Die Newton–Methode

Jörg Lemm

Institut für Theoretische Physik I
Universität Münster

Email: lemm@uni-muenster.de
Web: http://pauli.uni-muenster.de/~lemm

Newton–Methode zum Lösen nichtlinearer Gleichungen

Gesucht ist eine Nullstelle von f, d.h. $f(x) = 0$. Für eine lineare Funktion (Gerade) gilt

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Nehmen wir an, daß wir uns an der Stelle x_0 befinden und die Stelle x suchen an der $f(x) = 0$ ist:

$$f'(x) = -\frac{f(x_0)}{x - x_0}.$$

Das können wir nach x auflösen

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ist die Funktion f nicht linear, dann werden wir die Nullstelle nicht genau getroffen haben und müssen es nochmals versuchen. D.h. wenn wir bei x_n angelangt sind, bekommen wir unsere nächste Schätzung für die Nullstelle durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Newton–Methode: Berechnen von $\sqrt{2}$

Wir suchen $\sqrt{2}$, d.h. eine Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - 2.$$

Die Newton–Methode entspricht der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

wobei die Ableitung von $f(x)$ leicht zu finden ist

$$f'(x) = 2x.$$

Daraus folgt ein Iterationsverfahren zur Bestimmung von $\sqrt{2}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

oder, umgeformt

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Iterative Berechnung von $\sqrt{2}$

Wir suchen $\sqrt{2}$, d.h. eine Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - 2,$$

mit Hilfe der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Falls

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right),$$

ist x eine *Fixpunkt* dieser Iterationsvorschrift und es gilt

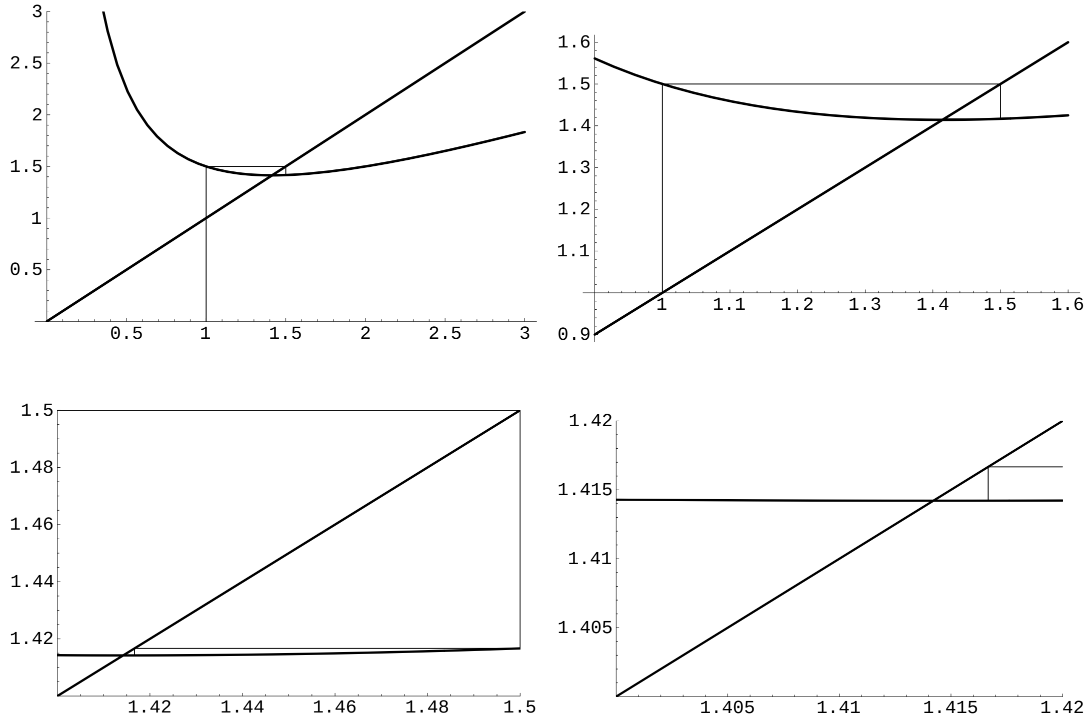
$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

n	x_n	$x_{n+1} = f(x) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$	
0	1.	1.5	$=\frac{3}{2}$
1	1.5	1.41667	$=\frac{17}{12}$
2	1.41667	1.41422	$=\frac{577}{408}$
3	1.41422	1.41421	$=\frac{665857}{470832}$
4	1.41421	1.41421	$=\frac{886731088897}{627013566048}$

Iterative Berechnung von $\sqrt{2}$

Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$



n	x_n	$x_{n+1} = f(x) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$	
0	1.	1.5	$=\frac{3}{2}$
1	1.5	1.41667	$=\frac{17}{12}$
2	1.41667	1.41422	$=\frac{577}{408}$
3	1.41422	1.41421	$=\frac{665857}{470832}$
4	1.41421	1.41421	$=\frac{886731088897}{627013566048}$