Mittwoch, 12. Oktober 2011
10:58

2. Maxwell Gleichungen der ED: Überblick und elementare Eigenschaften

Ladungen, bzw. Ladungsdichte $\rho(\vec r, t)$

Ströme, bzw. Stromdichte $\vec j(\vec r, t)$

Kontinuitätsgleichung: $\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec j = 0$

$\Rightarrow$ elektrisches Feld $\vec E(\vec r, t)$
magnetisches Feld $\vec B(\vec r, t)$

Helmholtz Theorem

im Vakuum (keine Medien im Raum)

fundamentale Gleichung zur Bestimmung von $\vec E$ & $\vec B$

jeweils nur eine div Gl. und eine rot Gl. für $\vec E$ & $\vec B$

MG der ED

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho & \operatorname{div} \vec B = 0 \\ \operatorname{rot} \vec E = -\partial_t \vec B & \operatorname{rot} \vec B = \mu_0 \vec j + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec E \end{array}}$$

Bemerkungen:

1) Vier verkoppelte partielle Dgl. erster Ordnung $(\vec\nabla, \partial_t)$
2) nur rot-Gleichungen verkoppelt via ∂_t (anderen Feld)
3) elektromagnet. Feld $\{\vec E(\vec r, t), \vec B(\vec r, t)\}$
als Lösung der MG bei vorgegebenen "Quellen" $\{\rho(\vec r, t), \vec j(\vec r, t)\}$
4) alle Dgls sind linear in den Feldern $\vec E$ und $\vec B$ (im Vakuum)
5) notwendig zur Lösung
Spezifikation von Raumbereich
von Anfangsbedingungen (z.B. zur Zeit t)
von Randbedingungen bei $S(V)$

V $S(V)$

6) Kontinuitätsgleichung intrinsisch in MG enthalten
$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec j = 0$$
7) Ursache $\rho, \vec j$ $\longrightarrow$ "Wirkung" $\vec E, \vec B$

Lorentz-Kraft-Gleichung

Rückkopplung von Feldern $\vec E$ & $\vec B$ auf bewegte Ladungen, Änderung ihrer Dynamik

$$\vec{F}_{el,i} = q_i \, \vec{E}(\vec{r}_i(t),t) \qquad \text{auf Ladung } i \text{ bei } \vec{r}_i(t)$$

$$\vec{F}_{magn,i} = q_i \dot{\vec{r}}_i(t) \times \vec{B}(\vec{r}_i(t),t)$$

$$\vec{F}_{Lorentz} = q \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right]$$

Newton Gl.: $\quad m \ddot{\vec{r}} = q \left[\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \right]$

allgemeines Problem der ED

Ladungen erzeugen Felder $\vec{E}, \vec{B}$ $\rightarrow$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ führen zur Rückkopplung, Kräfte auf Ladungen $\rightarrow$

Änderung der Dynamik der Ladungen $\rightarrow$

Änderungen der Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$

......

horrend komplex!

$$\left.\begin{aligned} \rho(\vec{r},t) &= \sum_{i=1}^{N} q_i \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \\ \vec{j}(\vec{r},t) &= \sum_{i=1}^{N} q_i \, \dot{\vec{r}}_i(t) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \end{aligned}\right\} \text{Definition von Ladungs- und Stromdichten}$$

$$\left.\begin{aligned} m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) &= \vec{F}_i \\ \vec{F}_i &= q_i \left[\vec{E}(\vec{r}_i(t),t) + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i(t),t) \right] \end{aligned}\right\} \text{Bewegungsgleichungen für Ladungen}$$

zusätzlich Maxwell Gleichungen für $\vec{E}, \vec{B}$

N-Teilchenproblem für $i = 1,..N$ geladene Teilchen, die via elektromagnet WW interagieren

Statistische Behandlung notwendig $\rightarrow$ Materialgesetze

im Vakuum: $\quad \vec{E}(\vec{r},t) \longrightarrow \vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r},t)$

$\qquad\qquad\quad \vec{B}(\vec{r},t) \longrightarrow \vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r},t)$

Integrale Version der MG

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \longrightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \oint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(V)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \longrightarrow \oint_{S(V)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\partial_t \vec{B} \longrightarrow \int_S \text{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$$= -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \partial_t \vec{E}$$

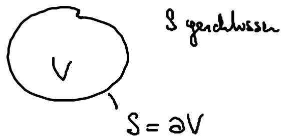
$$\longrightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \left(\vec{j} + \partial_t \varepsilon_0 \vec{E}\right)\cdot d\vec{S}$$

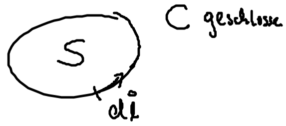
Interpretation

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r},t)$ beliebiges Vektorfeld

$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$ = Fluß von $\vec{A}$ durch S

$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$ = Zirkulation von $\vec{A}$ bzgl C





$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(V)$: gesamter elektr. Fluß durch Volumen V einschließende Fläche S $\hat{=}$ Gesamtladung Q in V

$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$: gesamter magnet. Fluß durch Volumen V einschließende Fläche S $\hat{=}$ 0

Maxwell-Gleichungen erfüllen Kausalität

zum Zeitpunkt t_0 $\vec{E},\vec{B},\varrho,\vec{j}$ bekannt $\longrightarrow$ für alle Zeiten $t \geq t_0$ auch bekannt, für $t < t_0$ bekannt.

"Vereinfachung" der MG: Formulierung mittels Potentialen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\ldots) = 0$ stets

Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$

$$\left|\ \vec{B} := \vec{\nabla}\times\vec{A} = \text{rot}\,\vec{A}\ \right|$$

$\rightarrow$ $\vec{A}$ erfüllt stets $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$

einsetzen in

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

$$= -\partial_t \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$= -\vec{\nabla}\times\partial_t \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\left[\vec{E} + \partial_t \vec{A}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \underbrace{\vec{\nabla}\varphi}_{\text{Gradient von Skalarpotential } \varphi}}$$

erlaubt, da $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0$ stets

statt $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Potentiale $\varphi, \vec{A}$ verwenden

gesucht Dgl. für φ und $\vec{A}$!

Ziel: Entkoppelte Feldgleichungen für $\vec{A}$ und φ

inhomogene MG's umformen:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \text{div grad} = \nabla^2$$

$$\Rightarrow -\partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \nabla^2\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi + \partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \partial_t \vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t\left[-\partial_t\vec{A} - \vec{\nabla}\varphi\right]$$

$$\text{grad div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{j} - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t\vec{\nabla}\varphi$$

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2\vec{A} - \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\partial_t\varphi\right] = -\mu_0\vec{j}$$

Definiere d'Alembert Operator

$$\Box\,\vec{A} = \nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2$$

Exkurs: $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$

$$\Box\,\vec{A} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \quad\longrightarrow\quad \Box\vec{A} = 0 \rightarrow \text{Wellengleichung}$$

insgesamt:

$$\boxed{\Box\vec{A} - \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\partial_t\varphi\right] = -\mu_0\vec{j}}$$

- Zahl der Feldgleichungen reduziert
- $\Box$ - Gleichungen äquivalent zu MG
- höhere Ableitungen (∇^2, ∂_t^2) gehen ein
- noch immer verkoppelt; $\vec{A}$ und φ gehen in beide Gl. ein.
- nett wäre wenn man Gleichungen für $\vec{A}$ und φ entkoppeln könnte.
- Zauberwort: Ausnutzen von EICHFREIHEIT der Potentiale

Potentiale nicht eindeutig festgelegt, wohingegen elektr.magn. Felder sind physikalische Realität, müssen eindeutig festgelegt sein

hier Lorentz-Eichung zu Entkopplung

$$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) \longrightarrow \vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \underbrace{\nabla f(\vec{r},t)}$$

$$\text{rot}\,\vec{A}' = \text{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$$

Was passiert mit $\vec{E}$-Feld?

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t\vec{A}$$

$$= -\nabla\varphi - \partial_t(\vec{A}' - \nabla f)$$

$$\vec{A} = \vec{A}' - \nabla f \qquad = -\nabla\underbrace{[\varphi - \partial_t f]}_{=\varphi'} - \partial_t\vec{A}'$$

$$\Rightarrow \varphi'(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) - \partial_t f(\vec{r},t)$$

Analoge liche Bedingung für φ

Eichtransformation: $\vec{A} \to \vec{A}'$, $\varphi \to \varphi'$, aber $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ungeändert

zunächst Nachweis, dass Eichfunktion $f(\vec{r},t)$ gefunden werden kann, die Gleichung für $\vec{A}$ wesentlich vereinfacht

nämlich $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \varepsilon_0\mu_0\partial_t\varphi' = 0$ liefert. (*)

Annahme: $\vec{A}$ und φ bekannt
$\vec{A}'$ und φ' in (*) einsetzen

$$0 = \nabla\cdot[\vec{A} + \nabla f] + \varepsilon_0\mu_0\partial_t(\varphi - \partial_t f)$$

$$= \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\partial_t\varphi + \underbrace{\nabla^2 f - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2 f}_{=\Box f}$$

$$\Rightarrow \Box f = -\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\varphi\right]$$

Dgl. für f bei gegebenen $\vec{A}$ und φ

Konsequenzen der Eichtransformation

$$\vec{A} = \vec{A}' - \nabla f$$

$$\varphi = \varphi' - \partial_t f$$

einsetzen in:

1) $\nabla^2\varphi + \partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$$\nabla^2\varphi' + \cancel{\partial_t \nabla^2 f} + \partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' - \cancel{\partial_t \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}}_{=\nabla^2} f} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\curvearrowright \quad \nabla^2\varphi' + \partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

2) $\Box\vec{A} - \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\partial_t\varphi\right] = -\mu_0\vec{j}$

$$\Box\vec{A}' - \cancel{\Box\vec{\nabla} f} - \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' - \cancel{\nabla^2 f} + \varepsilon_0\mu_0\partial_t\varphi' + \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2 f\right] = -\mu_0\vec{j}$$

$$\curvearrowright \quad \Box\vec{A}' - \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \varepsilon_0\mu_0\partial_t\varphi'\right] = -\mu_0\vec{j}$$

neue Potentiale sollen Eichbedingung erfüllen:

$[\dots] = 0$ in $\Box\vec{A}$ - Gleichg

$$\curvearrowright \quad \boxed{\Box\vec{A}'(\vec{r},t) = -\mu_0\vec{j}(\vec{r},t)}$$

wegen $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = -\varepsilon_0\mu_0\partial_t\varphi'$

$\partial_t\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = -\varepsilon_0\mu_0\partial_t^2\varphi'$

und $\nabla^2\varphi' + \partial_t\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \nabla^2\varphi' - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2\varphi' = \Box\varphi' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$$\curvearrowright \quad \boxed{\Box\varphi'(\vec{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r},t)}$$

zwei entkoppelte Differentialgleichungen für $\vec{A}(\vec{r},t)$ und $\varphi(\vec{r},t)$

beschreibt gleiche Physik wie MG, identische elektromagnet. Felder

mathem. erhebliche Vereinfachung

- entkoppelte Dgl's separat lösen
- aber zu jedem Zeitpunkt muß Eichbedingung
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \varepsilon_0\mu_0\partial_t\varphi' = 0 \quad \forall\, \vec{r},t$
  erfüllt sein.