x_N$ zu zerlegen (Physiker mögen sich dabei an die Berechnung von Erwartungswerten mit Pfadintegralen erinnert fühlen),

$$\begin{aligned}
& < \phi_k \, \Delta_\rho x_k \, \max(x_N - x_s, 0) > \\
= & < \phi_k \, \Delta_\rho x_k \, \theta(x_N - x_s)(x_N - x_s) > \\
= & \int \left(\prod_{m=0}^{N-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) \phi_k \, \Delta_\rho x_k \, \theta(x_N - x_s)(x_N - x_s) \\
= & \underbrace{\int \left(\prod_{m=0}^{k-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) \phi_k}_{\int dx_k \, p(x_k|x_0) \, \phi_k \ \text{[Gl. (150)]}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\times \quad & \underbrace{\int d(\Delta_\rho x_k)\, p(\Delta_\rho x_k)\, \Delta_\rho x_k}_{\int dx_{k+1}\, p(x_{k+1}|x_k)\, \Delta_\rho x_k \text{ [Gl. (150)]}} \\
& \underbrace{\times \int \left(\prod_{m=k+1}^{N-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) \theta(x_N - x_s)(x_N - x_s)}_{\int_{x_s}^{\infty} dx_N\, p(x_N|x_{k+1})\, (x_N - x_s) \text{ [Gl. (150)]}} \\
= \quad & \int dx_k\, p(x_k|x_0)\, \phi_k \int dx_{k+1} p(x_{k+1}|x_k)\, \Delta_\rho x_k \int_{x_s}^{\infty} dx_N\, p(x_N|x_{k+1})(x_N - x_s) \\
= \quad & \int dx_k\, p(x_k|x_0)\, \phi_k \int_{x_s}^{\infty} dx_N\, (x_N - x_s) \underbrace{\int dx_{k+1} p(x_{k+1}|x_k)\, \Delta_\rho x_k p(x_N|x_{k+1})}_{< \Delta_\rho x_k >_{x_k \to x_N} \text{ [Gln. (151, 152)]}} \\
= \quad & \int_{-\infty}^{\infty} dx_k\, p(x_k|x_0)\, \phi_k \int_{x_s}^{\infty} dx_N\, (x_N - x_s) < \Delta_\rho x_k >_{x_k \to x_N} . \qquad (149)
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $p(x_k|x_0) = p(x_k)$, also die Wahrscheinlichkeit für x_k zum Zeitpunkt t_k. Analog sind $p(x_{k+1}|x_k)$ sowie $p(x_N|x_{k+1})$ Spezialfälle der allgemeinen Definition,

$$
p(x_n|x_k) = \int \left(\prod_{m=k}^{n-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) \right) \delta \left(x_n - x_k (1+\rho)^{n-k} - \sum_{m=k}^{n-1} \Delta_\rho x_m (1+\rho)^{n-m-1} \right) , \qquad (150)
$$

die Wahrscheinlichkeit von x_{k+1} zur Zeit t_{k+1} nach x_N zur Zeit t_N zu gelangen. Insbesondere ist $p(x_N|x_k)$ also noch von x_k abhängig. Es gilt

$$
p(x_n|x_k) = p(x_n|x_k) = \int dx_l\, p(x_n|x_l) p(x_l|x_k). \qquad (151)
$$

Weiterhin bezeichnet

$$
< \Delta_\rho x_k >_{x_k \to x_N} = \int dx_{k+1}\, p(x_N|x_k)\, \Delta_\rho x_k , \qquad (152)
$$

den Mittelwert von $\Delta_\rho x_k$ über alle Pfade, die von x_k nach x_N gehen, gewichtet mit $p(x_N|x_k)$. Diese Größe kann also ungleich Null sein selbst wenn $< \Delta_\rho x_k > = 0$.

5.6.2 Berechnung von $< \Delta_\rho x_k >_{x_k \to x_N}$

Wir berechnen nun den Mittelwert $< \Delta_\rho x_k >_{x_k \to x_N}$ aus Gl. (152)

$$
< \Delta_\rho x_k >_{x_k \to x_N}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int dx_{k+1}\, p(x_N|x_k)\, \Delta_\rho x_k \\
&= \int \left(\prod_{m=k}^{N-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m)\right) \delta\left(x_N - x_k(1+\rho)^{N-k} - \sum_{l=k}^{N-1} \Delta_\rho x_l (1+\rho)^{N-l-1}\right) \Delta_\rho x_k \\
&= \int \frac{dz}{2\pi} \int \left(\prod_{m=k}^{N-1} d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m)\right) e^{-iz\left(x_N - x_k(1+\rho)^{N-k} - \sum_{l=k}^{N-1} \Delta_\rho x_l(1+\rho)^{N-l-1}\right)} \Delta_\rho x_k \\
&= \int \frac{dz}{2\pi} e^{-iz\left(x_N - x_k(1+\rho)^{N-k}\right)} \int d(\Delta_\rho x_k)\; p(\Delta_\rho x_k) \qquad \underbrace{\Delta_\rho x_k e^{iz\Delta_\rho x_k(1+\rho)^{N-k-1}}}_{\frac{-i}{(1+\rho)^{N-k-1}} \frac{\partial}{\partial z} e^{iz\Delta_\rho x_k(1+\rho)^{N-k-1}}} \\
&\quad \times \underbrace{\left(\prod_{m=k+1}^{N-1} \int d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) e^{iz\left(\sum_{l=k}^{N-1} \Delta_\rho x_l (1+\rho)^{N-l-1}\right)}\right)}_{\xi \prod_{m=k+1}^{N-1} \tilde{p}_m(z)} \\
&= -i \int \frac{dz}{2\pi} e^{-iz\left(x_N - x_k(1+\rho)^{N-k}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{p}_k(z)\right) \prod_{m=k+1}^{N-1} \tilde{p}_m(z). \qquad (153)
\end{aligned}
$$

Von der zweiten zur dritten Zeile benutzten wir hierbei

$$
\begin{aligned}
&\int dx_{k+1}\, \delta\left(x_{k+1} - x_k - \Delta_\rho x_k + \rho x_k\right) \delta\left(x_N - x_{k+1} - \sum_{l=k+1}^{N-1} (\Delta_\rho x_l + \rho x_l)\right) \\
&\qquad = \delta\left(x_N - x_k - \sum_{l=k}^{N-1} (\Delta_\rho x_l + \rho x_l)\right). \qquad (154)
\end{aligned}
$$

Weiterhin definierten wir die Funktion

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}_m(z) &= (1+\rho)^{-(N-m-1)} \hat{p}_m\left(z(1+\rho)^{N-m-1}\right) \\
&= (1+\rho)^{(-N-m-1)} \int d(\Delta_\rho x_m) p(\Delta_\rho x_m) e^{iz\Delta_\rho x_m (1+\rho)^{N-m-1}} \\
&= \int dy\, \frac{p\left(y(1+\rho)^{-(N-m-1)}\right)}{(1+\rho)^{N-m-1}} e^{izy}, \qquad (155)
\end{aligned}
$$

wobei $y = \Delta_\rho x_m (1+\rho)^{N-m-1}$. Für $\rho = 0$ wird $\tilde{p}(z)$ zur (unskalierten) Fourier-transformierten $\hat{p}(z)$. Aus $\sum_{m=1}^{N} m = N(N+1)/2$ folgt $\sum_{m=k+1}^{N-1} m = (N-k-1)(N+k)/2$ und daher

$$
\xi = \prod_{m=k+1}^{N-1} (1+\rho)^{N-m-1} = (1+\rho)^{(N-k-1)(N-k-2)/2}. \qquad (156)
$$

Der Einfachheit halber nehmen wir im weiteren an, daß $\rho = 0$. Für identisch verteilte $\Delta_\rho x_k = \Delta x_k$ wird $\xi = 1$, und $\prod_{m=k+1}^{N-1} \tilde{p}_m(z) = \tilde{p}_{N-1}^{N-k-1}(z)$, also

$$(-i\xi)\left(\frac{\partial}{\partial z}\tilde{p}_k(z)\right)\prod_{m=k+1}^{N-1}\tilde{p}_m(z) = -i\left(\frac{\partial}{\partial z}\tilde{p}(z)\right)\tilde{p}_{N-1}^{N-k-1}(z) = \frac{-i}{N-k}\frac{\partial}{\partial z}\tilde{p}_{N-1}^{N-k}(z). \tag{157}$$

Wir finden daher für $\rho = 0$

$$\begin{aligned}
<\Delta x_k>_{x_k\to x_N} &= \frac{-i}{N-k}\int\frac{dz}{2\pi}e^{-iz(x_N-x_k)}\frac{\partial}{\partial z}\tilde{p}_{N-1}^{N-k}(z) \\
&= \frac{i}{N-k}\quad\int\frac{dz}{2\pi}\tilde{p}_{N-1}^{N-k}(z)\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\,e^{-iz(x_N-x_k)}}_{\substack{-i\,(x_N-x_k)\\ \times e^{-iz(x_N-x_k)}}} \\
&= \frac{x_N-x_k}{N-k}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int dz\,\tilde{p}_{N-1}^{N-k}(z)e^{-iz(x_N-x_k)}}_{p(x_N|x_k)} \\
&= \frac{x_N-x_k}{N-k}\,p(x_N|x_k),
\end{aligned} \tag{158}$$

wobei wir im ersten Schritt partiell integrierten bei verschwindenden Randtermen.

5.6.3 Lösung der Stationaritätsgleichung

Nachdem wir die ϕ–abhängigen Terme, die zur Varianz $(\Delta W_N)^2$ beitragen bestimmt haben, sind wir nun in der Lage die Stationaritätsgleichung

$$0 = \frac{\delta < (\Delta W_N)^2 >}{\delta\phi_k}, \tag{159}$$

(für $\rho = 0$) zu lösen. Aus Gl. (144) folgt direkt

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& 2\phi_k(x_k)p(x_k) < (\Delta x_k)^2 > \\
& -2p(x_k)\int_{x_s}^{\infty} dx_N < \Delta x_k >_{x_k-\to x_N}(x_N - x_s),
\end{aligned} \tag{160}$$

und damit

$$\phi_k(x_k) = \frac{1}{<(\Delta x_k)^2>}\int_{x_s}^{\infty} dx_N < \Delta x_k >_{x_k-\to x_N}(x_N - x_s). \tag{161}$$

Setzen wir Gl. (158), so ergibt sich,

$$\phi_k(x_k) = \frac{1}{<(\Delta x_k)^2>}\int_{x_s}^{\infty} dx_N\frac{x_N - x_k}{N-k}\,p(x_N|x_k)(x_N - x_s). \tag{162}$$

Nehmen wir nun an, daß $p(x_N|x_k)$ gut durch eine Gaußverteilung in $x_N - x_k$ mit Varianz

$$<(\Delta x_k)^2> (N-k) = D\tau(N-k) \tag{163}$$

approximiert wird, so gilt

$$\frac{x_N - x_k}{D\tau(N-k)} p(x_N|x_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} p(x_N|x_k), \tag{164}$$

und damit,

$$\phi_k(x_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{x_s}^{\infty} dx_N \, (x_N - x_s) p(x_k|x_k). \tag{165}$$

Aus Vergleich mit Gl. (114) für $\rho = 0$ ergibt sich die "Delta"–Hedging Regel von Black–Scholes,

$$\phi_k(x_k) = \left. \frac{\partial C(x, x_s, \tau(N-k))}{\partial x} \right|_{x=x_k}. \tag{166}$$

Vergleich mit Abb. (12) zeigt, daß die Ableitung des Black–Scholes–Preises zwischen 0 und 1 schwankt. Bei Aktienkursen weit unter dem Basispreis ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Option eingelöst wird sehr gering. Es ist deshalb für den Halter der Short–Position nicht hilfreich selbst Underlyinganteile zu halten. Insbesondere wäre ein Kursverlust des Underlyings nicht durch die Short–Position einer Call–Option abgefangen. Daher ist verständlich, daß ϕ_k klein wird für kleine x. Bei hohen Kursen verhält sich eine Option immer mehr wie ein Forwardkontrakt. Solch ein Kontrakt wird durch $\phi_k = 1$ perfect gehedgt. In der Tat wird dann der Verlust aus der Short–Position exakt durch das Halten des Underlyings kompensiert. Genau am Strikepreis ist $\phi_k(x_s) = 1/2$.

6 Markov–Prozesse

6.1 Markov–Eigenschaft

Den den Aktienpreisen zugrundeliegenden stochastischen Prozeß haben wir stets als Markov–Prozeß angenommen. Rechentechnisch ist dies eine Vereinfachung, empirisch gibt es für diese Annahme auch ausreichend Bestätigung, zumindest für nicht zu kleine Zeiten. Markov–Prozesse tauchen an vielen Stellen in der Physik und Chemie auf. Zum Vergleich mit dem Kalkül der stochastischen Differentialgleichungen, auf dem die klassische Herleitung der Black–Scholes–Formel beruht, wollen wir hier kurz die gebräuchlisten Verfahren zur Behandlung von Markov–Prozessen vorstellen. Anschließend werden wir dann auf den Kalkül der stochastischen Differentialgleichungen eingehen. Zur weitergehenden Information über stochastische Prozesse sei auf den Klassiker [12] verwiesen. Ebenfalls empfehlenswert ist [10].

Wir beginnen mit der Definition der Markov–Eigenschaft. Ganz allgemein kann die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis (A UND B UND C UND $C \cdots$)

auf verschiedene Weisen faktorisiert werden,

$$\begin{aligned} p(A,B,C,D,\cdots) &= p(A)\,p(B|A)\,p(C|A,B)\,p(D|A,B,C)\,\cdots \\ &= p(B)\,p(A|B)\,p(C|A,B)\,p(D|A,B,C)\,\cdots \\ &= p(C)\,p(A|C)\,p(B|A,C)\,p(D|A,B,C)\,\cdots \\ &= \cdots . \end{aligned} \tag{167}$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine Menge von Ereignissen hat die Markov–Eigenschaft, falls es eine ausgezeichnete (z.B zeitliche) Anordnung gibt, für die sich die Darstellung vereinfacht

$$p(A,B,C,D,\cdots) = p(A)\,p(B|A)\,p(C|B)\,p(D|C)\,\cdots . \tag{168}$$

Handelt es sich bei den Ereignissen um zeitlich aufeinanderfolgende Ereignisse mit $t(A) < t(B) < t(C) < t(D) < \cdots$, so bedeuted dies, daß die Wahrscheinlichkeit für den nächsten Zustand nur vom unmittelbar vorausgehenden Zustand abhängt, also beispielsweise die Wahrscheinlichkeit für C nur vom vorherigen B und nicht auch noch von dem noch früheren A.

Die Markov–Eigenschaft ist eine übliche Annahme für viele physikalische Systeme, und entspricht der Annahme, daß eine (idealerweise geringe) Anzahl von Zustandsgrößen die probabilistische Zeitentwicklung eines Systems bestimmt. Analog, haben wir für den Aktienkurs die Markov–Eigenschaft angenommen. In der Praxis ist jedoch zu beachten, daß die Annahme einer Markov–Eigenschaft bezüglich spezifischer Zustandvariablen (Ereignisse) in der Regel nur für eine bestimmte Zeitskala brauchbar ist. Für zu kleine Zeiten bricht sie oft zusammen. Im Minutenbereich, beispielsweise, sind die Änderungen der Aktienkurse tatsächlich miteinander korreliert.

Es ist vielleicht auch hilfreich zu bemerken, daß sich jedes System als Markov–Kette schreiben läßt, indem man "Gedächtnisvariablen" einführt, die alle relevanten Variablen speichern. Solche "Gedächtnisvariablen" wären im allgemeinsten Fall $B' = A \cup B$, $C' = C \cup B'$, $D' = D \cup C'$, $\cdots$. In Systemen der klassischen Mechanik, beispielsweise, wird die Zeitentwicklung eines Systems ja nicht durch die Position eines Teilchens alleine, sondern auch durch dessen Geschwindigkeit bestimmt. Die Geschwindigkeit läßt sich als solch eine "Gedächtnisvariable" interpretieren.

Analog zu dem diskreten Fall (168) spricht man bei einer kontinuierlicher Zeitvariable t von einem Markov–Prozeß, wenn für die Wahrscheinlichkeit für x_n zum Zeitpunkt t_n bei gegebener kompletter Vorgeschichte $\{(x_i,t_i)|1 \le i \le n-1\}$ gilt

$$p(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};\cdots;x_1,t_1) = p(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1}) \tag{169}$$

für alle Zeiten mit $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$. Dies bedeuted beispielsweise

$$p(x_3,t_3;x_2,t_2;x_1,t_1) = p(x_1,t_1)p(x_2,t_2|x_1,t_1)p(x_3,t_3|x_2,t_2), \tag{170}$$

für $t_1 < t_2 < t_3$.

Wir wollen noch bemerken, daß die Schreibweisen $p(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1)$ oder $p(x_2, t_2|x_1, t_1)$ nicht ganz der ansonsten üblichen Konvention entsprechen die bedingenden (festgehaltenen) Variablen von den Zufallsvariablen durch einen senkrechten Strich zu trennen. In der sonst üblichen Schreibweise, bei der die bedingenden Variablen rechts vom senkrechten Strich stehen, würde man beispielsweise schreiben $p(x_3, x_2, x_1|t_3, t_2, t_1)$ oder $p(x_2|x_1, t_1; t_2)$. In der Tat wird in der Normierungsbedingung ja auch nur über die x_i und nicht über t_i integriert, also z.B.,

$$1 = \int dx_2 p(x_2, t_2|x_1, t_1) \quad 1 = \int dx_3\, dx_2\, dx_1\, p(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1). \tag{171}$$

6.2 Chapman–Kolmogorov–Gleichung

Integrieren der Markov–Prozesse kennzeichnenden Gl. (170) über x_2 und dividieren durch $p(x_1, t_1)$ liefert die sogenannte *Chapman–Kolmogorov–Gleichung*

$$p(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int dx_2\, p(x_3, t_3|x_2, t_2) p(x_2, t_2|x_1, t_1), \tag{172}$$

für $t_1 < t_2 < t_3$. Diese Gleichung haben wir beispielsweise benutzt bei der Berechnung von Erwartungswerten bei der Behandlung des Zugangs von Bouchaud–Sornette–Potters. Bei Gl. (172) handelt es sich um eine nichtlineare Integralgleichung.

6.3 Mastergleichung

Wir betrachten nun Gl. (172) für $t_3 = t_2 + \tau$ mit kleinen Zeitdifferenzen τ, um im Limes $\tau \to 0$ eine Gleichung für die Zeitableitung $\partial P/\partial t$ zu bekommen. Wir erhalten

$$p(x, t|x_0, t_0) = \int dx'\, p(x, t|x', t - \tau) p(x', t - \tau|x_0, t_0), \tag{173}$$

für $t < t' = t - \tau < t_0$. Wenn wir nun $p(x, t|x_0, t - \tau)$ für kleine τ taylorentwickeln wollen, müssen wir berücksichtigen, daß wegen der Normierungsbedingung

$$1 = N = \int dx'\, p(x, t|x', t - \tau), \tag{174}$$

also $p(x, t|x', t - \tau)$ auch von allen $p(x'', t|x', t - \tau)$ mit $x'' \neq x$ abhängt. Schreiben wir also

$$p(x, t|x', t - \tau) = \frac{p(x, t|x', t - \tau)}{\int dx''\, p(x'', t|x', t - \tau)} = \frac{p(x, t|x', t - \tau)}{N}, \tag{175}$$

(wobei wir die rechte Seite auch für unnormierte p verwenden könnten), so erhalten wir durch eine Taylorentwicklung in $\tau = t - t'$,

$$p(x, t|x', t') \quad \approx \quad \underbrace{p(x, t'|x', t')}_{\delta(x - x')} + \tau \left(\underbrace{\frac{1}{N}}_{1} \underbrace{\left.\frac{\partial p(x, t|x', t')}{\partial t}\right|_{t = t'}}_{W_{t'}(x|x_0)} \right.$$

$$
\begin{aligned}
& -\underbrace{\frac{1}{N^2}}_{1}\underbrace{p(x,t'|x',t')}_{\delta(x-x')}\underbrace{\int dx''\,\frac{\partial p(x'',t|x',t')}{\partial t}\Big|_{t=t'}}_{a_0(x',t')=\int dx'' W_{t'}(x''|x')}\Big) \\
= \; & \Big(1-\tau\int dx''\,W_{t'}(x''|x')\Big)\delta(x-x')+\tau W_{t'}(x|x') \\
= \; & (1-\tau a_0)\delta(x-x')+\tau W_{t'}(x|x'). \qquad (176)
\end{aligned}
$$

Hierbei bezeichnet

$$
W_{t'}(x|x') = \frac{\partial p(x,t|x',t')}{\partial t}\Big|_{t=t'}, \qquad (177)
$$

die momentane Übergangsrate von x' nach x pro Zeiteinheit und der Term

$$
a_0(x',t') = \int dx''\,W_{t'}(x''|x'), \qquad (178)
$$

sorgt dafür, daß die Normierungsbedingung auch für das taylorentwickelte P gültig bleibt. Wir setzten hier die Existenz von $W_{t'}$ voraus, bemerken jedoch, daß im allgemeinen Gl. (176) nicht gelten muß [10, 12].

Setzen wir jetzt für kleines τ die Taylorentwicklung (176) in die Chapman–Kolmogorov–Gleichung Gl. (173) ein, so finden wir für $t = t' + \tau$,

$$
\begin{aligned}
p(x,t|x_0,t_0) &= \int dx'\,\Big([1-\tau a(x',t')]\delta(x-x')+\tau W_{t'}(x|x')\Big)p(x',t'|x_0,t_0) \\
&= p(x,t'|x_0,t_0)[1-\tau' a(x,t')]+\tau\int dx'\,W_{t'}(x|x')p(x',t'|x_0,t_0) \\
&= p(x,t'|x_0,t_0)+\tau\int\Bigg(W_{t'}(x|x')p(x',t'|x_0,t_0) \\
&\quad -W_{t'}(x'|x)p(x,t'|x_0,t_0)\Bigg)\,dx'. \qquad (179)
\end{aligned}
$$

Bringen wir den Term $p(x,t'|x_0,t_0)$ auf die linke Seite, teilen durch τ und bilden den Grenzübergang $\tau' \to 0$, so erhalten wir [für in t stetige $W_t(x|x')$, $a_0(x,t)$, $p(x,t'|x_0,t_0)$, also z.B. $\lim_{\tau\to 0} p(x,t'|x_0,t_0) = p(x,t|x_0,t_0)$] die sogenannte *Mastergleichung*

$$
\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \int\Big(\underbrace{W_t(x|x')\,p(x',t|x_0,t_0)}_{\text{Gewinn}}-\underbrace{W_t(x'|x)\,p(x,t|x_0,t_0)}_{\text{Verlust}}\Big)dx'. \qquad (180)
$$

Die Gleichung läßt sich also als Bilanzgleichung verstehen, in der die Änderung von $p(x,t|x_0,t_0)$ gegeben ist in der Form Gewinn– minus Verlustterm bzw. Zufluß– minus Abflußterm. Die Fall $\tau \to 0$ bedeuted hier also, daß Mehrfachterme, wie z.B. einen Wechsel von x nach x' und anschließend wieder zurück nach x, nicht berücksichtigt werden.

Für eine diskrete x-Variable wird Gl. (180) zu,

$$\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \sum_{x'} \Big(W_t(x|x')p(x',t|x_0,t_0) - W_t(x'|x)p(x,t|x_0,t_0) \Big). \quad (181)$$

Analog erhält man für diskrete Zeiten eine Differenzengleichung (unter der Voraussetzung, daß pro betrachtetem Zeitintervall nur ein Übergang gemäß der gewählten Übergangswahrscheinlichkeiten stattfindet).

In abstrakterer Form läßt sich die Mastergleichung (180) schreiben als

$$\dot{p} = \mathbf{W}_t p, \quad (182)$$

wobei $\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t}$ und $\mathbf{W}_t$ einen linearen Operator darstellt mit Matrixelementen,

$$\mathbf{W}_t(x,x') = W_t(x|x') - \delta(x-x') \int dx''\, W_t(x''|x). \quad (183)$$

Gl. (182) hat für zeitunabhängiges $\mathbf{W}_t = \mathbf{W}$ die formale Lösung

$$p(t) = e^{t\mathbf{W}} p(t_0), \quad (184)$$

die aber in der Regel nicht benutzt werden kann um p zu finden. Bei diskreten x wird $\mathbf{W}_t$ eine endlichdimensionale Matrix. Die folgenden speziellen Eigenschaften von $\mathbf{W}_t$ lassen sich leicht überprüfen

$$\mathbf{W}_t(x,x') \geq 0 \text{ für } x \neq x', \qquad \int dx\, \mathbf{W}_t(x,x') = 0, \forall x'. \quad (185)$$

Für daraus sich ergebende Folgerungen siehe zum Beispiel [12].

6.4 Fokker–Planck–Gleichung

Bei der *Fokker–Planck–Gleichung* handelt es sich um eine spezielle Mastergleichung (180), bei der $\mathbf{W}_t$ die Form eines Differentialoperators zweiter Ordnung hat,

$$\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x}\Big(A[x,t]\, p(x,t|x_0,t_0) \Big)}_{\text{Drift}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(B^2[x,t]\, p(x,t|x_0,t_0) \Big)}_{\text{Fluktuationen}}. \quad (186)$$

Der erste Term wird auch Driftterm, Transportterm oder Konvektionsterm genannt, der zweite auch Fluktuationsterm oder Diffusionsterm. Die Fokker–Planck–Gleichung ist auch bekannt als verallgemeinerte Diffusionsgleichung, Smoluchowski–Gleichung oder zweite Kolmogorov–Gleichung.[1]

[1] Wir benutzen hier die Bezeichnungsweise von van Kampen [12]. Gardiner [10], beispielsweise, bezeichnet die Mastergleichung in der Sprechweise von van Kampen als differentielle Chapman–Kolmogorov–Gleichung. Mastergleichung und Fokker–Planck–Gleichung bezeichnen dann Spezialfälle dieser Gleichung, wobei sich die Master–Gleichung in diesem engeren Sinne auf Sprungprozesse bezieht. Entsprechend ist die Definition der "W" bei beiden Autoren etwas unterschiedlich.

Falls ein Markov–Prozeß durch eine Fokker–Planck–Gleichung beschrieben werden kann, hat dies durchaus Vorteile gegenüber einer Beschreibung durch eine allgemeinere Mastergleichung (180). Zum einen ist die Fokker–Planck–Gleichung eine reine Differentialgleichung.[2] Die Mastergleichung ist dagegen eine Integro–Differentialgleichung, und damit ist es im allgemeinen schwieriger mit umzugehen als mit reinen Differentialgleichungen. Weiterhin erfordert die Fokker–Planck–Gleichung nur die Bestimmung der Funktionen $A[x,t]$, $B^2[x,t]$ während die Mastergleichung die ganzen (von x und x' abhängigen) Übergangsraten $W_t(x|x')$ benötigt. Darüber hinaus lassen sich, zumindest für lineare Fokker–Planck–Gleichungen (d.h. solche mit A linear in X und B^2 unabhängig von x), die Driftkoeffizienten A aus den makroskopischen Gesetzen und die Fluktuationskoeffizienten aus Gleichgewichtsbetrachtungen der statistischen Mechanik herleiten. Bei nichtlinearen Fokker–Planck–Gleichung ist dagegen bei der Identifizierung von A und B^2 Vorsicht geboten. Eine detaillierte Diskussion findet man dazu in [12].

Die Fokker–Planck–Gleichung (186) läßt sich, wie wir im Folgendem zeigen werden, aus der allgemeinen Mastergleichung (180) herleiten unter der Annahme, daß der stochastische Prozeß nur kleine Sprünge zuläßt. Man kann zeigen daß dies stochastischen Prozessen entspricht deren Realisierungen (Pfade) stetig sind. Beispielsweise sind die Pfade der Brownschen Bewegung stetig, aber mit Wahrscheinlichkeit eins nirgendwo differenzierbar.

Um die Fokker–Planck–Gleichung (186) herzuleiten, fassen wir die Übergangsraten $W_t(x,x')$ als Funktionen von x' und $\Delta x = x - x'$ auf,

$$W_t(x|x') = W_t(\Delta x, x'). \tag{187}$$

Die Mastergleichung (180) wird dann zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} &= \int W_t(\Delta x, x-\Delta x)\, p(x-\Delta x, t|x_0,t_0)\, d(\Delta x) \\ &\quad - p(x,t|x_0,t_0) \int W_t(-\Delta x, x)\, d(\Delta x). \end{aligned} \tag{188}$$

Nun nehmen wir an, daß $W(\Delta x, x')$ und $p(x',t|x_0,t_0)$ langsam variieren bezüglich x', und daß nur kleine Sprünge auftauchen, also $W(\Delta x, x') \approx 0$ für $\Delta x > \delta$ für ein $\delta > 0$, und damit bezüglich des ersten Argumentes scharf gepeaked ist. Wir machen daher im ersten Integral von (188) nur eine Taylorentwicklung bezüglich $-\Delta x$ im zweiten Argument von $W(\Delta x, x-\Delta x)$ und in $p(x-\Delta x, t|x_0,t_0)$ während wir die Abhängigkeit vom ersten Argument nicht approximieren. Um auch den Fluktuationsterm zu erhalten gehen wir dabei bis zur zweiten Ordnung (vgl. die Beziehung $dz^2 = dt$ im Abschnitt über stochastische Differentialgleichungen). Dies ergibt,

$$\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \int W_t(\Delta x, x)\, p(x,t|x_0,t_0)\, d(\Delta x)$$

[2] Und zwar ist die Fokker–Planck–Gleichung eine parabolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Da alle Fokker–Planck–Gleichungen linear bezgl. p sind, nutzt man die Bezeichnung lineare Fokker–Planck–Gleichung für den Fall bei dem A eine lineare Funktion von x und B von x unabhängig ist.

$$
\begin{aligned}
& -\int (\Delta x) \frac{\partial}{\partial x} \left(W_t(\Delta x, x)\, p(x,t|x_0,t_0)\right)\, d(\Delta x) \\
& +\frac{1}{2} \int (\Delta x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(W_t(\Delta x, x)\, p(x,t|x_0,t_0)\right)\, d(\Delta x) \\
& -p(x,t|x_0,t_0) \int W_t(-\Delta x, x)\, d(\Delta x) \\
= \;& p(x,t|x_0,t_0) \int W_t(\Delta x, x)\, d(\Delta x) \\
& -\frac{\partial}{\partial x} \Big(p(x,t|x_0,t_0) \underbrace{\int (\Delta x) W_t(\Delta x, x)\, d(\Delta x)}_{a_1(x,t)} \Big) \\
& +\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big(p(x,t|x_0,t_0) \underbrace{\int (\Delta x)^2 W_t(\Delta x, x)\, d(\Delta x)}_{a_2(x,t)} \Big) \\
& -p(x,t|x_0,t_0) \int W_t(\Delta x, x)\, d(\Delta x) \\
= \;& -\frac{\partial}{\partial x} \Big(a_1(x,t) p(x,t|x_0,t_0) \Big) \\
& +\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big(a_2(x,t) p(x,t|x_0,t_0) \Big). \qquad (189)
\end{aligned}
$$

Dies entspricht der Fokker–Planck–Gleichung (186), und ergibt somit eine Beziehung der Funktionen $A[x,t]$ und $B^2[x,t]$ zu den sogenannten "Sprungmomenten" $a_1(x,t)$, $a_2(x,t)$, deren Existenz wir hier annehmen,

$$
\begin{aligned}
A[x,t] &= a_1(x,t) = \int (\Delta x) W_t(\Delta x, x)\, d(\Delta x), \qquad (190) \\
B^2[x,t] &= a_2(x,t) = \int (\Delta x)^2 W_t(\Delta x, x)\, d(\Delta x). \qquad (191)
\end{aligned}
$$

Eine komplette, nicht auf Terme zweiter Ordnung beschränkte Taylorentwicklung führt auf die *Kramers–Moyal–Entwicklung*,

$$
\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Big(a_n(y,t) p(x,t|x_0,t_0) \Big), \qquad (192)
$$

welche ausgedrückt werden kann durch die "Sprungmomente" n–ter Ordnung,

$$
a_n(x,t) = \int (\Delta x)^n W_t(\Delta x, x)\, d(\Delta x). \qquad (193)
$$

Wir bemerken noch, daß die Fokker–Planck–Gleichung als Kontinuitätsgleichung aufgefaßt werden kann. In der Tat erhält durch die Definition einer Wahrscheinlichkeitsstromdichte,

$$
J(x,t) = A[x,t]\, p(x,t|x_0,t_0) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Big(B^2[x,t]\, p(x,t|x_0,t_0) \Big), \qquad (194)
$$

Gl. (186) die typische Form einer Kontinuitätsgleichung,

$$\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x,t)}{\partial y}. \tag{195}$$

Eine häufig vorkommender Fall ist eine zeitunabhängige, lineare Fokker–Planck–Gleichung mit $A[x,t] = a\,x$ und $B^2[x,t] = B^2$,

$$\frac{\partial p(x,t|x_0,t_0)}{\partial t} = -a\frac{\partial}{\partial x}\Big(x\,p(x,t|x_0,t_0)\Big) + \frac{B^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,t|x_0,t_0). \tag{196}$$

Für die Anfangsbedingung[3] $x(t=0) = x_0$ und im Unendlichen verschwindenden p ist die Lösung von (196) gegeben durch die Gauß-Funktion

$$p(x,t|x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\mathrm{FP}}^2}}\,e^{-\frac{\left(x - x_0 e^{at}\right)^2}{2\sigma_{\mathrm{FP}}^2}}, \tag{197}$$

mit Mittelwert

$$\mu_{\mathrm{FP}}(t) = x_0\,e^{at}, \tag{198}$$

und mit Varianz

$$\sigma_{\mathrm{FP}}^2(t) = \frac{B^2}{2a}\left(e^{2at} - 1\right). \tag{199}$$

Dies läßt sich durch (etwas mühsames) direktes Nachrechnen verifizieren. Für $a < 0$ geht dies für große Zeiten gegen eine stationäre (zeitunabhängige) Gaußverteilung mit der Varianz $-B^2/2a$. Für $a > 0$ wächst e^{2ta} unbeschränkt und es gibt daher dann keine stationäre Verteilung.

6.5 Langevin–Gleichung

Eine Alternative zur Behandlung von Markov–Prozessen mit Hilfe von Fokker–Planck–Gleichungen ist der Kalkül der stochastische Differentialgleichungen. Als einfaches Beispiel wollen wir in diesem Abschnitt die Langevin–Gleichung diskutieren. Diese ist eine stochastische Differentialgleichung der Gestalt

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad + \; B \underbrace{\xi(t)}_{\text{Zufallsvariable}}. \tag{200}$$

Stochastisch heißt diese Diferentialgleichung, da hierin ξ als eine normalverteilte Zufallsvariable angenommen wird, mit Mittelwert

$$< \xi(t) >= 0, \tag{201}$$

und Kovarianz

$$< \xi(t)\xi(t') >= \delta(t-t'). \tag{202}$$

[3] Für eine systematische Diskussion von Anfangs– und Randbedingungen siehe [10].

Mit ξ ist auch x eine Zufallsvariable. In der ursprünglichen Anwendung der Langevin–Gleichung in der Physik steht hierbei die Zufallsvariable x für die Geschwindigkeit eines Teilchen, welches durch eine Reibungskraft ax mit $a < 0$ abgebremst wird und dem Einfluß von Zufallskräften $\xi(t)$ ausgesetzt ist. Bei der Herleitung der Black–Scholes–Formel wird uns eine etwas allgemeinere Gleichung begegnen, bei der x beispielsweise den Aktienkurs und ξ die Änderung des Aktienkurses representieren.

Nehmen wir eine Zufallsrealisierung von $\xi(t)$ als gegeben an, so können wir naiv (ohne uns ersteinmal über die Existenz des Integrals Gedanken zu machen) eine Lösung von Gl. (200) angeben,

$$x(t) = x_0 e^{at} + e^{at} B \int_0^t e^{-at'} \xi(t') dt'. \tag{203}$$

Da Gl. (203) $x(t)$ als eine Linearkombination der $\xi(t)$ darstellt und eine Summe von normalverteilten Variablen wieder normalverteilt ist, ist daher in diesem Falle mit $\xi(t)$ auch $x(t)$ normalverteilt.

Für den Mittelwert von x zur Zeit t unter der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ folgt unter Benutzung von Gl. (201),

$$\begin{aligned} < x(t) > &= < x_0 e^{at} > + e^{at} \int_0^t e^{-at'} B \underbrace{< \xi(t') >}_{= 0} dt' \\ &= x_0 \, e^{at}. \end{aligned} \tag{204}$$

Dies entspricht der Gl. (198) für den Mittelwert der Lösung (197) der linearen Fokker–Planck–Gleichung (196). Ähnlich folgt für den Erwartungwerts von x^2 zur Zeit t unter Verwendung von Gl. (201) und Gl. (202),

$$\begin{aligned} < x^2(t) > &= < x_0^2 \, e^{2at} > + 2 x_0 \, e^{2at} \int_0^t e^{-at'} B \underbrace{< \xi(t') >}_{= 0} dt' \\ &\quad + B^2 e^{2at} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \, e^{-at'} e^{-at''} \underbrace{< \xi(t') \xi(t'') >}_{= \delta(t' - t'')} \\ &= x_0^2 \, e^{2at} + B^2 e^{2at} \underbrace{\int_0^t e^{-2at'} dt'}_{= -(e^{-2at} - 1)/2a} \\ &= x_0^2 \, e^{2at} + \frac{B^2}{2a} (e^{2at} - 1), \end{aligned} \tag{205}$$

und daher für die Varianz,

$$V[x(t)] = < x^2(t) > - < x(t) >^2 = \frac{B^2}{2a} (e^{2at} - 1). \tag{206}$$

Dies entspricht der Gl. (199) für die Varianz der Lösung (197) der linearen Fokker–Planck–Gleichung (196). Eine Gaußverteilung ist durch Mittelwert und Varianz bereits vollständig beschrieben. Nehmen wir also die ξ und damit nach Gl. (203) auch die x, als normalverteilt an, so ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der $x(t)$ durch Gl. (204) und Gl. (206) vollständig bestimmt. Damit ist also die Langevin–Gleichung (200) equivalent zu der linearen Fokker–Planck–Gleichung (196).

6.6 Stochastische Differentialgleichungen

Betrachten wir nun eine allgemeine stochastische Differentialgleichung der Form,

$$\frac{dx}{dt} = A[x(t), t] + B[x(t), t]\,\xi(t). \tag{207}$$

Die mathematische Bedeutung einer solchen Gleichung ist aber nicht von vornherein klar. Einen Schritt weiter kommen wir, wenn wir Gl. (207) als abkürzende Schreibweise auffassen für die korrespondierende Integralgleichung,

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} A[x(t'), t']dt' + \int_{t_0}^{t} B[x(t'), t']\xi(t)dt'. \tag{208}$$

Das mathematische Problem besteht nun darin dem Integral über die Zufallsvariable $\xi(t)$ in (208) eine Bedeutung zu geben. In der Tat, nehmen wir an, daß ein z existiert mit $\xi dt = dz$, also $\xi = \frac{\partial z}{\partial t}$, wie es sein muß, damit das Integral existiert, so finden wir beispielsweise

$$\int_{t_0}^{t} \xi\, dt' = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=t'}}_{\substack{\text{Ableitung}\\ \text{existiert nicht!}}} dt'. \tag{209}$$

Es ist aber bekannt, daß beispielsweise bei der Brownschen Bewegung an allen Orten die Ableitung mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht existiert. Damit kann das Integral im üblichen Riemann-Sinne nicht existieren. (Da auch die totale Variation unendlich wird, existiert auch keine Lebesque–Integral.) Eine Konstruktion analog zur Definition des Riemann–Integrals als Grenzwert von Riemann–Summen ist jedoch möglich. Beim klassichen Riemann–Integral wird also die zu integrierende Funktion auf äquidistanten Intervallen $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t$ stückweise konstant approximiert. Das Integral über diese stückweise konstanten Funktionen ist eine Summe, deren Grenzwert $N \to \infty$ das Riemann–Integral liefert. Anders als bei Riemann–Integralen, macht es bei stochastischen Integralen jedoch einen Unterschied, an welcher Stelle des Intervalls der Funktionswert für eine stückweise konstante Approximation gewählt wird. Zwei Möglichkeiten sind besonders gebräuchlich. Itô's Wahl besteht darin stets den Funktionswert des linken Randes zu nehmen, also

$$\int_{t_0}^{t} f[x]\, dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f[x(t_{i-1})]\Big(z(t_i) - z(t_{i-1})\Big). \tag{210}$$

Diese Wahl korrespondiert zu der Markov–Eigenschaft. Stratonowich wählte den Funktionwert in der Mitte des Intervalls

$$\int_{t_0}^{t} f[x]\, dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f\left[\frac{x(t_i)+x(t_{i-1})}{2}\right]\Big(z(t_i)-z(t_{i-1})\Big). \tag{211}$$

Diese Wahl ist angemessen, wenn die Diracfunktion in Gl. (202) als Idealisierung einer endlichen Kovarianz gesehen wird. Für Details zur Definition stochastischer Integrale und Differentialgleichungen sei hier beispielsweise auf [11, 1, 19] verwiesen. Es stellt sich heraus, daß im Stratonovich–Kalkül bezüglich Variablensubstitution in den Differentialen die üblichen Regeln gelten, während im Itô–Klakül Terme zweiter Ordnung in dz mitgenommen werden müssen. In der Tat, wenn z, definiert als Summe von Inkrementen dz, eine Gauß'sche Zufallsvariable mit Mittelwert 0 und Varianz t sein soll, so muß dz eine Gauß'sche Zufallsvariable sein mit Mittelwert 0 und Varianz dt. Dies schreibt man auch

$$dz^2 = dt. \tag{212}$$

Technisch gesehen, besteht der Itô–Kalkül im wesentlichen aus der Anwendung der Beziehung (212). Mathematisch folgt diese Beziehung aus dem Verhalten von Itô–Integralen unter Variablensubstitution. Sie korresondiert zu der Tatsache, daß die mittlere zurückgelegte Weglänge beim Wienerprozeß proportional zur Wurzel aus der Zeitdifferenz zunimmt, $< |x - x_0| > \propto \sqrt{t - t_0}$. (Während der Erwartungswert bei fehlendem Driftterm verschwindet, $< x - x_0 > = 0$.)

Gl. (207) kann man nun auch mit der Variablen z schreiben

$$\frac{dx}{dt} = A[x,t] + B[x,t] \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{\text{Zufallsvariable}}, \tag{213}$$

oder, "multipliziert" mit dt, in Form eines stochastisches Differentials

$$dx = \underbrace{A[x,t]}_{\frac{\partial x}{\partial t}} dt + \underbrace{B[x,t]}_{\frac{\partial x}{\partial z}} dz. \tag{214}$$

Damit erhalten wir beispielsweise unter Verwendung von (212)

$$\begin{aligned} dx^2 &= A^2[x,t]\, dt^2 + B^2[x,t] \underbrace{dz^2}_{dt} + A[x,t]B[x,t]\, dt\, dz \\ &\approx B^2[x,t]\, dt = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 dt. \end{aligned} \tag{215}$$

Im nächsten Abschnitt betrachten wir nun Differentiale von allgemeinen Funktionen $f[x(t), t]$.

6.7 Itô's Lemma

Das stochastische Differential einer beliebigen von x–abhängigen Funktion $f[x(t),t]$, läßt sich mit den Beziehungen (212) und (215) nun ebenfalls berechnen. Dazu machen wir eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung in dt, das heißt also bis zur zweiten Ordnung in dz,

$$\begin{aligned} df[x(t),t] &= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}\,dz + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 dz^2 + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt \\ &= A[x,t]\frac{\partial f}{\partial x}\,dt + B[x,t]\frac{\partial f}{\partial x}\,dz + \frac{1}{2}B^2[x,t]\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dz)^2 + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt \\ &= B[x,t]\frac{\partial f}{\partial x}\,dz + \left(A[x,t]\frac{\partial f}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{2}B^2[x,t]\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{\text{Spezieller “Itô–Term”}} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)dt. \end{aligned} \tag{216}$$

Diese Beziehung ist bekannt als Itô's Lemma. Sie ist von grundlegender Bedeutung für den Itô–Kalkül und daher auch für die klassische Herleitung der Black–Scholes–Formel.

Itô's Lemma kann auch dazu verwendet werden, die Äquivalenz einer stochastische Differentialgleichung zu einer Fokker–Planck–Gleichung zu zeigen. Bilden wir den Erwartungswert der Gl. (216) unter $p(x,t|x_0,t_0)$ und dividieren durch dt, so erhalten wir für eine beliebige, nicht explizit zeitabhängige Funktion $f[x(t)]$,

$$\frac{d}{dt} < f[x(t)] > \; = \underbrace{< B[x,t]\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dz}{dt} >}_{< B[x,t]\frac{\partial f}{\partial x} > < \xi(t) > = 0} + < A[x,t]\frac{\partial f}{\partial x} > + \frac{1}{2} < B^2[x,t]\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > . \tag{217}$$

Wir haben hierbei benutzt, daß Im Itô–Kalkül $x(t)$ zur Zeit t von der zukünftigen Änderung $\frac{dz}{dt} = \xi(t)$ unabhängig ist. Daher faktorisiert der erste Term und verschwindet dann wegen $<\xi(t)> = 0$. Das Wegfallen des z–abhängigen Terms ist also bedingt durch die Definition der “Riemann”–Summen in der Definition des Itô–Integrals, bei der immer der Funktionswert am Anfang des Teilintervalls zur Bildung der Teilsummen gewählt wird. Dies korrespondiert zu der Markov–Eigenschaft. Einsetzen der Definition des Erwartungswertes liefert dann

$$\begin{aligned} \int dx\, f[x]\frac{d}{dt}p(x,t|x_0,t_0) &= \int dx\, p(x,t|x_0,t_0)A[x,t]\frac{\partial f}{\partial x} \\ &\quad + \frac{1}{2}\int dx\, p(x,t|x_0,t_0)B^2[x,t]\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{218}$$

Durch partielle Integration erhalten wir daraus bei verschwindenden Randtermen,

$$\begin{aligned}\int dx\, f[x] \frac{d}{dt} p(x,t|x_0,t_0) &= -\int dx\, f[x] \frac{\partial}{\partial x}\Big(A[x,t]p(x,t|x_0,t_0)\Big) \\ &+ \frac{1}{2}\int dx\, f[x] \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B^2[x,t]p(x,t|x_0,t_0)\right) \quad (219)\end{aligned}$$

Da wir $f[x]$ beliebig wählen können, folgt daraus

$$\frac{d}{dt}p(x,t|x_0,t_0) = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(A[x,t]p(x,t|x_0,t_0)\Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B^2[x,t]p(x,t|x_0,t_0)\right), \quad (220)$$

also gerade die allgemeine Fokker–Planck–Gleichung (186). Damit folgt die Äquivalenz der allgemeinen stochastischen Differentialgleichung (207) (im Itô–Kalkül) mit der Fokker–Planck–Gleichung (186).

Bei der Herleitung dieser Äquivalenz haben wir an zwei Stellen auf den Itô–Kalkül Bezug genommen: Einmal durch Benutzung der Itô–Formel, zum anderen durch das Wegfallen des ersten Terms in Gl. (217). Im Stratonovich–Kalkül findet man, daß eine stochastische Differentialgleichung der Form (207), interpretiert im Sinne von Stratonovich [und daher nicht equivalent zu einer im Itô–Kalkül interpretierten Gl. (207)] korrespondiert zu einer Fokker–Planck–Gleichung der Form [10, 12]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p(x,t|x_0,t_0) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(A[x,t] + \frac{1}{2}B[x,t]\frac{d}{dx}B[x,t]\right)p(x,t|x_0,t_0)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[B^2[x,t]p(x,t|x_0,t_0)\right]. \quad (221)\end{aligned}$$

Zum Abschluß sei nochmal betont, daß die Fokker–Planck–Gleichung eine normale, und keine stochastische partielle Differentialgleichung darstellt. Eine Fokker–Planck–Gleichung ist daher stets eindeutig definiert und von der Wahl einer Definition des stochastischen Integrals nicht betroffen. Zu ihr korrespondieren aber, in Abhängigkeit von der Definition des stochastischen Integrals, unterschiedliche stochastische Differentialgleichungen,

Abbildung 19 faßt die diskutierten Ansätze zur Behandlung von Markov–Prozessen nochmals zusammen.

7 Optionspreise nach Black–Scholes

7.1 Die Black–Scholes –Differentialgleichung

Wir verwenden nun den Itô–Kalkül zur Herleitung der Black–Scholes–Formel. Diese Herleitung findet sich beispielsweise in [15, 20, 21, 2, 16, 17].

Nehmen wir log–normalverteilte Aktienkurse an bei einer risikolosen Verzinsung r, so bedeuted dies

$$dx = rx\, dt + \sigma x\, dz. \quad (222)$$

Damit ergibt sich

$$dx^2 = \sigma r x^2\, dx\, dt + \sigma^2 x^2 dz^2 + r^2 x^2 dt^2 \approx \sigma^2 x^2\, dt. \tag{223}$$

Berechnen wir nun das Differential des logarithmischen Aktienkurses $f[x] = \ln x$. Mit Hilfe von Itô's Lemma (216) finden wir für

$$A[x,t] = rx, \qquad B[x,t] = \sigma x, \tag{224}$$

sowie mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{225}$$

daß

$$\begin{aligned} d\ln x(x,t) &= \left(rx\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma x \frac{\partial f}{\partial x}\, dz \\ &= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dz. \end{aligned} \tag{226}$$

Also ist $d\ln x$ normalverteilt mit Varianz $\sigma^2 dt$ und Mittelwert $\left(rx - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt$. Daher ist die Summenvariable $\ln x$ ebenfalls normalverteilt mit Varianz $\sigma^2 t$ und Mittelwert $\left(rx - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t$. Wir hatten bereits gesehen, daß eine direkte Berechnung diese Resultats ohne benutzung von Itô's Lemma sehr viel schwieriger vonstatten ging.

As nächstes betrachten wir eine von x und evtl. auch von t abhängige Zufallsvariable $C(x,t)$. Solch eine Zufallsvariable wird nun im Folgenden den Preis eines beliebigen Derivats darstellen. Wir werden speziell den Fall später detaillierter diskutieren in dem C den Preis einer Call–Option represäntiert.

Grundlegend für den Zugang von Black–Scholes ist die Moglichkeit durch Halten des Underlyings des Derivats ein risikoloses Portfolio zu konstruieren. Dazu betrachten wir ein Portfolio bestehend aus einer Option und von $-\phi$ Anteilen des Underlyings,

$$W = C - \phi x. \tag{227}$$

Analog ist $-W$ das Portfolio des Verkäufers der Option (Schreiber, Halter der Short–Position). Der Preis $-C$ entspricht der Verpflichtung, die der Schreiber der Option eingegangen ist. Durch Kauf der gleichen Option, also zum Preis von C, kann sich der Schreiber von dieser Verpflichtung wieder freistellen. Die Variable ϕ beschreibt aus dieser Sicht den Underlyinganteil (z.B. Aktien), den der Schreiber hält, z.B. zum Zwecke des Absicherns der möglichen aus dem Optiongeschäft entstehenden Verluste (hedgen). Wir haben nun eine Kette von Zufallsvariablen definiert,

$$(z,t) \to x(z,t) \to C(x,t) \to W(C,t). \tag{228}$$

Um zur Black–Scholes–Formel zu gelangen, müssen wir nun das stochastische Differential dC bestimmen. Dies geschieht mit Hilfe von Itô's Lemma (216). Zusätzlich müssen wir die Forderung nach Arbitragefreiheit einbeziehen. Diese wird durch eine Bedingung an dW formuliert. So gelangen wir zu einer stochastischen Differentialgleichung für den Preis C. Als deren Lösung werden wir schließlich die Black–Scholes–Formel finden.

Nehmen an, daß während des Zeitschrittes nicht gehandelt wird, also daß $d\phi = 0$, so gilt

$$dW(x) = dC(x) - \phi\, dx = dC(x) - \phi\ (rxdt + \sigma xdz)\,. \tag{229}$$

Durch Anwendung von Itô's Lemma (216) erhalten wir nun für den Preis C eines beliebigen Derivats,

$$\begin{aligned} dC(x,t) &= \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\,dt + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}\,dz + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 dz^2 + \frac{\partial C}{\partial t}\,dt \\ &= B[x,t]\frac{\partial C}{\partial x}\,dz + \left(A[x,t]\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2}B^2[x,t]\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t}\right) dt \\ &= \sigma x\frac{\partial C}{\partial x}\,dz + \left(rx\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t}\right) dt. \end{aligned} \tag{230}$$

Damit ergibt sich

$$dW = \sigma x \underbrace{\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \phi\right)}_{\substack{=0\\ \text{bei opt. Hedg.}}} dz\ + \left(\underbrace{rx\frac{\partial C}{\partial x} - rx\,\phi}_{\substack{=0\\ \text{bei opt. Hedg.}}}\ + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t}\right) dt. \tag{231}$$

Interessanterweise sieht man bereits hier, daß bei der Wahl von

$$\phi = \frac{\partial C}{\partial x} \tag{232}$$

der Zufallsterm dz eliminiert wird (und an dieser Stelle auch vorläufig die Variable r herausfällt). Wir bezeichnen diese Wahl im Folgenden als "optimales Hedging", da dadurch der Zufallseinfluß , und damit das Risiko, vollständig eliminiert wird. Wir erhalten damit,

$$dW = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t}\right) dt. \tag{233}$$

Um weiterhin die Variable W zu eliminieren, brauchen wir eine zweite Bedingung. Diese folgt aus der Forderung nach Arbitragefreiheit. In der Tat haben wir bereits diskutiert, daß Arbitragegewinne möglich sind bei Abweichungen einer (durch Wahl der optimalen Hedginstrategie) deterministischen Wertentwicklung des Portfolios W von einer sich durch durch Verzinsung des Vermögens ergebenden risikolosen Anlage. Eine risikolose Verzinsung entspricht einem Differential [siehe Gl. (222)],

$$dW = rW\,dt. \tag{234}$$

Setzen wir nun also (233) und (234) gleich, erhalten wir

$$rW dt = \left(\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t} \right) dt. \tag{235}$$

Kürzen von dt liefert,

$$0 = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t} - rW, \tag{236}$$

und Einsetzen der Definition von W,

$$0 = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t} - r \left(C - \phi x \right). \tag{237}$$

Nach W wird nun ϕ eliminiert durch Einsetzen der optimalen Hedgingstrategie (232),

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - rx \frac{\partial C}{\partial x} + rC. \tag{238}$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung von Black–Scholes.

Diese Gleichung folgt also aus:

1. Der Anwendung von Itô's Lemma (216), unter Annahme eines log–normal verteilten Aktienkurses (222),
2. dem Verwenden einer optimalen Hedgingstrategie (232),
3. sowie der Annahme der Arbitragefreiheit, entsprechend Gl. (234).

Insbesondere ist es bemerkenswert, daß bisher keinerlei Annahmen über die Art des Derivats, d.h. der Funktion C, gemacht wurden. Die Black–Scholes Differentialgleichung kann also verwendet werden um den Preis beliebiger Derivate zu berechnen (unter den notwendigen idealisierten Bedingungen, wie fehlende Transaktionskosten, sowie der Möglichkeit eines kontinuierlichen Handels von beliebigen Underlyinganteilen inklusive Shortselling). Die verschiedenen Derivate (z.B Call/Put–Optionen) werden alleine durch die Randbedingungen unterschieden.

Technisch gesehen, handelt es sich bei der Black–Scholes–Differentialgleichung um eine Gleichung von der Art einer Diffusionsgleichung. Die klassiche Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{239}$$

enthält als Ableitungsterm in x nur eine zweite Ableitung. Zudem unterscheidet sich das Vorzeichen dieses Terms von dem der Black–Scholes–Differentialgleichung. Dies mag auf den ersten Blick problematisch erscheinen, da Anfangswertprobleme für solch eine Diffusionsgleichung mit "falschem" Vorzeichen keine stabile Lösung haben. In der Tat entspricht ein Anfangswertproblem für solch eine Gleichung mit zusätzlichem Minuszeichen nach der Substitution $t \to -t$ einer rückwärts zu lösenden Diffusionsgleichung, also dem Problem bei gegeben

Endzustand den entsprechenden Anfangszustand zu suchen. Da die Diffusionsgleichung Unebenheiten der Anfangsverteilung glättet, werden bei umgekehrter Zeitentwicklung kleinste Störungen verstärkt. Die entsprechenden Lösungen sind also nicht stabil gegenüber kleinsten Änderungen der Anfangsverteilung. Wie wir jetzt sehen werden, ist jedoch bei klassischen Anwendungen der Black–Scholes–Differentialgleichung nicht der Anfangs– sondern der Endwert von C vorgegeben. Dadurch kann Gl. (238) durch geeignete Substitutionen in ein Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Diffusionsgleichung überführt werden. Dessen Lösungen sind stabil.

7.2 Der Preis einer Call–Option

Zur Berechnung des Preises einer (europäischen) Call–Option müssen daher als erstes die entsprechenden Randbedingungen festgelegt werden. Zum Fälligkeitstermin gilt $C(x,T) = \max(x - x_s, 0)$. Bei einem Underlyingkurs von 0 ist es nie lohnend das Optionsrecht wahrzunehmen. Da weiterhin ein Kurs von 0 unter einem log–normalem Model sich nicht mehr verändert gilt also für alle Zeiten $C(0,t) = 0$. Im Limes $x \to \infty$ lohnt es sich die Option einzulösen. Bei europäischen Optionen ist dies jedoch nur zum Fälligkeitstermin möglich. Berücksichtigung des Zinsfaktors liefert $\lim_{x\to\infty} C(x,t) = \lim_{x\to\infty}\left(x - x_s e^{-r(T-t)}\right) = x$.

Um die Black–Scholes–Differentialgleichung (238) zu vereinfachen, substituieren wir nun

1. $x = x_s e^y$, um von log–normal zu normalverteilten Größen überzugehen, d.h um die Potenzen von x vor den Ableitungstermen zum Verschwinden zu bringen,
2. $t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$, um eine dimensionslose Variable τ zu bekommen und um das Endwertproblem bzgl. t in ein Anfangswertproblem bzgl. τ zu überführen,
3. sowie $C(x,t) = x_s v(x,\tau)$ um eine dimensionslose Preisvariable zu erhalten.

Gl. (238) wird nun

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial y} - kv, \tag{240}$$

mit nur einem dimensionslosen Parameter $k = \frac{2r}{\sigma^2}$, und der Randbedingung

$$v(y,0) = \max(e^x - 1, 0). \tag{241}$$

Um neben der Zeitableitung nur einen Term mit zweiter Ableitung überzubehalten verwenden wir den Ansatz,

$$v(y,\tau) = e^{\alpha y + \beta\tau} u(y,\tau). \tag{242}$$

Eingesetzt in Gl.(240) entsteht,

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (k-1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - ku. \tag{243}$$

Die niedrigeren Ableitungsterme verschwinden, wenn

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \tag{244}$$

$$0 = 2\alpha + (k-1). \tag{245}$$

Dies läßt sich auflösen nach α, β

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \tag{246}$$

$$\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2, \tag{247}$$

so daß also bei der Wahl von u mit

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)y - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(y,\tau), \tag{248}$$

aus (238) die Diffusionsgleichung wird

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{249}$$

Hierbei ist $-\infty < x < \infty$, $\tau > 0$, und es gilt die Randbedingung

$$u(y,0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)y} - e^{\frac{1}{2}(k-1)y}\right). \tag{250}$$

Die Lösung der Diffusionsgleichung ist wohlbekannt (Nachprüfen durch Einsetzen, oder alternativ, durch Lösen durch Fouriertransformation). Für ein Anfangswertproblem lautet die Lösung der Diffusionsgleichung

$$u(y,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, u(s,0)\, e^{-\frac{(y-s)^2}{4\tau}}, \tag{251}$$

wobei $u(s,0)$ die Anfangswertverteilung aus Gl. (250) bezeichnet. Die max—Funktion kappt die untere Integrationsgrenze, und das resultierende Integral ist uns bei der Behandlung des Zuganges von Bouchaud–Sornette–Potters schon begegnet. Rückführung auf das Integral $G(a)$ in (253) und Rücksubstitution der Orginalvariablen liefert genau wie dort die Black–Scholes–Formel für eine europäische Call–Option,

$$C(x,t) = xG\left(\frac{y_-}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - x_s e^{-r(T-t)} G\left(\frac{y_+}{\sigma\sqrt{T-t}}\right), \tag{252}$$

mit

$$G(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}x^2}, \tag{253}$$

und

$$y_- = \log x_s - \log x - r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \tag{254}$$

$$y_+ = \log x_s - \log x - r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t). \tag{255}$$

Die Abhängigkeiten des resultierenden Preises von den verschiedenen Parametern haben wir bereits ausführlich in der letzten Vorlesung diskutiert.

Wir fassen abschließend nocheinmal die Voraussetzungen, die dem Ansatz von Black–Scholes zugrunde liegen, zusammen:

1. Keine Arbitragemöglichkeit
2. Log–normal verteilte Aktienkurse
3. Zinsrate r ist bekannt
4. Volatilität σ ist bekannt
5. Keine Transaktionskosten
6. Kontinuierliches Handeln möglich
7. Shortselling ist erlaubt
8. Aktien sind beliebig teilbar
9. Keine Dividenden

Mehr pragmatisch orientierte Informationen zum Handel mit Derivaten findet man in [18, 3, 4]. Eine Sammlung von Optionspreisformeln (ohne Herleitungen) für verschiedenartigste Optionen ist [14].

Abschließend bemerken wir noch, daß die Black–Scholes–Formel von einer Kenntnis der Volatilität σ ausgeht. Empirisch zugänglich sind jedoch nur die historischen Volatilitäten, wie sie den Kursentwicklungen der Vergangenheit entnommen werden können. Die von den Marktteilnehmern für die Zukunft erwarteten Volatilitäten können davon jedoch wesentlich verschieden sein. In der Tat, unterscheiden sich die historischen Volatilitäten deutlich von den "impliziten" Volatilitäten, d.h. denjenigen die sich aus den tatsächlichen Optionspreisen unter Annahme der Black–Scholes–Formel ergeben [6, 5]. Diese Abweichungen zwischen historischen und impliziten Volatilitäten können teilweise auch als Korrekturen des Marktes aufgefaßt werden, die beispielsweise der Abweichung der tatsächlichen Verteilung der Aktienkurse (z.B. lange Schwänze) von der der Black–Scholes–Formel zugrunde liegenden Log–Normal–Verteilung Rechnung tragen.

Literatur

[1] L. Arnold: *Stochastic Differential Equations* Wiley, New York, 1974.

[2] M. Baxter, A. Rennie: *Financial Calculus.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[3] R. Beike, A. Potthoff: *Optionsscheine.* (2. Auflage) Beck–Wirtschaftsberater im dtv, Verlag Beck, München, 1998.

[4] R. Beike, J. Schlütz: *Finanznachrichten. Lesen–Vestehen–Nutzen.* (2. Auflage) Schäffer–Poeschel Verlag, Stuttgart, 1999.

[5] C. Bennemann, C. Burmester, A. Werner: *Random Walk auf dem Börsenparkett.* Physikalische Blätter, **56** (2), 61–63, 2000.

[6] J.-P. Bouchaud, M. Potters: *Theory of Financial Risk.* Draft version available from `http://www.science-finance.fr`, 1999.

[7] H. Diwald: *Zinsfutures und Zinsoptionen.* Beck–Wirtschaftsberater im dtv, Verlag Beck, München, 1994.

[8] E.J. Elton, M.J. Gruber: *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.* John Wiley and Sons, New York, 1995.

[9] S. Galluccio, J.–P. Bouchaud, M. Potters: *Rational Decisions, Random Matrices, and Spin Glasses.* `arXiv:cond-mat/9801209`

[10] C. W. Gardiner: *Handbook of Stochastic Methods.* (2.te korrigierte Auflage) Springer–Verlag, Berlin, 1990.

[11] I. I. Gihman, A. V. Skorohod; *Stochastic Differential Equations* Springer, Berlin, 1972.

[12] N. G. van Kampen: *Stochastic Processes in Physics and Chemistry.* North–Holland, Amsterdam, 1992.

[13] H. Markowitz: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.* John Wiley and Sons, 1959; Yale University Press, 1970; Basil Blackwell, 1991.

[14] E. G. Haug: *The Complete Guide to Option Pricing Formulas.* MacGraw–Hill, New York, 1997.

[15] J. Hull: *Options, Futures, and Other Derivative Securities.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[16] A. Irle: *Finanzmathematik.* Teubner Studienbücher Mathematik. Teubner Verlag, Stuttgart, 1998.

[17] R. Korn, E. Korn: *Optionsbewertung und Portfolio–Optimierung.* Gabler/Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1999.

[18] I. Uszczapowski: *Optionen und Futures verstehen.* Beck–Wirtschaftsberater im dtv, Verlag Beck, München, 1991.

[19] H. von Weizsäcker, G. Winkler: *Stochastic Integrals.* Vieweg Verlag, Braunschweig, 1990.

[20] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison,: *Option Pricing: Mathematical Models and Computation.* Oxford Financial Press, Oxford, 1993.

[21] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne: *The Mathematics of Financial Derivatives.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

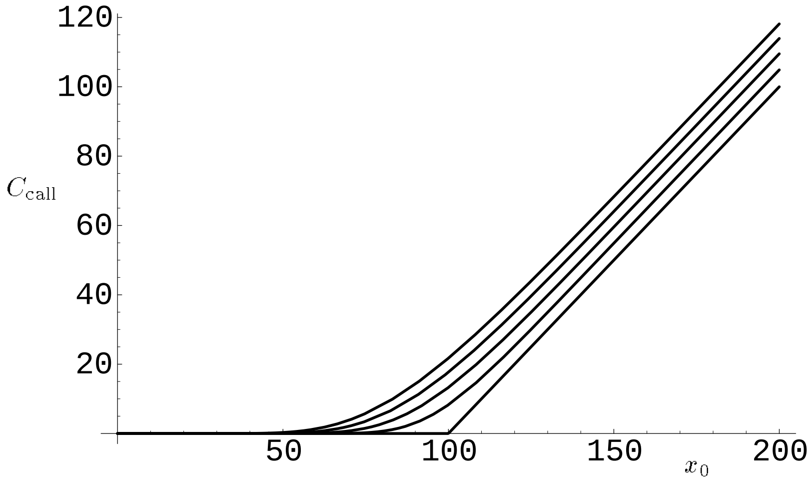

Abbildung 12: Preis einer Call–Option nach Black–Scholes bei einer Standardabweichung von $\sigma = 0.2$ (20%) pro Jahr, einem Basispreis von $x_s = 100$, und einer jährlichen risikofreien Zinsrate von $r = 0.1$ (10%). Gezeigt ist die Abhängigkeit des Preises C vom aktuellen Kurs x_0 des Underlyings für eine verschiedene Anzahl von Tage bis zum Ablauf der Option. Von links nach rechts: $T = 2$, 1.5, 1, 0.5, 0 Jahre.

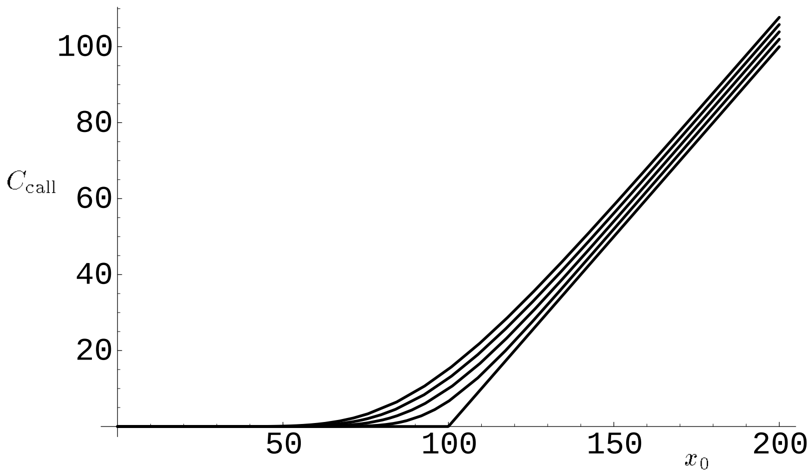

Abbildung 13: Wie Abb.12 jedoch bei einer risikofreien Zinsrate von $r = 0.04$ (4%) pro Jahr. (Ebenfalls, von links nach rechts, für $T = 2$, 1.5, 1, 0.5, 0 Jahre.)

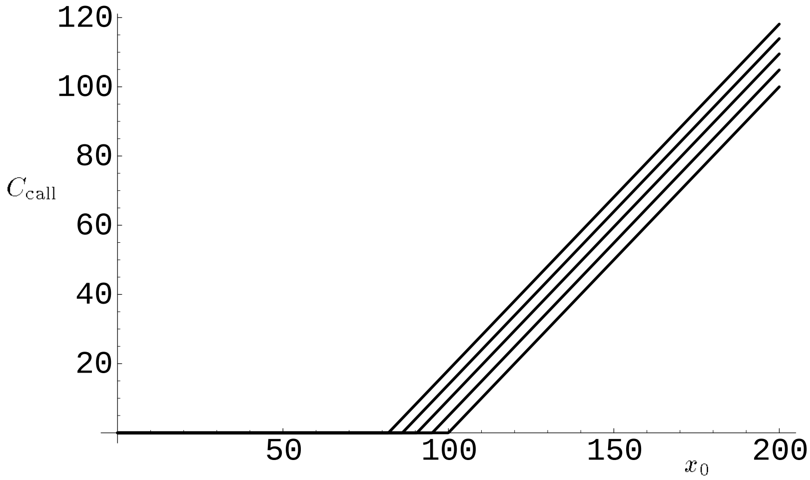

Abbildung 14: Wie Abb.12 jedoch bei einer Volatilität von $\sigma = 0.001$ (0.1%) pro Jahr. (Ebenfalls, von links nach rechts, für $T = 2$, 1.5, 1, 0.5, 0 Jahre.) Die Abbildung zeigt also den Zinseffekt am Optionspreis.

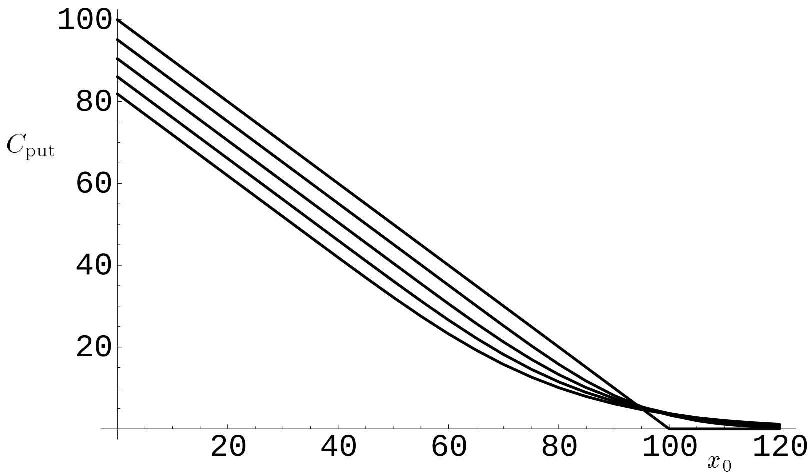

Abbildung 15: Preis einer Put–Option nach Black–Scholes bei einer Standardabweichung von $\sigma = 0.2$ (20%) pro Jahr, einem Basispreis von $x_s = 100$, und einer jährlichen risikofreien Zinsrate von $r = 0.1$ (10%). Gezeigt ist die Abhängigkeit des Preises C vom aktuellen Kurs x_0 des Underlyings für eine verschiedene Anzahl von Tage bis zum Ablauf der Option. Von links nach rechts (bezogen auf das obere Ende): $T = 2$, 1.5, 1, 0.5, 0 Jahre. Der Preis ergibt sich aus der "Put–Call Parity" [Gl. (142),Abb. 18] als $C_{\rm put} = C_{\rm call} + x_s e^{-rT} - x_0$.

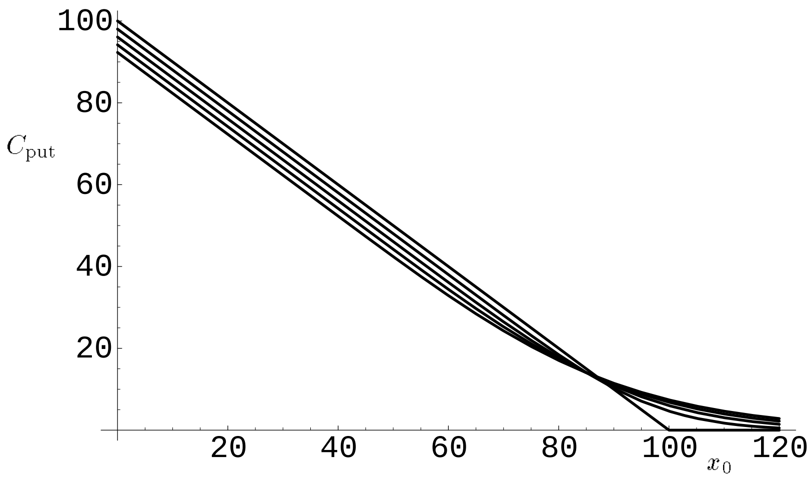

Abbildung 16: Wie Abb. 15 jedoch für eine jährliche risikofreie Zinsrate von $r = 0.04$ (4%). Von links nach rechts (bezogen auf das obere Ende): $T = 2$, 1.5, 1, 0.5, 0 Jahre.

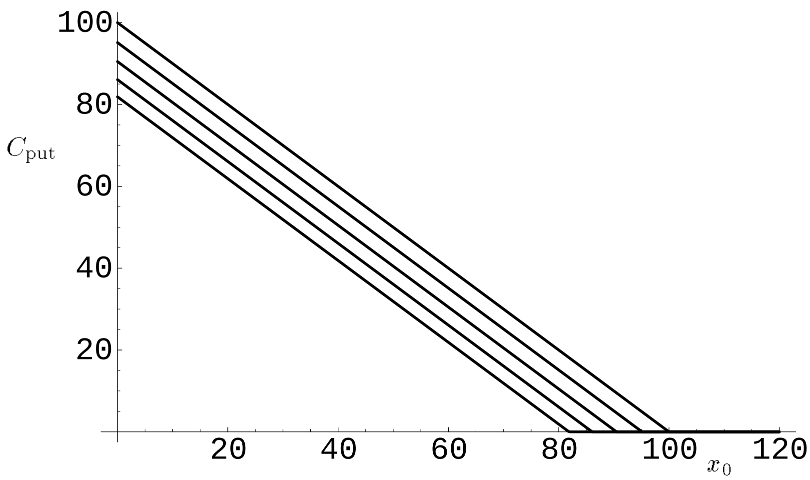

Abbildung 17: Wie Abb. 15 jedoch für eine Volatilität von $\sigma = 0.001$ (0.1%) pro Jahr. Von links nach rechts: $T = 2$, 1.5, 1, 0.5, 0 Jahre.

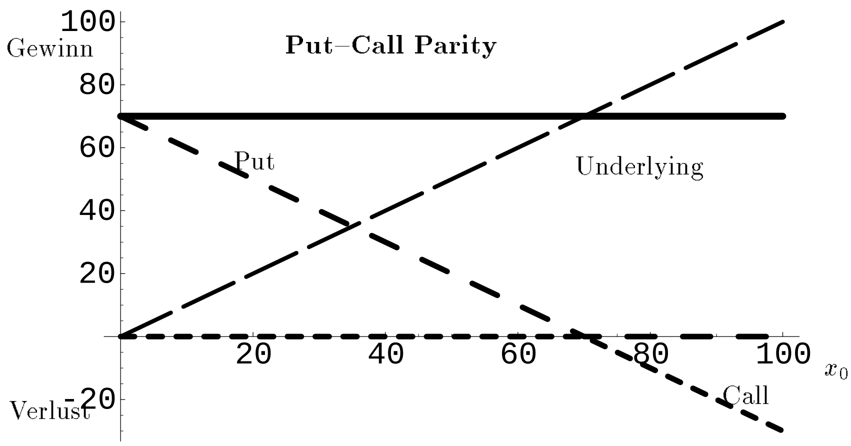

Abbildung 18: Put–Call Parity: Ein Portfolio, aus 1. einem Underlying (Long–Position), 2. einer gekauften Put–Option (Long–Position) zum Basispreis $x_s = 70$ und 3. einer verkauften Call–Option (Short–Position) ebenfalls mit $x_s = 70$ und der gleichen Fälligkeit wie Put, hat zum Fälligkeitstermin einen risikolosen Wert von x_s. Daraus Preis ergibt sich eine Beziehung zwischen den Preisen der Put– und der Call–Option $C_{\rm put} = C_{\rm call} + x_s e^{-rT} - x_0$. [Gl. (142)].

Markov–Prozeß

$$p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \cdots; x_1, t_1) = p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

$$\downarrow$$

Chapman–Kolmogorov–Gleichung:

$$p(x, t | x_0, t_0) = \int dx' \, p(x, t | x', t') p(x', t' | x_0, t_0)$$

$$\downarrow$$

Master–Gleichung:

$$\frac{\partial p(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = \int \Big(\underbrace{W_t(x | x') \, p(x', t | x_0, t_0)}_{\text{Gewinn}} - \underbrace{W_t(x' | x) \, p(x, t | x_0, t_0)}_{\text{Verlust}} \Big) dx'$$

$$\downarrow$$

Fokker–Planck–Gleichung:

(für Prozesse mit stetigen Pfaden)

$$\frac{\partial p(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = \underbrace{- \frac{\partial}{\partial x} A[x, t] \, p(x, t | x_0, t_0)}_{\text{Drift}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big(B^2[x, t] \, p(x, t | x_0, t_0) \Big)}_{\text{Fluktuationen}}$$

$$\updownarrow$$

equivalent zu stochastischer Differentialgleichung

im Itô Kalkül:

$$dx = \underbrace{A[x, t] dt}_{\text{Drift}} + \underbrace{B[x, t] dz}_{\text{Fluktuationen}}$$

$$\updownarrow$$

im Stratonovich Kalkül:

$$dx = \left(A[x, t] - \tfrac{1}{2} B[x, t] \frac{\partial}{\partial x} B[x, t] \right) dt + B[x, t] dz$$

Abbildung 19: Überblick über Ansätze zur Behandlung von Markov–Prozessen