Econophysics WS1999/2000: Notizen zur Vorlesung über Forwards und Futures

Jörg C. Lemm

Institut für Theoretische Physik I, Universität Münster
Wilhelm–Klemm–Str.9, D–48149 Münster, Germany
lemm@uni-muenster.de
http://pauli.uni-muenster.de/~lemm/

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkung

In dieser Stunde werden als Vorbereitung zur Behandlung von Optionen (bedingten Terminkontrakten) unbedingte Terminkontrakte vorgestellt.

2 Forwards und Futures

2.1 Forwards

Forwards sind unbedinge Terminkontrakte, also Geschäfte die jetzt vereinbart und später zu den jetzt vereinbarten Konditionen ausgeführt werden. D.h. zur Zeit t_0 wird der Terminkontrakt geschlossen und später zur Zeit t_N wird bezahlt und geliefert. Das Geschäft ist unbedingt (in Gegensatz beispielsweise zu Optionen), d.h. an keine Bedingungen geknüpft. Es kommt daher auf jeden Fall zustande, es sei denn es wird vorher rückgängig gemacht oder eine der beiden Parteien ist nicht in der Lage ihren Verpflichtungen nachzukommen.

2.2 Futures

Futures sind standardisierte, handelbare und abgesicherte unbedingte Terminkontrakte. Die Standardisierung erlaubt einen Handel mit genügender Nachfrage und Angebot. Ein Futurekontrakt kann daher in der Regel jederzeit zum aktuellen Marktpreis (Kurs) ge– und verkauft werden. Die freie Handelbarkeit basiert ebenfalls auf einer zusätzlichen Abgesicherung: Die Clearingstelle stellt durch das Fordern von Margins (Ein– und Nachschüsse, siehe unten) sicher, daß keine Partei ausfallen kann.

2.3 Einige grundlegende Begriffe

Die auf Termin gehandelten Waren (Aktien, Anleihen, Devisen oder andere Güter) sind das Underlying des Terminkontraktes. Folgender Sprachgebrauch ist üblich:

1. Underlying auf Termin verkaufen = *Short–Position*,
2. Underlying auf Termin kaufen = *Long–Position*,

wobei

1. eine Short–Position von fallenden Kursen profitiert,
2. und eine Long–Position von steigenden Kursen profitiert.

Mögliche Motivationen und Beziehungen von Terminmarktteilnehmern sind in Abb. 1 dargestellt. Eine Absicherung gegen schwankende Underlyingkurse wird als Hedging bezeichnet. Ein Hedger in der Long–Postion benötigt das Underlying (z.B. Rindfleisch) zum Zeitpunkt t_N. Um sich gegen Preisschwankungen zu schützen kann er bereits zu einem früheren Zeitpunkt t_0 das benötigte Underlying kaufen. Ein Hedger in der Short–Postion hat das Underlying (z.B. ein Bauer mit Rindern) und möchte sich Spekulanten haben und brauchen das Underlying nicht direkt, sie wollen an Kursschwankungen verdienen. Arbitrageure (siehe unten) werden aktiv sobald die Terminpreise zu hoch oder zu tief liegen und einen risikolosen gewinn Ermöglichen. In diesem Sinne tragen sie dazu bei, daß der Terminpreis marktgerecht ist. Für weitere Details siehe [1, 3, 5, 4].

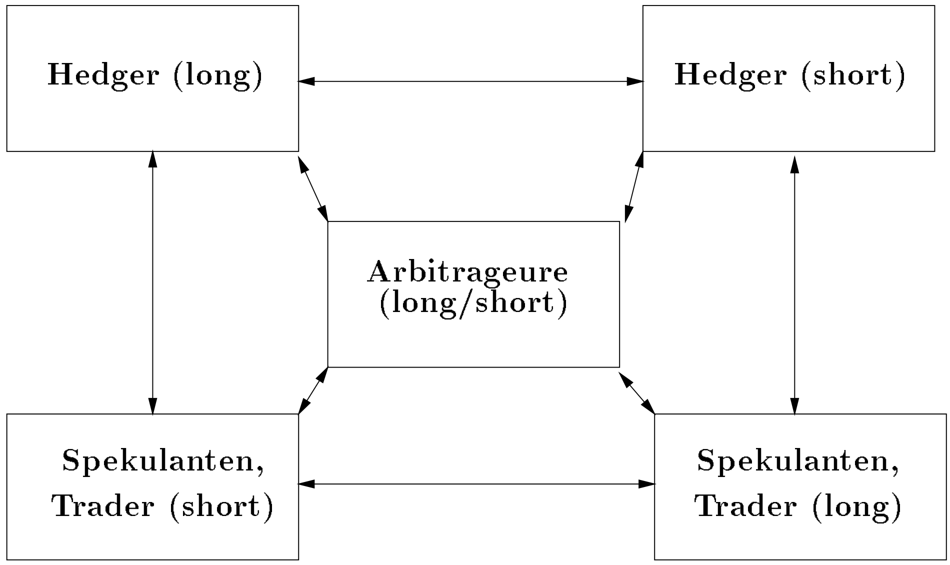

Abbildung 1: Mögliche Motivationen und Beziehungen von Terminmarktteilnehmern.

2.4 Beispiel: DAX Futures (Eurex)

2.4.1 Spezifikation FDAX

Contract Standard:	The Deutscher Aktienindex (DAX).
Contract Value:	EUR 25 per DAX index point.
Settlement:	Cash settlement based on the final settlement price, payable on the first exchange trading day immediately following the last trading day.
Quotation:	In points, carried out one decimal place.
Min. Price Movem.:	0.5 of a point, representing a value of EUR 12,50.
Contract Terms:	The three nearest months within the cycle March, June, September, December.
Last Trading Day:	The third Friday of the expiration month, if that is an exchange trading day; otherwise, on the exchange trading day immediately prior to that Friday. Trading ceases at the start of the intra-day trading auction on the electronic trading system (Xetra), at 1:00 p.m. CET, as determined by the management of the Frankfurt Stock Exchange.

Daily Settlement Price: The last-paid price of the trading day; or, if the last-paid price is older than 15 minutes or does not reasonably reflect actual market conditions, then Eurex will establish the official settlement price.

Final Settlement Price: The value of the DAX, determined on the basis of the collective prices of the shares contained in the DAX index on the last trading day, as reflected in the intra-day trading auction on the electronic system of the Frankfurt Stock Exchange (Xetra).

Trading Hours: 8:50 a.m. until 5:30 p.m. CET.

2.4.2 Aktuelle Kurse des FDAX und des DAX

Die folgende Tabelle zeigt als Beispiel die aktuellen Kurse des FDAX (Wertpapierkennnummer (WKN): 846959) der momentan erhältlich ist mit den folgenden drei Fälligkeitsterminen: 03/2000, 06/2000, 09/2000. (Quelle: Eurex `http://www.eurexchange.com/`).

Dax–Futures am 14.1.2000 (FDAX):

Delivery	Opening	Daily High	Daily Low	Closing Price	Settlement	Traded Contracts	Open Interests
Mar 00	7050.00	7246.00	7050.00	7229.00	7229.00	63'855	139'346
Jun 00	7115.00	7296.00	7115.00	7296.00	7283.00	946	11'952
Sep 00	7213.00	7322.00	7212.00	7300.00	7354.00	25	1'344

Zum Vergleich der Kurs des "Underlyings" d.h. des DAX (Quelle Handelblatt vom 17.1.2000):

Dax–Performance–Index am 14.1.2000:

	Anfang	Tages–Hoch	Tages–Tief	Schluß	Settlement	Vortag
DAX	6960.29	7207.45	6960.29	7173.22	7094.23	6955.98

(Historische Volatilität des DAX: 26.17% per annum in den letzten 30 Tagen bzw. 21.29% per annum in den letzten 250 Tagen.)

Die folgende Tabelle zeigt die relativen prozentualen Differenzen zischen den Terminpreisen des DAX und dem Kassapreis des DAX:

	FDAX-DAX	$\frac{100(\text{FDAX} - \text{DAX})}{\text{DAX}}$	Monate	$\frac{12}{\text{Monate}} \frac{100(\text{FDAX} - \text{DAX})}{\text{DAX}}$
Mar 00	134.77	1.9%	ca. 2	11.4%
Jun 00	188.77	2.7%	ca. 5	6.48%
Sep 00	259.77	3.7%	ca. 8	5.5%

Zum Beispiel beträgt die Differenz der Settlement–Preise FDAX(Mar 00) - DAX = 7229.00 DM−7094.23 DM = 134.77 DM. Dies entspricht einer Verzinsung von ca. 1.9% auf den DAX bis zum Fälligkeitstermin in ca. 2 Monaten (3.ter Freitag im März), und damit einer jährlichen Verzinsung (ohne Zinseszinseffekte) von ungefähr 11%. Falls den DAX representierende Papiere zu diesem Zeitpunkt zum aktuellen DAX–Kurs erworben werden konnten, hätte der Kauf des DAX–Futures zum aktuellen Kurs in diesem Moment eine lohnende risikolose Rendite ermöglicht (siehe auch Abschnitt 3).

Nachtrag vom 19.1.2000: Am 18.1.2000 betrug der Settlementpreis des DAX Futures mit Fälligkeit März 2000 (FDAX(Mar 00)–Kontrakt) 7123.00 DM bei einem DAX–Schlußkurs von 7072.12 DM. Die Differenz hat sich also reduziert auf 50.88 DM, beziehungsweise prozentual auf den DAX bezogen, auf 0.72%. Dies entspricht einer jährlichen Verzinsung von ungefähr 4.3%. und damit eher dem Zinsniveau von risikoarmen Anleihen. Die folgende Tabelle gibt den Stand vom 18.1.2000 wieder:

	FDAX	FDAX-DAX	$\frac{100(\text{FDAX} - \text{DAX})}{\text{DAX}}$	$\frac{12}{\text{Monate}} \frac{100(\text{FDAX} - \text{DAX})}{\text{DAX}}$
Mar 00	7123.00	50.88	0.72%	4.31%
Jun 00	7177.00	104.88	1.48%	3.56%
Sep 00	7249.00	176.88	2.50%	3.75%

2.5 Margin–Konto

Zur Absicherung des Erfüllungsrisikos benötigt jeder der einen Futurekontrakt kaufen will ein Marginkonto, auf dem die durch die täglichen Kursschwankungen des Futures sich ergebenden Gewinne oder Verluste verbucht werden. Bei Kauf eines Kontraktes muß hierbei eine Sicherheitsleistung (Ertseinschuß oder Initial Margin, and der Deutschen Börse: Additional Margin) eingezahlt werden. Der Initial Margin wird dabei so bemessen, daß er die größte für möglich erachtete Tagesschwankung (worst case) auffangen kann. Bei für den Akteur negativer Kursentwicklung muß dann das durch die aktuellen Verluste belastete Marginkonto wieder aufgefüllt werden (Nachschüsse oder Variation Margin) so daß die hinterlegte Summe stets mindestens dem Initial Margin entspricht. Ist er dazu nicht in der Lage wird seine Position automatisch glattgestellt, d.h. sein Kontrakt zum aktuellen Kurs weiterverkauft. Dadurch ist garantiert das der Future erfüllt werden kann und keine Partei ausfällt. Diese Sicherheit ist ein wesentlicher Vorteil eines Futures gegenüber eines ungesicherten Forwards. Außerdem ermöglicht dies die unmittelbare Realisierung der aktuellen Gewinne und Verluste.

Beispiel: Angenommen, Kunde A kaufte am 13.1.2000 einen FDAX(Mar 00) Kontrakt zum Schlußkurs von 7009.00 DM (long position, Spekulation auf steigenden DAX oder Absichern geplanter Aktienkäufe gegen steigenden DAX) von Kunden B (short position, Spekulation auf fallenden DAX oder Absichern eigener Aktien gegen fallenden DAX).

Bei einem Settlementpreis am 14.1.2000 von 7229.00 DM beträgt die Wertänderung eines FDAX(Mar 00)–Kontraktes (mit einem Wert von 25 Euro pro Indexpunkt, wie oben angegeben)

$$\begin{aligned} 7009.00 * 25\text{EUR} &= 175225\text{EUR} \\ 7229.00 * 25\text{EUR} &= 180725\text{EUR} \\ \text{Differenz} & \quad\;\; 5500\text{EUR} \end{aligned}$$

Nehmen wir an der Initial Margin sei auf 15000 EUR pro Kontrakt festgelegt. Dann ergibt sich nach Abschluß der Handelsperiode am 14.1.2000 für das Marginkonto der folgende Kontostand:

	A (long position)			B (short position)		
Datum	Kontostand	Gutschrift	Belastung	Gutschrift	Belastung	Kontostand
13.1.2000	15000 EUR	-	-	-	-	15000 EUR
14.1.2000	20500 EUR	5500 EUR	-	-	5500 DM	9500 EUR

A kann seinen Gewinn unmittelbar verwenden (z.B. abheben), B hingegen bekommt einen Margin Call und muß sein Konto wieder auf den Stand des Initial Margin (15000 EUR) auffüllen. Ist B dazu nicht in der Lage, wird seine Position glattgestellt, d.h. die Clearingstelle kauft stellvertretend für B eine kompensierende Long–Position zu dem aktuellen Kurs. B hat dadurch einen Verlust von 5500 EUR realisiert. Das Marginkonto wird nach jedem Handelstag aktualisiert (marked to market).

3 Der "faire" Preis eines Forwards

3.1 Erwartungswertprinzip (Bachelier)

Hehmen wir an, daß die am Termingeschäft beteiligten Parteien nicht anderweitig mit dem Underlying handeln, sondern nach Abschluß des Kontraktes schlicht auf den Fälligkeitstermin warten. Kommt Forwardkontrakt zustande so ist dann der Verlust(bzw. Gewinn) des Halters der Long–Position der Gewinn (bzw. Verlust) des Halters der Short–Position (Nullsummenspiel). Dies ist in Abb. 2. dargestellt. Von einem fairen Preis sollte man also erwarten, daß der erwartete Gewinn für beide Parteien gleich, d.h. also Null, ist. (Vgl. aber nächsten Abschnitt.) Der Schreiber eines Forwards (short position), beispielsweise, erhält zum Fälligkeitstermin t_N die Summe F und muß dafür das Underlying liefern zum aktuellen Preis x_N. Seine Vermögensänderung zur Zeit t_N ist dann also

$$\Delta W = F - x_N. \tag{1}$$

Ein fairer Preis sollte also die erwartete Vermögensänderung auf Null setzen $< \Delta W_N > = 0$. Es ergibt sich also

$$< \Delta W >= 0 \Rightarrow F =< x_N >, \tag{2}$$

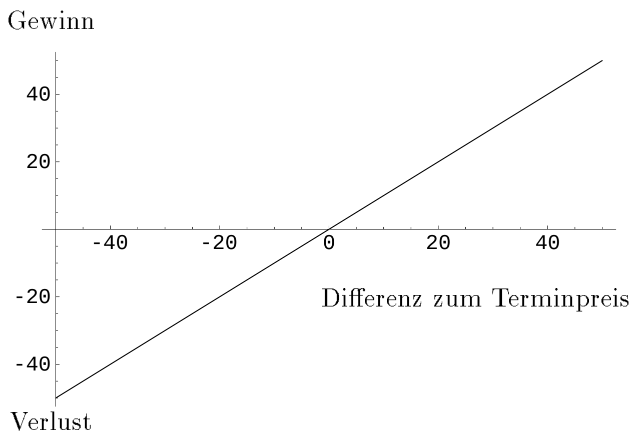

Abbildung 2: Abhängigkeit des Gewinns von Aktuellen Preis des Underlyings am Fälligkeitstermin beim Halten der Long–Position eines Terminkontraktes.

worin $< x_N >$ den Erwartungswert des Underlyingkurses bezeichnet.

3.2 No–Arbitrage–Prinzip

Die Überlegungen des vorherigen Abschnitts basieren auf der Annahme, daß die beteiligten Parteien keine weiteren Handelsaktionen mit dem Underlying ausführen. Dies ist etwa der Fall wenn das Underlying gar nicht handelbar ist. Unter der Annahme jedoch, daß das Underlying auch bereits zur Zeit t_0 gehandelt werden kann hat der Schreiber des Forwards (d.h., der Halter der Short–Position) eine andere Möglichkeit: Er kann seine Position absichern (hedgen). In diesem Falle kauft er das Underlying bereits zum Zeitpunkt t_0 zum Preis x_0. Ihm entgeht dabei ein Zinsgewinn von $x_0(1-e^{r(t_N-t_0)}$ (cost of carry). Als fairer Preis ergibt sich daher

$$F = x_0 e^{r(t_N-t_0)}. \tag{3}$$

Ein höherer Forwardpreis F, beispielsweise, würde ihm eine risikolose Verdienstmöglichkeit (Arbitrage) ermöglichen. Ähnlich liesse sich aus einem zu niedrigem Forwardpreis ein risikoloser Gewinn machen, falls die Möglichkeit des Leerverkaufens (Shorten) des Underlyings existiert.

Analog läßt sich beispielsweise eine Short–Position auf den Kauf einer Kuh absichern durch den Kauf einer Kuh. Ein marktgerechter Forwardpreis wäre in diesem Fall der Erwartungswert der folgenden Summe: Preis einer Kuh +Kosten für Futter und Stall -Ertrag für Milch +Zinsen für die dafür nötigen Geldmittel.

Ein Halter der Short–Position der sich in dieser Weise abgesichert hat trägt bei solch einem marktgerechten Preis kein Risiko. (Er macht dann allerdings auch keinen Gewinn. Weiterhin nimmt er dann auch nicht an einer etwaigen für ihn positiven Kursentwicklung teil.)

Der Halter der Long–Position behält dagegen das Risiko (Es sei denn er hat das Underlying vorher leerverkauft, d.h. "geshorted"). Der Verlust/Gewinn des

Halters der Long–Position wird dann indirekt durch Dritte am Markt kompensiert. Also zum Beispiel von demjenigen Dritten der zur Zeit t_0 das Underlying an den Halter der Short–Position verkauft hat. Man bemerke allerdings, daß sich unter diesen idealisierten Bedingungen der Terminkontrakt für beide Seiten nicht lohnt. Der Halter der Long–Position könnte beispielsweise zu dem gleichen Preis selbst das Underlying direkt zur Zeit t_0 kaufen und die notwendigen Zinsen direkt übernehmen anstatt sie über den Terminkontrakt zu bezahlen. In der Praxis sind aber zum Beispiel die Haltungskosten (cost of carry) individuell verschieden. (Ein Farmer kann eine zusätzliche Kuh leichter unterbringen als ein Banker. Die gewährten Zinsraten sind individuell unterschiedlich.) In diesem Sinne, braucht ein Terminkontrakt kein Nullsummenspiel zu sein. Dies wahren Motivationen für Terminkontrakte sind in der idealisierten Theorie nicht enthalten. Diese kann also nur Anhaltspunkt sein zur Bestimmung der Terminpreise die sich am Markt tatsächlich ergeben.

Im allgemeinen sind die Preise, die sich aus dem No–Arbitrage– und dem Erwartungswertprinzip ergeben, verschieden. Auch wenn der Erwartungswert $< x_N >$ in der Regel nicht mit dem No–Arbitrage–Preis $x_0 e^{r(t_N - t_0)}$ zusammenfällt, so sind sie jedoch nicht völlig entkoppelt. Ist mit dem Underlying mit geringem Risiko ein sehr viel größerer Gewinn zu machen (d.h. $< x_N > -x_0$ groß, $< x_N^2 >$ klein) wird es auch für den Halter der Short–Position interessant das geliehene Kapital selbst in das Underlying zu investieren (anstatt zum Hedgen des Terminkontraktes und den Gewinn somit zum Fälligkeitstermin an den Halter der Long–Position abzutreten) und auf einen Kursgewinn zu setzen. (Subtrahiert man von den erwarteten Gewinn einer riskanten Anlageform den möglichen Gewinn einer risikolosen Anlage so findet man den Risikoaufschlag. Dieser sollte einigermaßen homogenen sein für verschiedene Anlageformen. In diesem Sinne also sind Zinsniveau r und Erwartungswert $< x_N >$ durchaus gekoppelt.)

3.3 Handelsstrategien zur Risikominimierung

Um die Behandlung von Optionen vorzubereiten und die grundlegenden Begriffe einzuführen leiten wir den fairen Preis eines Forwardkontraktes nocheinmal etwas formaler her. (Die Vorgehensweise entspricht der in [2].) Es seien W_n das Gesamtvermögen eines Akteurs zum Zeitpunkt t_n, von dem wir nun annehmen, daß es sich aufteilt in Barvermögen B_n und ϕ_n Anteile eines frei handelbaren Underlyings (von welchem wir nun annehmen es handele sich um eine Aktie) mit einem Stückpreis (Kurs zum Zeitpunkt t_n) von x_n. Für das Gesamtvermögen zum Zeitpunkt t_n gilt also

$$W_n = B_n + \phi_n x_n. \tag{4}$$

Weiterhin nehmen wir an, dem betrachteten Akteur stehe eine risikolose Anlageform für sein Geldvermögen zur Verfügung mit dem Zinssatz r. Konkret heißt das, in dem Zeitraum $\tau = t_{n+1} - t_n$, vermehre sich das Geldvermögen B_n um den Betrag $B_n \rho \approx B_n(1 - e^{\rho})$, wobei $\rho = r\tau$. Der Wert des Aktienvermögens ändert sich dagegen durch Änderung der Kurse $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$.

Zur formalen Beschreibung ist es hilfreich die zeitliche Entwicklung des Vermögens W_n in zwei Schritte zu unterteilen: (a) die zeitliche Veränderung des Vermögens durch Verzinsung des Geldes einerseits und die Veränderung des Aktienkurses andererseits. (b) die (instantane) Umschichtung des Vermögens zwischen Bargeld und Aktien. Dies führt auf folgendes Modell:

$$\begin{array}{rccccc} \text{Geld}: & B_n & \to & B_n(1+\rho) & \to & B_n(1+\rho)-(\phi_{n+1}-\phi_n)x_{n+1} = B_{n+1} \\ \text{Aktien}: & \underbrace{\phi_n x_n}_{\text{Zeit: } t_n} & \underbrace{\to}_{\text{(a)}} & \underbrace{\phi_n x_{n+1}}_{\text{Zeit: } t_{n+1}} & \underbrace{\to}_{\text{(b)}} & \underbrace{\phi_{n+1}x_{n+1}}_{\text{nochmals die gleiche Zeit: } t_{n+1}} \end{array} \ldots . \tag{5}$$

(a) Die zeitliche Entwicklung des Vermögens in der Zeit $\tau = \Delta t = t_{n+1} - t_n$ ist daher

$$\Delta B_n^{(a)} = B_n \rho, \tag{6}$$

$$\Delta W_{n,\phi}^{(a)} = \phi_n \Delta x_n, \tag{7}$$

wobei $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. und $W_{n,\phi} = \phi_n x_n$.

(b) Eine Vermögensumschichtung bedeutet Aktienkauf bei Verminderung des Barvermögens bzw. Aktienverkauf bei Erhöhung des Barvermögens,

$$\Delta B_n^{(b)} = -\Delta\phi_n x_{n+1} \tag{8}$$

$$\Delta W_{n,\phi}^{(b)} = \Delta\phi_n x_{n+1}, \tag{9}$$

wobei $\Delta\phi_n = \phi_{n+1} - \phi_n$. Die Vermg̈ensumschichtung selbst ist erfolgsneutral $\Delta W_n^{(b)} = 0$. Insgesamt erhalten wir daher für die Änderung des Vermögens $\Delta W = \Delta W^{(a)}$, d.h.,

$$\Delta W_n = B_n\rho + \phi_n \Delta x_n, \tag{10}$$

$$\Delta B_n = B_n\rho - \Delta\phi_n x_{n+1}. \tag{11}$$

Durch Iteration folgt

$$\begin{aligned} B_n &= B_{n-1} + \Delta B_{n-1} = B_{n-1}(1+\rho) - \Delta\phi_{n-1}x_n \\ &= B_{n-2}(1+\rho)^2 - \Delta\phi_{n-2}x_{n-1}(1+\rho) - \Delta\phi_{n-1}x_n \\ &\ldots \\ &= B_0(1+\rho)^n - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m x_{m+1}(1+\rho)^{n-m-1} \\ &= (1+\rho)^n \left(B_0 - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m \underbrace{x_{m+1}(1+\rho)^{-(m+1)}}_{\widetilde{x}_{m+1}} \right) \\ &= (1+\rho)^n \left(B_0 - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m \widetilde{x}_{m+1} \right), \end{aligned} \tag{12}$$

mit diskontierten (auf t_0 abgezinsten) $\widetilde{x}_n = x_n(1+\rho)^{-n}$. Damit erhalten wir ebenfalls

$$
\begin{aligned}
W_n &= B_n + \phi_n x_n \\
&= \underbrace{B_0(1+\rho)^n}_{\substack{\text{verzinstes}\\ \text{Barkapital}}} \underbrace{- \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m x_{m+1}(1+\rho)^{n-m-1}}_{\substack{\text{zwischenzeitlich in Aktien}\\ \text{angelegtes Kapital ohne Verzinsung}}} \underbrace{+\phi_n x_n}_{\substack{\text{Endkapital}\\ \text{in Aktien}}} \\
&= \underbrace{(W_0 - \phi_0 x_0)}_{B_0}(1+\rho)^n + \phi_n x_n - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m x_{m+1}(1+\rho)^{n-m-1} \\
&= (1+\rho)^n \left(W_0 - \phi_0 \underbrace{x_0}_{\widetilde{x}_0} + \phi_n \underbrace{x_n(1+\rho)^{-n}}_{\widetilde{x}_n} - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m \underbrace{x_{m+1}(1+\rho)^{-(m+1)}}_{\widetilde{x}} \right) \\
&= (1+\rho)^n \big(W_0 + \underbrace{\phi_n \widetilde{x}_n - \phi_0 \widetilde{x}_0 - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m \widetilde{x}_{m+1}}_{\sum_{m=0}^{n-1} \phi_m \Delta\widetilde{x}_m} \big) \\
&= (1+\rho)^n \left(W_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \phi_m \Delta\widetilde{x}_m \right) \qquad (13) \\
&= (1+\rho)^n \left(W_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \phi_m [\widetilde{x}_{m+1} - \widetilde{x}_m] \right) \\
&= W_0(1+\rho)^n + \sum_{m=0}^{n-1} \phi_m [x_{m+1} - (1+\rho)x_m](1+\rho)^{n-m-1}. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir benutzt, daß $W_0 = B_0 + \phi_0 x_0$, und, als diskretes Analogon einer partiellen Integration,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{n-1} \Delta\phi_m \widetilde{x}_{m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} (\phi_{m+1} - \phi_m)\widetilde{x}_{m+1} \\
&= \left(\phi_n \widetilde{x}_n - \phi_0 \widetilde{x}_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \phi_m (\widetilde{x}_m - \widetilde{x}_{m+1}) \right) \\
&= \left(\phi_n \widetilde{x}_n - \phi_0 \widetilde{x}_0 - \sum_{m=0}^{n-1} \phi_m \Delta\widetilde{x}_m) \right). \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Addieren wir für den Schlußabrechnungstag (zur Zeit t_N) noch die Vermögensänderung durch den zu erfüllenden Terminkontrakt (F - x_N aus der Sicht einer Short–Position), so erhalten wir

$$W_N = F - x_N + (1+\rho)^N \left(W_0 + \sum_{m=0}^{N-1} \phi_m \Delta \widetilde{x}_m \right), \tag{16}$$

oder, mit $x_N = \widetilde{x}_N (1+\rho)^N$ und $\widetilde{x}_N = x_0 + \sum_{m=0}^{N-1} \Delta \widetilde{x}_m$,

$$W_N = F - (1+\rho)^N \left(x_0 - W_0 - \sum_{m=0}^{N-1} (\phi_m - 1) \Delta \widetilde{x}_m \right). \tag{17}$$

Wir erkennen, daß die Wahl

$$\phi_m = 1, \quad \forall m, \tag{18}$$

den Tradingterm vollständig eliminiert. Damit werden auch alle Zufallfaktoren, d.h. die probabilistische Entwicklung der Aktienkurse x_n eliminiert. Die Wahl $\phi_m = 1$ minimiert also das Risiko für den Halter der Short–Position. Dies entspricht einer Hedgestrategie bei dem das Underlying zu Beginn, d.h. zur Zeit t_0, gekauft und bis zum Ende t_N gehalten wird. Unter diesen Umständen ergibt sich

$$W_N = F - (1+\rho)^N (x_0 - W_0). \tag{19}$$

Ein "fairer" Preis F entspricht der Bedingung,

$$W_N = W_0 (1+\rho)^N. \tag{20}$$

Es folgt

$$F = (1+\rho)^N x_0 \approx x_0 e^{\rho}, \tag{21}$$

d.h. der faire Forwardpreis entspricht dem aufgezinsten Preis des Underlying zum Zeitpunkt t_0. Falls der Forwardpreis dieser Bedingung nicht genügt, sind daher Arbitragegewinne möglich. Idealerweise sorgen also entsprechende Arbitrageure dafür, daß sich dieser Preis am Markt einstellt. In der Praxis können allerdings z.B. nichtverschwindende Transaktionskosten und ein variables Zinsniveau r zu Abweichungen führen.

Literatur

[1] R. Beike, J. Schlütz: *Finanznachrichten. Lesen–Vestehen–Nutzen.* (2. Auflage). Schäffer–Poeschel Verlag, Stuttgart, 1999.

[2] J.-P. Bouchaud, M. Potters: *Theory of Financial Risk.* Draft version available from `http://www.science-finance.fr`, 1999.

[3] H. Diwald: *Zinsfutures und Zinsoptionen.* Beck–Wirtschaftsberater im dtv, Verlag Beck, München, 1994.

[4] J. Hull: *Options, Futures, and Other Derivative Securities.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[5] I. Uszczapowski: *Optionen und Futures verstehen.* Beck–Wirtschaftsberater im dtv, Verlag Beck, München, 1991.