

### 3. Elektrostatik

Elektrostatik: MG

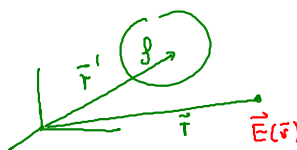
- stationär  $\partial_t \vec{B} = 0 = \partial_t \vec{E}$
- keine Ströme  $\vec{J} = 0$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$\vec{E}$ -Feld erzeugt durch vorgegebenen Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



Potential-Variante

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r})$$

$$\boxed{\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})} \quad \text{Poisson Gl. für } \rho(\vec{r}) \neq 0$$

ladungsfreier Raum  $\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = 0$  Laplace Gl. für  $\rho(\vec{r}) = 0$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

explizite Berechnung des Integral noch notwendig.

physikal.  $\vec{F} = q \cdot \vec{E} = -q \vec{\nabla} \varphi = -\vec{\nabla} (q\varphi)$

Kraft auf Punktladung  
 $\vec{F}$  konservativ

Kraft Potential  
 $U(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})$

$\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) =$  Arbeit, die aufgewendet wird, um Einheitsladung von 1C von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  zu bewegen.

$\varphi$  als potentielle Energie einer Ladung

3.1. Ladungsverteilungen:

4 Variablen von  $\rho(\vec{r})$  nach Dimensionalität klassifizieren

0 dim: Punktladungen = elektrische Monopole

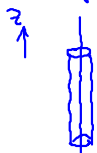
$$\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_A) \quad \text{Punktladung in } \vec{r}_A$$

1 dim: Längeladungsdichte

2 dim: Flächenladungsdichte

3 dim: Raumladungsdichte

Längeladungsdichte: homogen geladener Draht

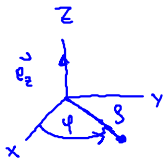


infinitesimal dünn  
geradlinig, nur in z-Richtung  
homogen geladen

4. Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$

$$g(\vec{r}) = \alpha(\rho) \cdot \delta(\rho)$$

mit  $\int_{Z_1}^{Z_2} d^3r g(\vec{r}) = \mathcal{K} \cdot l$   
 Integration über Ausschnitt  $\uparrow$  hoch pro Länge  
 von Drehl der Länge  $l$  in  $z$ -Richtung



Bestimme  $\alpha(\rho) \rightarrow g(\vec{r})$

$$Q = l \cdot \mathcal{K} = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \rho g(\vec{r})$$

$$= 2\pi l \int_0^R d\rho \rho g(\vec{r})$$

$= \text{mit konstant, } = \frac{\mathcal{K}}{2\pi}$

$$\int_0^R d\rho \rho \alpha(\rho) \delta(\rho) = a$$

$$\Rightarrow \alpha(\rho) = \frac{a}{\rho}$$

$$Q = \mathcal{K} l = 2\pi l a \int_0^R d\rho \delta(\rho)$$

$$= \pi l a$$

$$a = \frac{\mathcal{K}}{\pi} \Rightarrow g(\vec{r}) = \frac{\mathcal{K}}{\pi} \frac{\delta(\rho)}{\rho}$$

Bestimmung von  $\vec{E}(\vec{r})$  und  $\varphi(\vec{r})$  für obigen  $g(\vec{r})$

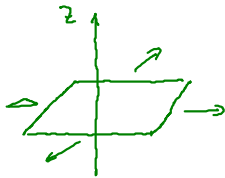
Blatt 12 Physik II

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\mathcal{K}}{2\pi\epsilon_0 \rho} \vec{e}_\rho$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\mathcal{K}}{8\pi\epsilon_0} \ln \rho + \text{const}$$



Flächenladungsdichte: homogene geladene Ebene als Bsp



unendlich ausgedehnt in  $x, y$  Richtung

Mit homogener Flächenladung  $\sigma$

$$g(\vec{r}) = \sigma \cdot \delta(z)$$

Blatt 12 Physik II

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \vec{e}_z$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z| + \text{const.}$$

Feld  $E$ : homogen und konst für  $z > 0$  &  $z < 0$   
 betragsmäßig gleich

Feldrichtung verschieden für

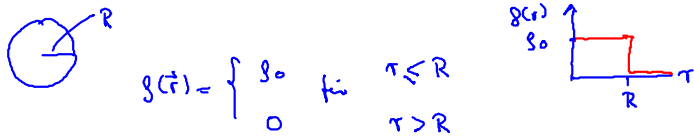
$$z > 0 \quad \vec{E} \uparrow \quad \vec{e}_z$$

$$z < 0 \quad \vec{E} \downarrow \quad \vec{e}_z$$

Raumladungsdichte: Bsp. homogene geladene Kugel



$$g(\vec{r}) \uparrow$$



$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

$$Q = \int d^3r \rho(\vec{r}) = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0$$

Kugelvolumen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r}{R^3} \vec{e}_r & \text{falls } r \leq R \\ \frac{1}{r^2} \vec{e}_r & \text{falls } r > R \end{cases}$$

Verallgemeinerung: inhomogene Ladungsdichten

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad \rho(\vec{r}): \text{Körperladungsdichte}$$

$$Q = \int_S \sigma(\vec{r}) dS \quad \sigma(\vec{r}): \text{Flächenladungsdichte}$$

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad \rho(\vec{r}): \text{Raumladungsdichte}$$

Flächenladungsdichte aus Maxwell. Konsistenz?

NEIN, im Leiter gilt  $\vec{E}(\vec{r}) = 0$

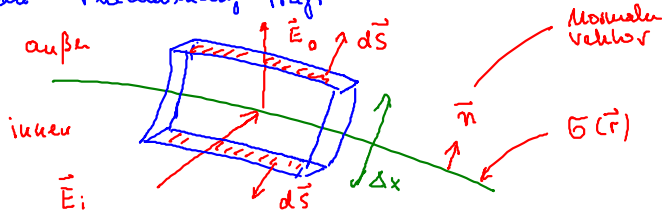
elektrische Ladungen im Leiter sitzen an der Oberfläche  
vgl. Kondensatorplatten

dann:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dS$$

Verhalten der elektrischen Felder an Grenzflächen, wenn Grenzfläche Flächenladung trägt



allgemein:  $\vec{E}$  Feld in Normal und Tangentialkomponenten zerlegen

1) Normalkomponente von  $\vec{E}$

Betrachte Gauß-Wafer mit Volumen  $\Delta V$  und Dicke  $\Delta x$

$$\int_{\Delta V} d^3r \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \int_{S(\Delta V)} d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

↑  
Gauß

← Oberfläche von  $\Delta V$

Dicke  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\rightarrow \Delta s \cdot \vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i)$$

1 3 ... 1 0 3 ... 1

$$\int_{\Delta V} d^3r \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Delta V} d^3r \rho(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \bar{\sigma} \cdot \Delta S$$

↑  
Maxwell

Vergleiche:

$$\Delta S \vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = \frac{1}{\epsilon_0} \bar{\sigma} \Delta S$$

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = \frac{1}{\epsilon_0} \bar{\sigma}}$$

oder  $(E_n)_{\text{au\ss}er} - (E_n)_{\text{innen}} = \frac{\bar{\sigma}}{\epsilon_0}$

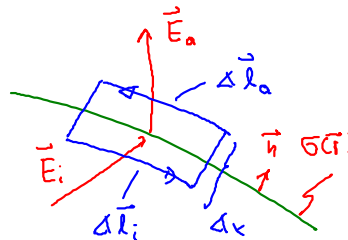
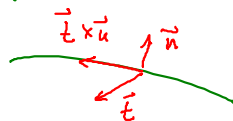
$$E_n = \vec{E} \cdot \vec{n}$$

Normalkomponente von  $\vec{E}$ , d.h.  $E_n = \vec{E} \cdot \vec{n}$ , ist an Grenzflächen wichtig falls  $\bar{\sigma} \neq 0$ .

2) Tangentialkomponente von  $\vec{E}$

kleinere fläche  $\Delta S$

$\vec{t}$ : Flachenormale auf  $\Delta S$   
tangential zur Grenzfläche



$$\Delta \vec{S} = \Delta S \cdot \vec{t}$$

$$\Delta \vec{l}_i = \Delta l (\vec{t} \times \vec{u})$$

$$\Delta \vec{l}_a = -\Delta l (\vec{t} \times \vec{u})$$

$$0 = \int_{\Delta S} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{C(\Delta S)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

$$\rightarrow \Delta l (\vec{t} \times \vec{u}) \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = 0$$

$$\wedge \boxed{(\vec{t} \times \vec{u}) \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = 0}$$

$\neq 0$

$$(\vec{t} \times \vec{u}) \cdot \vec{E}_\alpha \quad (\alpha = i \text{ oder } a)$$

Tangentialkomponente von  $\vec{E}_i$  und  $\vec{E}_a$  verhalten sich stetig an Grenzflächen, egal ob  $\bar{\sigma} \neq 0$  oder  $\bar{\sigma} = 0$

Spezialfall: elektrische Leiter

- spezielle Materialien
- im Leiter (z.B. Metall) frei bewegliche Elektronen (Elektronengas)

Wesentliche Konsequenz von frei beweglichen Ladungsträgern

$$\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \text{im Inneren von Leitern}$$

Warum: Aus  $\vec{E}(\vec{r}) \neq 0$  im Inneren von Leiter

→ Kräfte  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}(\vec{r}) \neq 0$  auf Ladungsträger

→ Verschiebung der Ladungsträger bis räumliche Konfiguration so, dass Gefügefeld

$$\vec{E}'(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

nicht einstellt, das Urspr. Feld kompensiert.

→ nach hin Sinn

Konsequenz von  $\vec{E}(\vec{r}) = 0$  im Inneren

$$\rightarrow 0 = \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r})$$

→  $\varphi(\vec{r}) = \text{const}$  im Inneren bis Rand/Ladung

→ Rand als Äquipotentialfläche

$$\rightarrow \underbrace{\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}}_{=0 \text{ im Inneren}} = \underbrace{\rho(\vec{r})}_{=0 \text{ im Inneren der Leiter}}$$

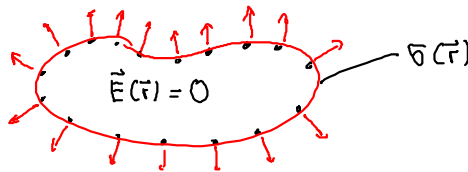
→  $\rho(\vec{r}) \neq 0$  nur auf Rand möglich.

→ Flächenladungsdichte am Rand

$$\vec{M} \cdot (\vec{E}_a(\vec{r}) - \vec{E}_i(\vec{r})) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{n} \text{ auf Rand}$$

### Leiter



elekt. Ladung nur auf Rand/Ladung

$\vec{E}(\vec{r})$ -Feld normal / senkrecht zur Ober/Ladung

Tangential Komponente von  $\vec{E}(\vec{r})$  an Ober/Ladung Null.

induzierte Ladung:



### 3.2. Elektrische Feldenergie

elekt. Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  wirkt auf Ladung  $q$  am Ort  $\vec{r}_A$

$$\rightarrow \vec{F}(\vec{r}_A) = q \cdot \vec{E}(\vec{r}_A)$$

Verschieb. Punktladung von  $\vec{r}_B$  nach  $\vec{r}_A$

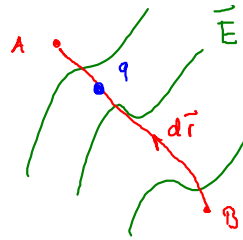
→ leisten von Arbeit an  $q$

$$W_{B \rightarrow A} = + \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_A} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



→ Arbeit von Arbeit an  $q$

$$\begin{aligned}
 W_{B \rightarrow A} &= + \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_A} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= -q \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_A} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
 &= q \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_A} (\nabla \varphi(\vec{r})) \cdot d\vec{r} \\
 &= q \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_A} d\varphi \\
 &= q [\varphi(\vec{r}_A) - \varphi(\vec{r}_B)]
 \end{aligned}$$



Minimale da Arbeit  
gegen Feld  
verrichtet  
wird.

Arbeit wird positiv gerichtet, wenn sie an System  
verrichtet wird

Energie einer Ladungsverteilung

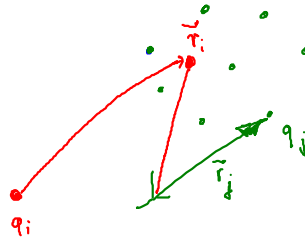
= Arbeit, die nötig um Ladungen aus dem Unendlichen  
zu dieser gegebenen Verteilung zusammenzubringen

im Unendlichen:  $\varphi(\infty) = 0$

Energie von  $N$  Punktladungen:

$(i-1)$  Punktladungen  $q_j$  bei  $\vec{r}_j$   
erzeugen Potential

$$\varphi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$



Arbeit um  $i$ -te Ladung  $q_i$  von  $\infty \rightarrow \vec{r}_i$  zu transportieren

$$W_i = q_i \left( \varphi(\vec{r}_i) - \underbrace{\varphi(\infty)}_0 \right)$$

$$\hookrightarrow W_i = q_i \varphi(\vec{r}_i)$$

Gesamtarbeit für alle Teilchen zu konfigurieren  
 $\hat{=}$  Gesamtenergie

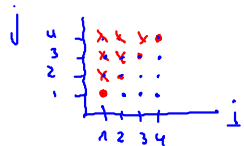
$$W = E_{\text{pot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$i=1$  noch keine Arbeit, da noch kein Feld vorhanden.

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

an Summe bedeutet, dass Terme  $i=j$  ausgeschlossen

Faktor  $\frac{1}{2}$  wg Doppelzählung



Übergang zu kont. Ladungsverteilung

$$W = E_{\text{pot}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{g(\vec{r})g(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r g(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r})$$

da  $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{g(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Nächster Schritt  $W$  durch von  $g(\vec{r})$  erzeugtes Feld ausdrücken

Poisson:  $\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} g(\vec{r})$

$$\hookrightarrow W = \frac{1}{2} \int_V d^3r g(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r \varphi \nabla^2 \varphi$$

$\nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) = \dots$

$$= -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r (\nabla \varphi)^2$$

$V$  über gesamten  $\mathbb{R}^3$   
 $S(V)$ : Fläche im  $\infty$

$$= -\frac{\epsilon_0}{2} \oint_S d\vec{s} \varphi \nabla \varphi + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r (\nabla \varphi)^2$$

$$\varphi \sim \frac{1}{r}, \quad \varphi \nabla \varphi \sim \frac{1}{r^3}, \quad S(V) \sim r^2$$

$$\Rightarrow \oint_S d\vec{s} \varphi \nabla \varphi \sim \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

insgesamt:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3r |\nabla \varphi(\vec{r})|^2$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3r |\vec{E}(\vec{r})|^2$$

Energiedichte:  $w(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r})|^2$

$$W = \int d^3r w(\vec{r})$$

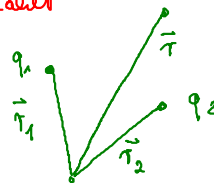
Problem:  $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3r |\vec{E}(\vec{r})|^2 \geq 0 \quad \forall$  möglichen  $g(\vec{r})$

bei Punktladungen ist  $W < 0$  möglich.

Keine vollständige Äquivalenz zwischen  $W$ -Formel bei diskreten Punktladungen und "ausgedehnte" Ladungsverteilung  $g(\vec{r})$ .

Grund: Selbstenergie der Punktladung nicht gezählt

Bsp: 2 Punktladungen  $q_1$  bei  $\vec{r}_1$ ,  $q_2$  bei  $\vec{r}_2$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ q_1 \frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + q_2 \frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} \right]$$

Energiedichte

$$w(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r})|^2$$

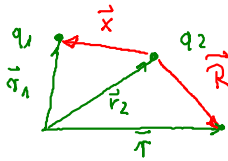
$$= \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0} \left[ q_1^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^4} + q_2^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^4} + 2q_1q_2 \frac{(\vec{r}-\vec{r}_1) \cdot (\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3 |\vec{r}-\vec{r}_2|^3} \right]$$

$= V$   
Vorfaktor

Selbstenergie dichte  
 $W_{SE} / V$  für 1+2

Wechselwirkungsenergie dichte  
 $W_{WW} / V$

bestimmte Wechselwirkungsbeitrag



Vektor:  $q_2 \rightarrow$  Aufpunkt  $\vec{r} : \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_2$   
 Vektor:  $q_1 \rightarrow$  Aufpunkt  $\vec{r} : \vec{R} - \vec{x} = \vec{r} - \vec{r}_1$

$$\vec{r}_1 - \vec{x} + \vec{R} = \vec{r} \quad , \quad d^3 r = d^3 R$$

$$\vec{r}_2 + \vec{R} = \vec{r}$$

$$\int d^3 r W_{WU}(\vec{r}) = \frac{q_1 q_2}{16\pi^2 \epsilon_0} \int d^3 R \frac{\vec{R} \cdot (\vec{R} - \vec{x})}{R^3 |\vec{R} - \vec{x}|^3}$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = \vec{R} \cdot (\vec{R} - \vec{x}) = R^2 - R x \cos \theta \quad , \quad \theta = \angle(\vec{R}, \vec{x})$$

$$|\vec{R} - \vec{x}|^2 = (\vec{R} - \vec{x}) \cdot (\vec{R} - \vec{x}) = R^2 + x^2 - 2R x \cos \theta$$

$$\int d^3 r W_{WU}(\vec{r}) = \frac{q_1 q_2}{16\pi^2 \epsilon_0} \int_0^\infty R^2 dR \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \frac{R^2 - R x \cos \theta}{R^3 (R^2 + x^2 - 2R x \cos \theta)^{3/2}}$$

$$= \frac{q_1 q_2}{8\pi \epsilon_0} \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \int_0^\infty dR \left[ -\frac{d}{dR} (R^2 + x^2 - 2R x \cos \theta)^{-1/2} \right]$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

d.h. ohne Selbstenergiebeitrag ergibt Ladungsdichte Formel für die Wechselwirkungsenergie id. entsprechendes Resultat wie entsprechende Formel für Punktladungen.

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[ |\vec{E}(\vec{r})|^2 - \sum_i |\vec{E}_i|^2 \right]$$

× E-Feld von i-ter Punktladung

Selbstenergie: Energie, die notwendig ist Punktladungen aus "unendlich" verdünnte Ladungswolke zusammenzurufen

Bsp: Homogene Kugel

E-Feld:  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \begin{cases} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r & \text{für } r > R \\ q \frac{r}{R^3} \vec{e}_r & \text{für } r \leq R \end{cases}$  Kugelradius

Energie

$$W_{\text{Kugel}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{4\pi}{16\pi^2 \epsilon_0^2} q^2 \left( \int_0^R dr r^2 \frac{r^2}{R^6} + \int_R^\infty dr r^2 \frac{1}{r^4} \right)$$

$$= \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{5} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right)$$

$$= \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 R}$$

Limes zu Punktladung:  $R \rightarrow 0 \Rightarrow W_{\text{Kugel}} \xrightarrow{R \rightarrow 0} \infty$   
 divergiert elektrost. Energie von homogener geladener Kugel

### 3.3. Anwendung: Kondensatoren

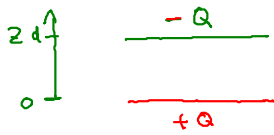


Kondensator: passives elektr. Bauelement

2 elektrisch leitende Flächen mit Flächendichte  $\sigma$ ,  
voneinander räumlich getrennt, dazwischen Vakuum oder Isolator

elementare Version

Plattenkondensator



konstanter Abstand  $d$   
Fläche  $S$   
mit  $d \ll \sqrt{S}$   
Randeffekte vernachlässigen

$$\sigma(z=0) = \frac{Q}{S} = -\sigma(z=d)$$

einzelne Platte:  $\rightarrow$  vgl. Kap. 3.1

$$z=0 \quad \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \end{array} \quad Q \quad \vec{E}_+(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \cdot \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \text{sgn}(z) \vec{e}_z$$

$$z=d \quad \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \end{array} \quad -Q \quad \vec{E}_-(\vec{r}) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z-d) \vec{e}_z$$

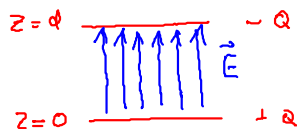
$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_+(\vec{r}) + \vec{E}_-(\vec{r})$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \underbrace{\text{sgn}(z)}_{\substack{1 \text{ falls } z > 0 \\ -1 \text{ falls } z < 0}} - \underbrace{\text{sgn}(z-d)}_{\substack{1 \text{ falls } z > d \\ -1 \text{ falls } z < d}} \right] \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z > d \quad [1-1] = 0 \\ z < 0 \quad [-1-(-1)] = 0 \\ 0 < z < d \quad [1-(-1)] = 2 \end{array} \right\} \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z & 0 < z < d \quad \text{Zwischen Platte} \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases}$$

$\vec{E}(\vec{r})$  homogen, konstanter Vektor, nur in  $\vec{e}_z$ -Richtung zeigt



zugehöriges Potential:

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \text{const}' & z < 0 \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + \text{const} & 0 \leq z \leq d \\ \text{const}'' & z > d \end{cases}$$

$$\text{aus } \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi(\vec{r}) = -\partial_z \varphi(z) \vec{e}_z$$

Zwischen Platte liegt Potentialdifferenz / Spannung

$$U = \varphi(z=0) - \varphi(z=d)$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{\epsilon_0 S} d, \quad Q = \sigma \cdot S$$

$$\hookrightarrow U \sim Q$$

Flächendichte

Fläche

$$Q \sim U$$

$$Q = \epsilon_0 \frac{S}{d} U$$

Kapazität von Plattenkondensator

$$C := \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$[C] = 1 \text{ F (Farad)} = 1 \frac{\text{As}}{\text{V}}$$

Energiedichte im Kondensator

$$w(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r})|^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad \text{für } 0 \leq z < d$$

Gesamtenergie zwischen Platten von elektrostat. Feld

$$W = \underbrace{w \cdot S \cdot d}_{=V} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S \cdot d = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} S d$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q^2}{S} d \quad \frac{1}{C}$$

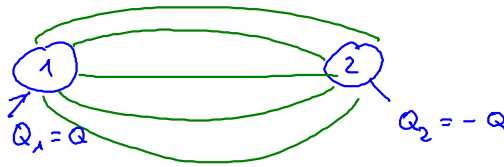
$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2$$

$Q = C U$

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

allgemeiner:

Kondensator: zwei Metallkörper mit entgegengesetzt gleich großen Ladungen, die an festen Positionen stehen.

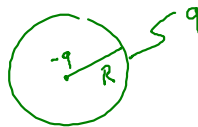


Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  berechenbar  
Spannung  $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$\Rightarrow$  Kapazität  $C = \frac{Q}{U}$

$$C = \frac{\int_S \sigma \, dS}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

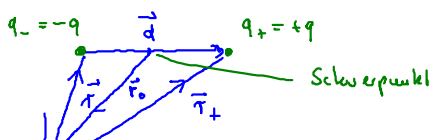
Bsp: Kugel



### 3.4. Dipole und Quadrupole

Nicht nur Punktladungen mit festen Vorzeichen relevant in ED, sondern auch Objekte, die insgesamt ladungsneutral sind, aber "innere" Struktur der Ladungsverteilung haben. Auch diese können Quellen von elektrischen Feldern sein.

elementares Beispiel: Dipol



System von 2 Punktladungen  
begegnetig gleich, Vorzeichen verschieden  
in festem Abstand  $d = |\vec{d}|$



Gesamtladung  $Q = q_+ - q_- = 0$   
 Abstandsvektor  $\vec{d} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$

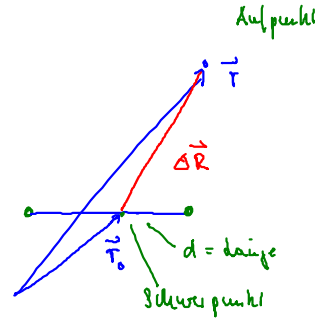
elektrost. Potential von Dipol:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \varphi_-(\vec{r}) + \varphi_+(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_+}{|\vec{r} - \vec{r}_+|} + \frac{q_-}{|\vec{r} - \vec{r}_-|} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_+|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_-|} \right] \end{aligned}$$

Schwerpunkt von Dipol

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{2} (\vec{r}_+ + \vec{r}_-)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow |\vec{r} - \vec{r}_+| &= |\vec{r} - \vec{r}_0 - \frac{1}{2}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)| \\ &= |\vec{r} - \vec{r}_0 - \frac{\vec{d}}{2}| \\ |\vec{r} - \vec{r}_-| &= |\vec{r} - \vec{r}_0 + \frac{1}{2}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)| \\ &= |\vec{r} - \vec{r}_0 + \frac{\vec{d}}{2}| \end{aligned}$$



definiere  $\vec{\Delta R} = \vec{r} - \vec{r}_0$

$$\begin{aligned} \rightarrow |\vec{r} - \vec{r}_+| &= |\vec{\Delta R} - \frac{1}{2}\vec{d}| \\ &= \sqrt{\Delta R^2 + \frac{1}{4}d^2 - \vec{d} \cdot \vec{\Delta R}} \\ &= \Delta R \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{d^2}{\Delta R^2} + \frac{d}{\Delta R} \cos \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon \in [-1, 1] \\ \vec{d} \cdot \vec{\Delta R} &= d \Delta R \cos \alpha \\ \alpha &= \angle(\vec{d}, \vec{\Delta R}) \end{aligned}$$

Annahme:  $d \ll |\vec{\Delta R}|$ , d.h. Au(punkt) weit weg von Dipol

Taylor-Entwicklung in  $\frac{d}{\Delta R}$  ( $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \dots$ )

$$\begin{aligned} \hookrightarrow |\vec{r} - \vec{r}_+| &= \Delta R \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{d \cos \alpha}{\Delta R} + O\left(\frac{d}{\Delta R}\right)^2 \right] \\ &= \Delta R \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\vec{d} \cdot \vec{\Delta R}}{\Delta R^2} + O(\dots)^2 \right] \\ |\vec{r} - \vec{r}_-| &= \Delta R \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{d} \cdot \vec{\Delta R}}{\Delta R^2} + O(\dots)^2 \right] \end{aligned}$$

im Nennernpotential von Dipol  $1/|\dots|$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_+|} = \frac{1}{\Delta R} \left[ 1 + \frac{\vec{d} \cdot \vec{\Delta R}}{\Delta R^2} + O(\dots)^2 \right]$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_-|} = \frac{1}{\Delta R} \left[ 1 - \frac{\vec{d} \cdot \vec{\Delta R}}{\Delta R^2} + O(\dots)^2 \right]$$

$$\hookrightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \cdot \frac{\vec{d} \cdot \vec{\Delta R}}{\Delta R^2} + O\left(\frac{d}{\Delta R}\right)^2$$

Definiere Dipolmoment:

$$\vec{p} = q \cdot \vec{d}$$

Kenngröße für Dipol, Ladung  $q$  · Abstandsvektor von  $q_- \rightarrow q_+$   
 $q = \text{const}$ ,  $\vec{d} = \text{const} \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$ .

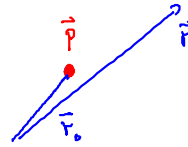
$$q = \text{const}, \quad \vec{d} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{const.}$$

Grenzwertung zu Punktdipol (mathem. Dipol)

$$d \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \vec{r}_- \rightarrow \vec{r}_0 \\ \vec{r}_+ \rightarrow \vec{r}_0 \end{matrix}$$

1) Potential von Punktdipol:

$$\begin{aligned} \varphi_D(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{q \cdot d}_{\vec{p}} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \end{aligned}$$



2) elektr. Feld von Punktdipol

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = -\nabla \varphi_D(\vec{r}) = \frac{3[\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)](\vec{r} - \vec{r}_0) - \vec{p} |\vec{r} - \vec{r}_0|^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^5}$$

Bemerkungen: 1) Potenzen von  $|\vec{r} - \vec{r}_0|$  beachten

$$\begin{aligned} \varphi_D(\vec{r}) &\sim \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \\ \vec{E}_D(\vec{r}) &\sim \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \varphi_D(\vec{r}) \\ \vec{E}_D(\vec{r}) \end{aligned}} \right\} \text{anders als bei Punktladung}$$

2)  $\vec{r}_0 = 0$  Dipol im Ursprung

$$\begin{aligned} \varphi_D(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \\ \vec{E}_D(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5} \quad (*) \end{aligned} \quad \leftarrow \text{Dipolformel}$$

Madureis von  $\vec{E}_D(\vec{r})$ -Formel (\*)

$$E_D(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \varphi_D(\vec{r})$$

$$\varphi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \quad | \text{ da } \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$E_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left( \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right)$$

beachte  $\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{b} \times \text{rot } \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot } \vec{b}$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{p} = \text{const} \\ \vec{b} &= \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{a} \\ \vec{b} \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} [(\vec{\nabla} \frac{1}{r}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{p} &= 0 \\ (\vec{\nabla} \frac{1}{r}) \times \vec{\nabla} \times \vec{p} &= 0 \\ \vec{p} \times \text{rot grad } \frac{1}{r} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \nabla \frac{1}{r} = -(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} \neq 0 \quad \text{überlebt.}$$

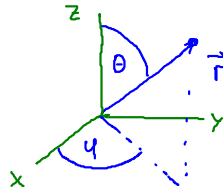
$$\begin{aligned} \vec{E}_D(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_i \partial_i \frac{\vec{r}}{r^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_i \left( \frac{\vec{e}_i}{r^3} - \frac{3\vec{r}}{r^4} \frac{x_i}{r} \right) \end{aligned}$$

ausklammern

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \quad \square$$

Verschiebung von Dipolfeld: sphä. Koordinaten.

$\vec{p} \uparrow$  in Richtung Polachse



$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \varphi(r, \theta, \varphi) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \end{aligned}$$

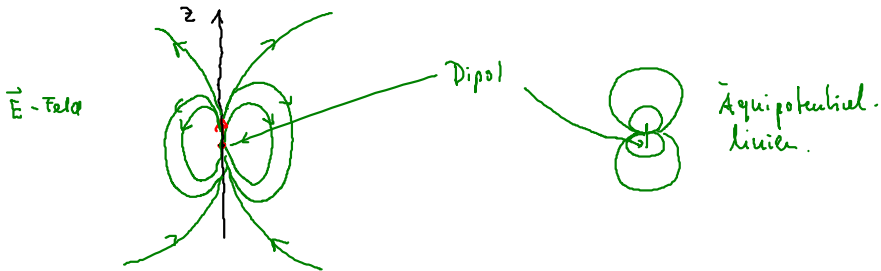
$$\vec{E}_D(r, \theta, \varphi) = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta + E_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$E_r = -\partial_r \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \partial_\theta \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \varphi(\vec{r}) = 0$$

$\vec{E}$ -Feld rotationsymmetrisch um Dipolachse



MONOPOL: PUNKTLADUNG  $\rightarrow$  LADUNGSDICHTE  $\rho(\vec{r})$   
 DIPOL  $\rightarrow$  DIPOLDICHTE  $\vec{p}(\vec{r})$

$$\vec{p}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \vec{p}_j \cdot \delta(\vec{r} - \vec{R}_j)$$

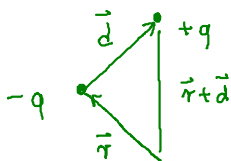
$N$  Punktdipole  $\vec{p}_j$  lokalisiert bei Orten  $\vec{R}_j$

Potential als Superposition:

$$\begin{aligned} \varphi_D(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N p_j \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}_j|} \quad \leftarrow \text{diskrete Version} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \vec{p}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

Kraftwirkung von elektrischem Feld auf Dipol

Annäherung endl. Dipol (endl. Abstand zw.  $-q$  und  $+q$ )



$\vec{d}$ : Abstandsvektor von  $-q \rightarrow +q$

$\vec{E}(\vec{r})$  äußeres Feld

Frage: Kraft auf Dipol wg.  $\vec{E}(\vec{r})$   
 $\vec{F} = q\vec{E}$

$\vec{d}$  klein!?



Drehmoment so, dass Dipol in energetisch günstigere Lage gedreht wird.  
 Position Minimum potentielle Energie bzgl.  $\vec{F}_D$  auf Dipol.

Variante von Kraftgesetz:

$$\vec{p} = \text{const}$$

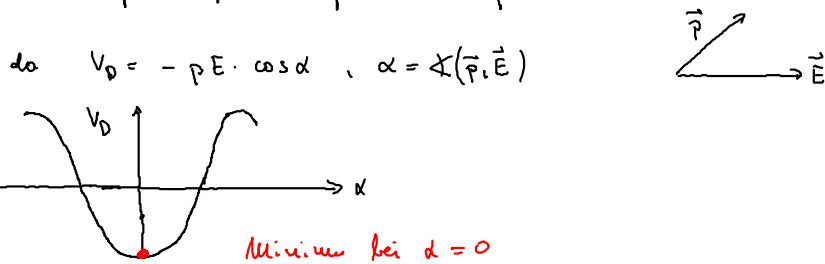
$$\vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + \vec{p} \times \underbrace{\text{rot } \vec{E}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_D(\vec{r}) = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E})}$$

$$\Rightarrow \text{ergibt Potential zu } \vec{F}_D(\vec{r}) : \vec{F}_D(\vec{r}) := -\vec{\nabla} V_D(\vec{r})$$

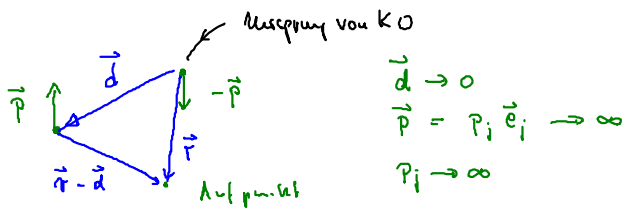
$$\Rightarrow \boxed{V_D(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$

zustand niedrigste potentielle Energie  $\hat{=}$  Minimum von  $V_D(\vec{r})$   
 falls  $\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r})$  parallel  $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{E}$



### nächste Verallgemeinerung: Quadrupol

Quadrupol: zwei antiparallele gleich große Dipole in festem Abstand  $\vec{d}$  mit Abstandsvektor  $\vec{d}$  von  $-\vec{p}$   $\rightarrow$   $+\vec{p}$



Quadrupol hat 4 Ladung

Quadrupolmoment

3x3 Matrix  $\rightarrow$   $q_{ij} = \lim_{\substack{d_i \rightarrow 0 \\ p_j \rightarrow \infty}} d_i p_j$

Potential von Quadrupol

einzeln Dipol:  $\varphi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right)$

Zwei antiparallele gleichgroße Dipole bei 0 und  $\vec{d}$   
 $\downarrow$   $\downarrow$   
 $-\vec{p}$   $+\vec{p}$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r}|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{d}|} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r}|} - \frac{1}{|\vec{r}|} + (\vec{d} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \frac{1}{r} + \text{h.o.t.} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \cdot \vec{\nabla}_r \left[ (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}_r) \frac{1}{r} \right] \dots$$

$$\vec{\nabla} \left( \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \frac{1}{r}}_{\text{analog zu Dipol}} + \underbrace{\vec{a} \times \text{rot grad } \frac{1}{r}}_{=0}$$

$$= \frac{1}{r^5} \left[ 3(\vec{r} \cdot \vec{a}) \vec{r} - r^2 \vec{a} \right]$$

$$\Delta \quad \boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \left[ 3(\vec{r} \cdot \vec{a})(\vec{r} \cdot \vec{p}) - r^2(\vec{a} \cdot \vec{p}) \right]}$$

Kartesisches Koordinaten  $\vec{r} = x_i \vec{e}_i, \vec{a} = d_i \vec{e}_i, \vec{p} = p_i \vec{e}_i$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \left[ 3 x_i d_i x_j p_j - r^2 d_i p_i \right] \quad \leftarrow \text{Kronecker}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \left[ 3 \underbrace{d_i p_j}_{=q_{ij}} x_i x_j - r^2 \underbrace{\delta_{ij}}_{=q_{ij}} d_i p_i \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \sum_{i,j} q_{ij} \left[ 3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij} \right]$$

für "Punkt-Quadrupol"

$$\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^3}$$

### 3.4. Multipol-Entwicklung

Berechnungsmethode für Potential

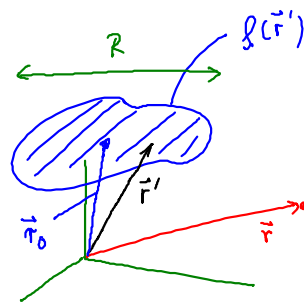
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

und zugehörigen elektrischen Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$$

falls:

1. Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}')$  um Umgebung von Punkt  $\vec{r}_0$  lokalisiert ist, d.h.  $\rho(\vec{r}') \neq 0$  für  $|\vec{r}' - \vec{r}_0| \leq R$ , außerhalb  $\rho(\vec{r}') = 0$
2. Aufpunkt  $\vec{r}$  hinreichend weit von  $\vec{r}_0$  entfernt sein  $|\vec{r} - \vec{r}_0| \gg R \rightarrow$  Feld in "Fernzone"



zu Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}')$

Ladungsschwerpunkt  $\vec{r}_0$  definieren

$$\vec{r}_0 := \frac{\int d^3r' \vec{r}' |\rho(\vec{r}')|}{\int d^3r' |\rho(\vec{r}')|}$$

↙ analog zu Massenschwerpunkt aber mit |..|  
wq  $\rho \geq 0$  möglich.



Ladungsverteilung, im Schwerpunkt schreiben:

$$\vec{\tau}_0 := 0$$

entwickelte Punkt: Entwicklung von Nenner im Integranden von Potential  $\psi(\vec{r})$ , d.h.  $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$  in Potenzen von  $\frac{r'}{r}$  entwickeln

Taylor-Entwickeln, für Skalarefelder  $\psi(\vec{r}+\vec{a}) = e^{\vec{a}\cdot\vec{\nabla}} \psi(\vec{r})$

$$\text{bzw. } \psi(\vec{r}+\vec{a}) = \psi(\vec{r}) + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\psi(\vec{r}) + \frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^2\psi(\vec{r}) + \dots$$

$$\text{hier: } \vec{a} = -\vec{r}' \\ \psi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|} \\ \psi(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= e^{-\vec{r}'\cdot\vec{\nabla}} \cdot \frac{1}{|\vec{r}|} = e^{-\vec{r}'\cdot\vec{\nabla}} \cdot \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{r} - (\vec{\tau}'\cdot\vec{\nabla}) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\vec{\tau}'\cdot\vec{\nabla})^2 \frac{1}{r} + \text{h.o.t.} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{\tau}'\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{\tau}'\cdot\vec{r})^2 - \vec{\tau}'^2 r^2}{r^5} + \text{h.o.t.} \end{aligned}$$

a) b)

Nachweis:

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} \partial_i \frac{1}{r} &= -\frac{x_i}{r^3} \\ \vec{\tau} &= x_i \vec{e}_i \end{aligned} \right\} (\vec{\tau}'\cdot\vec{\nabla}) \frac{1}{r} = x'_i \partial_i \frac{1}{r} = -\frac{x'_i x_i}{r^3} = -\frac{\vec{\tau}'\cdot\vec{r}}{r^3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \partial_i \partial_j \frac{1}{r} &= \partial_i \left( -\frac{x_j}{r^3} \right) = 3 \frac{x_j}{r^4} \partial_i r - \frac{1}{r^3} \partial_i x_j = 3 \frac{x_j x_i}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \\ \rightarrow (\vec{\tau}'\cdot\vec{\nabla})^2 \frac{1}{r} &= x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{r^5} \left[ 3 x'_i x'_j x_i x_j - r^2 x'_i x'_j \delta_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{r^5} \left[ 3 (\vec{\tau}'\cdot\vec{r})^2 - r^2 \tau'^2 \right] \end{aligned}$$

Entwickeln von  $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$  im Integranden von Potential einsetzen

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\vec{r}') + \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \int d^3r' \vec{\tau}' \rho(\vec{r}') \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2r^5} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot \left\{ 3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2 - r'^2 r^2 \right\} + \dots \right] \end{aligned}$$

3. Term zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \left( 3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2 - r'^2 r^2 \right) &= \int d^3r' \rho(\vec{r}') \left\{ 3 x_i x'_i x_j x'_j - r'^2 \delta_{ij} x_i x_j \right\} \\ &= x_i x_j \int d^3r' \rho(\vec{r}') \left( 3 x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij} \right) \end{aligned}$$

Mit Umkehr des Ladungsverteilung:

Als Ansatz der Ladungsverteilung:

Gesamtladung / Monopolmoment

$$q = \int d^3r' \rho(\vec{r}')$$

Dipolmoment

$$\vec{p} = \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}')$$

Quadrupolmoment

$$Q_{ij} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') (3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij})$$

Ergebnis:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right]$$

Potential einer beliebigen Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}')$  entwickelbar in  
 Potential eines Monopols / Punktladung ( $\sim 1/r$ )  
 eines Dipols ( $\sim 1/r^2$ )  
 eines Quadrupols ( $\sim 1/r^3$ )  
 etc.

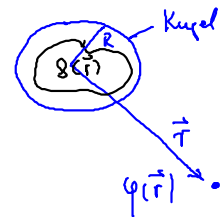
→ Multipol-Entwicklung

$\rho(\vec{r}')$  konzentriert auf Kugel von Radius  $R$

⇒ für  $|\vec{r}| \gg R$  nur wenige Entwicklungsterme relevant, da sie mit

$$\sim \frac{1}{r}, \sim \frac{1}{r^2}, \sim \frac{1}{r^3}, \dots$$

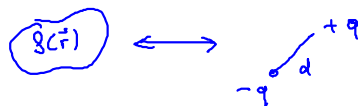
für  $r \rightarrow \infty$  abfallen



Bemerkungen:

1) Gesamtladung  $q$  von  $\rho(\vec{r}')$  Nicht Null,  $q \neq 0$ , dominante Terme in Fernzone  $r \gg R$ :

Dipolterm  $\varphi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}$  falls  $\vec{p} \neq 0$



2) Gesamtladung  $q$  von  $\rho(\vec{r}')$  Nicht Null,  $q \neq 0$ , dominante Terme in Fernzone

Monopolterm  $\varphi_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$  falls  $q \neq 0$

3) Spiegelsym. Ladungsverteilung,  $\rho(\vec{r}') = \rho(-\vec{r}')$

Dipolmoment:  $\vec{p}' \rightarrow -\vec{p}'$

$$\vec{p} = \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}') = \int d^3r' (-\vec{r}') \rho(-\vec{r}') = - \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}') = -\vec{p} \Rightarrow \vec{p} = 0$$

4) Falls  $q = 0$  und  $\vec{p} = 0$

Quadrupolterm  $\varphi_Q(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5}$

5) Quadrupoltensor  $Q_{ij}$  ( $3 \times 3$  Matrix)

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

$$Q_{ij} = \int d^3r' g(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij})$$

$$Q_{ii} = \sum_i Q_{ii} = \text{Sp} Q = \int d^3r' g(\vec{r}') \left( \underbrace{3x'_i x'_i}_{=r'^2} - \underbrace{r'^2 \delta_{ii}}_{=3} \right) = 0$$

Q spurfrei

Q symmetrisch  $\Rightarrow Q_{ij} = Q_{ji}$

spurfrei + symmetrisch.  $\Rightarrow$  nur 5 unabhängige Elemente

$g(\vec{r}')$  kugelsymmetrisch  $\Rightarrow Q_{ij} = 0 \forall i, j \rightarrow$  Übung

Unterschied  $Q_{ij}$  und  $q_{ij}$  für Quadrupol

$$q_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3r' g(\vec{r}') x'_i x'_j$$

$$Q_{ij} = 6q_{ij} - 2\delta_{ij} q_{kk}$$