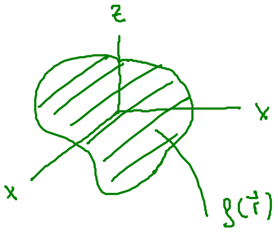
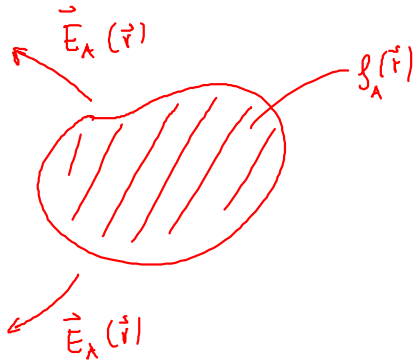
3.5. Wechselwirkung zwischen Ladungsverteilungen

zwei Ladungsverteilungen

$\rho(\vec r)$, $\rho_A(\vec r)$

räumlich getrennt voneinander





$\rho(\vec r)$ im Ursprung (o.B.d.A.)

$\rho_A(\vec r)$ weit entfernt von $\rho(\vec r)$

$\rho_A(\vec r)$ erzeugt elektrisches Feld $\vec E_A(\vec r)$
Feld $\vec E_A(\vec r)$ wechselwirkt mit Ladungsverteilung $\rho(\vec r)$

elektrostat. Feldenergie der gesamten Ladungsdichte:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{[\rho(\vec r) + \rho_A(\vec r)]\,[\rho(\vec r') + \rho_A(\vec r')]}{|\vec r - \vec r'|}$$

nur WW Anteil betrachten, Selbstenergie außen vor

$$W_{int} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r \boxed{\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec r)\,\rho_A(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}}$$

nur $\rho(\vec r)\,\rho_A(\vec r')$ Terme berücksichtigt

$$W_{int} = \int d^3r \, \rho(\vec r) \cdot \varphi_A(\vec r)$$

$$\varphi_A(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho_A(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$, von $\rho_A(\vec r)$ erzeugt

benutze: Raumbereich mit $\rho(\vec r) \neq 0$ klein genug um Potential $\varphi_A(\vec r)$ zu approximieren:

$$\varphi_A(\vec r) = \varphi_A(0) + \text{Korrektur in } \vec r$$

im "Zentrum" der Ladungsverteilung $\rho(\vec r)$

Korrekturen zu $\varphi_A(\vec r)$ $\longrightarrow$ Taylor-Entwicklung

$$f(\vec r) = e^{\vec r \cdot \vec\nabla} f(0) = e^{\vec r \cdot \nabla'} f(\vec r')\Big|_{r'=0}$$

$$\Rightarrow \varphi_A(\vec r) = \varphi_A(0) + (\vec r \cdot \vec\nabla)\,\varphi_A(0) + \frac{1}{2}(\vec r \cdot \vec\nabla)^2 \varphi_A(0) + \ldots$$

$$= \varphi_A(0) - \vec r \cdot \vec E_A(0) + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \varphi_A(0) + \ldots$$

$\vec E_A(\vec r) = -\nabla \varphi_A(\vec r)$

- Raumbereich mit $\rho(\vec r) \neq 0$ beinhaltet keine Ladungen die zu $\varphi_A(\vec r)$ gehören $\Rightarrow$ $\operatorname{div} \vec E_A(\vec r) = 0$ im Bereich wo $\rho(\vec r) \neq 0$

$$\vec\nabla \cdot \vec E_A = \partial_i E_{A_i} = -\partial_i \partial_i \varphi_A = -\partial_i \delta_{ij} \partial_j \varphi_A$$

mit $-\frac{1}{6} r^2$ multiplizieren

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{6} r^2 \, \vec\nabla \cdot \vec E_A(0) = -\frac{1}{6} r^2 \delta_{ij} \partial_i \partial_j \varphi_A(0) = 0$$

- in 2. Term von Taylor-Entwicklung von $\varphi_A(\vec r)$ einsetzen

$$\frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \varphi_A(0) =$$

$$= \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \varphi_A(0) - \frac{1}{6} r^2 \delta_{ij} \partial_i \partial_j \varphi_A(0)$$

$$= \frac{1}{6} \left(3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij} \right) \partial_i \partial_j \varphi_A(0)$$

$$= -\frac{1}{6} \left(3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij} \right) \partial_j E_{A_i}(0) \quad , \; \partial_i \varphi_A = -E_{A_i}$$

$$\boxed{\varphi_A(\vec r) = \varphi_A(0) - r \vec E_A(0) - \frac{1}{6} \left(3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij} \right) \partial_j E_{A_i}(0) + \dots}$$

in Wechselwirkungsterm W_{int} einsetzen

$$W_{int} = \int d^3 r \, \rho(\vec r) \varphi_A(\vec r)$$

$$= \int d^3 r \, \rho(\vec r) \, \varphi_A(0) - \int d^3 r \, \rho(\vec r) \, \vec r \cdot \vec E_A(0)$$

$$- \int d^3 r \, \rho(\vec r) \, \frac{1}{6} \left(3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij} \right) \partial_j E_{A_i}(0) + \dots$$

$$\boxed{W_{int} = Q \, \varphi_A(0) - \vec p \cdot \vec E_A(0) - \frac{1}{6} Q_{ij} \, \partial_j E_{A_i}(0) + \dots}$$

Gesamtladung von $\rho(\vec r)$ Verteilung

Potential von $\rho_A(\vec r)$ Verteilung bei 0

Dipolmoment von $\rho(\vec r)$ Verteilung

elektr. Feld von ρ_A Verteilung bei 0

Quadrupolmoment der $\rho(\vec r)$ Verteilung

Ableitung von E-Feld von $\rho_A(\vec r)$

Bemerkungen:

Ladung von $\rho(\vec r)$ $\overset{WW}{\longleftrightarrow}$ Potential von $\rho_A(\vec r)$

Dipolmoment von $\rho(\vec r)$ $\longleftrightarrow$ elektr. Feld von $\rho_A(\vec r)$

Quadrupolmoment von $\rho(\vec r)$ $\longleftrightarrow$ Ortsableitungen von E_A

Übung: Dipol-Dipol Wechselwirkung $\quad$ H_2-Moleküle $\rightarrow$

$\vec p_1$ $\quad$ $\vec p_2$

3.6. Grundproblem der Elektrostatik unter Berücksichtigung von Randbedingungen.

Grundproblem ES $\quad$ Lösen der Poisson Gleichung $\quad \nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$

bisher $\rho(\vec r)$ bekannt $\longrightarrow$ $\varphi(\vec r)$ berechenbar

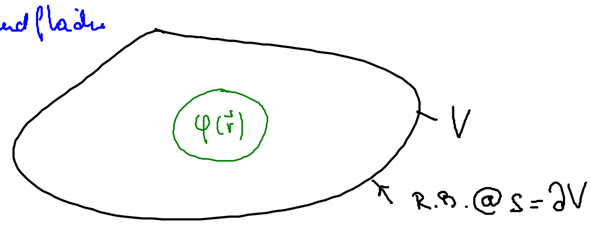
keine Randbedingungen, d.h. spezielle Anforderung an φ im Endlichen z.B. auf Grenzflächen

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|}$$

realistischer Fall:

potentialerzeugende Ladungsverteilung $\rho(\vec r)$ in Raumbereich V $(\neq \mathbb{R}^3)$

es gibt Randbedingungen für φ oder $\partial_n \varphi = -\vec E\cdot\vec n$ auf Grenz/Randfläche

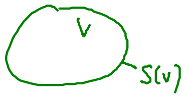


Ziel: Bestimme $\varphi(\vec r)$ in V

Ingredientien:

1. Greensche Sätze
2. Klassifikation von phys. RB
3. Konstruktion der Greenschen Funktion

a) Greensche Sätze (vgl. Kap. 1 ED in Physik II)



allg: zwei mindestens zweifach stetig diff'bar Skalarfeld ϕ, ψ

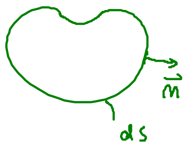
Volumen V mit geschlossener Oberfläche $S(V) = \partial V$ = Rand

betrachte Vektorfeld $\vec A(\vec r)$

$$\vec A(\vec r) = \phi(\vec r)\,\mathrm{grad}\,\psi(\vec r) = \phi\vec\nabla\psi$$

$$\mathrm{div}\,\vec A = \mathrm{div}(\phi\vec\nabla\psi) = \phi\nabla^2\psi + \nabla\psi\cdot\nabla\phi$$

ortsabhängige Flächennormale $\vec n$



$$d\vec S = \vec n\, dS$$

$\vec n = \vec n(\vec r)$ ändert sich entlang S

$$\vec A\cdot d\vec S = \phi\nabla\psi\cdot\vec n\, dS = \phi\,(\underbrace{\nabla\psi\cdot\vec n}_{})\, dS$$

Normalableitung von ψ auf $S(V)$

$$\partial_n\psi = \vec\nabla\psi\cdot\vec n$$

weiter:

$$\int_V \mathrm{div}\,\vec A\cdot d^3r = \int_V \mathrm{div}(\phi\nabla\psi)\, d^3r$$

$$= \int_V (\phi\nabla^2\psi + \nabla\psi\cdot\nabla\phi)\, d^3r$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \oint_{S(V)} \vec A\cdot d\vec S$$

$$= \oint \phi\,\partial_n\psi\, dS$$

$$= \oint_{S(V)} \phi \, \partial_n \psi \; dS \qquad (*) \text{ Greensche Identität}$$

betrachte analog Vektorfeld $\vec{B}(\vec{r})$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \,\text{grad}\, \phi(\vec{r}) = \psi \nabla \phi$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \psi \nabla^2 \phi + \nabla\psi \cdot \nabla \phi$$

$$\int_V \text{div}\, B \, d^3r = \int_{S(V)} \psi \, \partial_n \phi \; dS \qquad (*) \text{ Greensche Identität}$$

Volumenintegrale über div $\vec{A}$ und div $\vec{B}$ subtrahieren

$$\curvearrowright \boxed{\int_V \left(\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \right) d^3r = \oint_{S(V)} \left(\phi \, \partial_n \psi - \psi \, \partial_n \phi \right) dS}$$

Greensche Satz / Identität

speziell $\phi = 1$

$$\longrightarrow \int_V \nabla^2 \psi \, d^3r = \oint_{S(V)} \partial_n \psi \; dS$$

Greensche Sätze verknüpfen Volumenintegrale über Felder mit Oberflächenintegrale über Normalableitungen der Felder auf $S(V)$

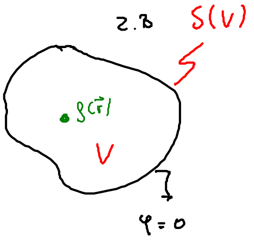
b) Randbedingungen in der ES

1) Dirichlet-Randbedingungen
Potential $\varphi(\vec{r})$ auf $S(V)$ fest vorgegeben

2) Neumann-Randbedingungen
Normalableitung von Potential $\varphi(\vec{r})$, d.h.

$$\partial_n \varphi = - \vec{n} \cdot \vec{E}$$

auf $S(V)$ fest vorgegeben



obige RB relevant in Physik:
tragen Unterscheidung von Leitern und Nichtleitern Rechnung.

Leiter: Atomrumpfgitter + frei bewegliche Elektronen "suppe"

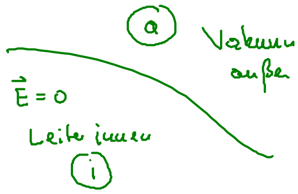
insgesamt ladungsneutral

Ladungen auf Oberfläche lokalisiert

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \\ \varphi(\vec{r}) = \text{const} \end{array} \right\} \text{ im Leiter}$$

Grenzfläche Leiter & Vakuum:

$$\Rightarrow E_i^{(n)} = 0 = E_i^{(t)}$$



tangentiale Komp. von $\vec{E}$ stetig an Grenzfläche

$$E_a^{(t)} = E_i^{(t)} \equiv 0 \qquad @ \; S$$

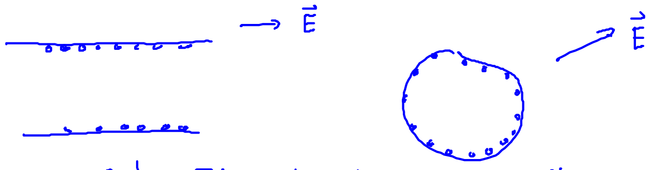
normale Komp. von $\vec{E}$ hat Sprung

$$E_a^{(n)} - E_i^{(n)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \longleftarrow \text{Flächenladung auf } S$$

im Leiter $E_i^{(n)} \equiv 0$

$$\Rightarrow \quad E_a^{(n)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \vec{E} \perp S$$

$$\int_V dV \, \mathrm{div}\, \vec{E}_i = 0 = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{S} \quad , \text{ da } \vec{E}_i = 0 \text{ im Leiter}$$



Externes Feld influenziert Ladungsverteilung an Oberfläche

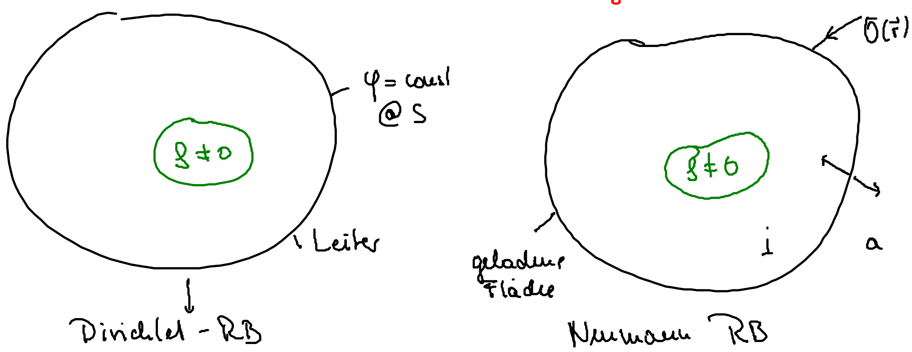
__Nichtleiter__ Atome als Entität im Gitterverband
keine frei beweglichen Ladungen
Anlegen von elektr. Feld → kein Aufreißen der Bindungen
aufgebrachte Zusatzladungen bleiben lokalisiert.

insgesamt:

Leiteroberfläche $\varphi(\vec{r}) = \text{const}$

geladene Fläche $\partial_n \varphi_a - \partial_n \varphi_i = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Dipolschichten $\varphi_a - \varphi_i = \pm \frac{1}{\varepsilon_0} D \longrightarrow$ Übung



c) Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung

Existenz von Lösung der PG → Potentialtheorie
physikal. $\vec{E}$ und φ existiert.

__aber__ Eindeutigkeit der Lösung der PG? Physikal. Reproduzierbarkeit?

Nachweis von Eindeutigkeit der Lösungen $\varphi(\vec{r})$ der PG

Annahme: __nicht__-eindeutig ⟶

$\exists$ 2 Lösungen $\varphi_1(\vec{r})$ und $\varphi_2(\vec{r})$, beide erfüllen

$$\nabla^2 \varphi_{1,2} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad + \text{Randbedingungen!}$$

definiere $\psi(\vec{r}) = \varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r})$

Dirichlet RB	Neumann RB

$\varphi_1 = \varphi_2$ @ $S(V)$

$\downarrow$

$\psi = 0$ @ $S(V)$

$$\nabla^2 \psi = 0$$

$\partial_n \varphi_1 = \partial_n \varphi_2$ @ $S(V)$

$\downarrow$

$\partial_n \psi = 0$ @ $S(V)$

Greensche Satz:

$$\int_V d^3r \, [\underbrace{\psi \nabla^2 \psi}_{\equiv 0} + \nabla\psi \cdot \nabla\psi] = \oint_{S(V)} \underbrace{\psi \, \partial_n \psi}_{\equiv 0} \, dS = 0$$

$$\curvearrowright \quad \int_V d^3r \, (\nabla\psi)^2 = 0$$

$$\curvearrowright \quad (\nabla\psi)^2 = 0 \quad \text{da } V \text{ beliebig}$$

$$\curvearrowright \quad \psi = \text{const.}$$

Dirichlet

$\psi = 0$ @ $S(V)$

$\downarrow$

$\psi = 0$ in V

$\varphi_1 = \varphi_2$ in V

Eindeutigkeit der Lösung

Neumann

ψ = const in V

$\downarrow$

$\partial_n \psi = 0$ @ $S(V)$

$\downarrow$

$\varphi_1 = \varphi_2 + \underline{\underline{\text{const}}}$

const irrelevant für $\vec{E}$.

3.7 Formale Lösung der Poisson Gleichung mit Greensfunktionen

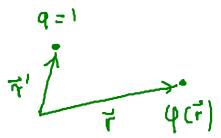
Ziel: Lösung der Poisson Gl.

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

für vorgegebene Randbedingungen; innerhalb von Volumen V

Definition: Greensfunktion der Poisson Gleichung $G(\vec{r},\vec{r}\,')$

= Lösung der Poisson Gl. für eine Einheitspunktladung $q = 1$ im Punkt $\vec{r}\,'$



$$\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \overset{q=1}{=} \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Beachte: 1) $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ ist symmetrisch in Argumenten $\vec{r},\vec{r}\,'$

d.h. $\vec{r} \to \vec{r}\,'$, $\vec{r}\,' \to \vec{r}$, $\nabla^2 \to \nabla'^2$

$$\Rightarrow \quad \nabla'^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r})$$

formal identisch.

2) ∇^2 translations und rotationsinvariant

$\rightarrow$ Lösung $G(\vec{r}-\vec{r}\,')$ ebenso

$$\Rightarrow \quad G(\vec{r},\vec{r}\,') = G(\vec{r}-\vec{r}\,') = G(\vec{R}) = G(|\vec{R}|) = G(R)$$

$\vec{r}-\vec{r}\,' =: \vec{R}$

$|\vec{r}-\vec{r}\,'| =: R$

$$\nabla^2 G(R) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\delta(\vec{R})$$

in 3D :

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2}\partial_R R^2 \partial_R + \text{Terme mit Ableitungen nach } \varphi, \theta$$

insgesamt: Übung Physik II

$$\frac{1}{R^2}\partial_R R^2 \partial_R G(R) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{R}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\delta(R)}{4\pi R^2}$$

$$\partial_R R^2 \partial_R G(R) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\delta(R)$$

$$R^2 \partial_R G(R) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \delta(R)\, dR = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\partial_R G(R) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}$$

$$G(R) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{R^2}\, dR = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

Fazit

$$G(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{R}|}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$$

$$\boxed{G_S(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

$\longleftarrow$

alternativ:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}\,'-\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{1}{4\pi}\nabla'^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \stackrel{!}{=} \nabla^2 G(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

aber: $G_S(\vec{r}-\vec{r}\,')$ nur eine und einfache Greensfunktion
einer ganzen Klasse, die Poisson-Gl. für Einheitsladung erfüllen.
Noch Freiheit einer Zusatz. additiven Teil zu $G_S(\vec{r}-\vec{r}\,')$

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{=G_S} + F(\vec{r},\vec{r}\,') = G(\vec{r}\,',\vec{r})$$

wobei $F(\vec{r},\vec{r}\,')$ die Bedingungen

1) $\nabla^2 F(\vec{r},\vec{r}\,') \equiv 0$, F harmonisch

2 $F(\vec{r},\vec{r}\,') = F(\vec{r}\,',\vec{r})$, F symmetrisch

erfüllen muß.

HA. $\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

$\nabla'^2 G(\vec{r}\,',\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}) + \nabla'^2 F(\vec{r},\vec{r}\,')$ $\Big\} \Rightarrow$ erfüllt Poisson Gl.

$F(\vec{r},\vec{r}\,')$ zunächst beliebig

Freiheit der Wählens von $F(\vec{r},\vec{r}\,')$ wird ausgenutzt um

Randbedingungen zu realisieren / einbauen

Greensche Identität

$$\int_V \left(\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi\right) dV = \oint_{S(V)} ds \left(\phi \partial_n \psi - \psi \partial_n \phi\right)$$

setze $\phi = \varphi$ (Potential)

$\psi = G$ (Greensfunktion)

$\vec{r} \to \vec{r}\,'$ (Kosmetik!)

$\curvearrowright$

$$\int_V d^3r' \left(\varphi \underbrace{\nabla'^2 G}_{= -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')} - G \underbrace{\nabla'^2 \varphi}_{= -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r})}\right)$$

wg Poisson Gl.

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int_V d^3r' \varphi(\vec{r}\,') \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')}_{\varphi(\vec{r}) \text{ in } V} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' G(\vec{r}-\vec{r}\,') \varrho(\vec{r}\,')$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \varphi(\vec{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' G(\vec{r}-\vec{r}\,') \varrho(\vec{r}\,')$$

$$= \oint_{S(V)} ds' \left(\varphi(\vec{r}\,') \partial_{n'} G(\vec{r},\vec{r}\,') - G(\vec{r},\vec{r}\,') \cdot \partial_{n'} \varphi(\vec{r}\,')\right)$$

Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ und Greensche Funktion $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ bekannt in V und weitere RB für φ oder/und $\partial_n \varphi$ bekannt $\Rightarrow$ Potential $\varphi(\vec{r})$ in jedem Punkt $\vec{r} \in V$ berechenbar

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G(\vec{r},\vec{r}\,') \varrho(\vec{r}\,') - \varepsilon_0 \oint_{S(V)} ds' \left[\varphi(\vec{r}\,') \partial_{n'} G - G \partial_{n'} \varphi(\vec{r}\,')\right] \quad (*)$$

nicht beide RBs $\varphi(\vec{r}) = \ldots$ und $\partial_n \varphi(\vec{r}) = \ldots$ @ S simultan vorgebbar, nur eine wählbar

(1) <u>einfachste RB</u> $V = \mathbb{R}^3$, $S(V)$ unendl. große Kugeloberfläche

Vorgabe: $\varphi(\vec{r}) = 0$ @ $S(V)$

$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) \to 0$ mit $|\vec{r}| \to \infty$

$(*)$ mit $|\vec{r}\,'| \to \infty$

$$0 = \lim_{|\vec{r}| \to \infty} \left[\int d^3r' G(\vec{r},\vec{r}\,') \varrho(\vec{r}\,') + \underbrace{\varepsilon_0 \oint_{S(V)} G(\vec{r},\vec{r}\,') \underbrace{\partial_{n'} \varphi(\vec{r}\,')\, ds'}}_{\to 0}\right]$$

Lösung von Dgl für Einheitspunktladung

$$G_S(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r},\vec{r}\,') \varrho(\vec{r}\,')\, d^3r' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3r'$$

$G(\vec{r},\vec{r}\,')$ als Integrationskern

(2) Dirichlet-Randbedingung: $\varphi(\vec{r})$ auf $S(V)$ vorgegeben

wähle $F(\vec{r},\vec{r}\,')$ so, dass

$$\oint_{S(V)} ds'\, G_D(\vec r,\vec r\,')\, \partial_{n'}\varphi(\vec r\,') \stackrel{!}{=} 0$$

Greenfunktion für Dirichlet RB

RB für Greenfunktion

$$G_D(\vec r,\vec r\,') = 0 \quad \text{für } \forall\, \vec r\,' \in S(V)$$

$$\curvearrowright \quad \varphi(\vec r) = \int_V d^3r'\, G_D(\vec r,\vec r\,')\,\rho(\vec r\,') - \varepsilon_0 \int_{S(V)} ds'\,\varphi(\vec r\,')\,\partial_{n'} G_D$$

$\left.\begin{array}{l}\varphi(\vec r\,') \text{ auf } S(V)\\ \rho(\vec r\,') \text{ in } V\end{array}\right\}$ bekannt $\longrightarrow$ $G_D(\vec r,\vec r\,')$ zu bestimmen

(3) Neumann-Randbedingungen $\partial_n\varphi(\vec r) = -\vec E\cdot\vec n$ auf $S(V)$ vorgegeben

Wahl $\partial_{n'} G_D = 0 \quad \forall\, \vec r \in S(V)$ nicht möglich, da

$$\int_V d^3r'\, \nabla'^2 G_N(\vec r,\vec r\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r'\,\delta(\vec r-\vec r\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \quad \text{für } \vec r \in V$$

$$\stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_{S(V)} d\vec s\,'\cdot\nabla' G_N(\vec r,\vec r\,') = \oint_{S(V)} ds'\cdot\partial_{n'} G_N = 0 \quad \text{falls } \partial_{n'} G_N = 0 \text{ gewählt wurde}$$

inkompatibel

deswegen $F(\vec r,\vec r\,')$ so wählen, dass

$$\partial_{n'} G_N(\vec r,\vec r\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0 S} \neq 0 \quad \text{für } \vec r\,' \in S(V)$$

2 Term in φ-Formel (*)

$$\varepsilon_0 \oint_{S(V)} ds'\,\varphi(\vec r\,')\,\partial_{n'} G_N(\vec r,\vec r\,')$$

$$= -\frac{1}{S}\int_{S(V)} ds'\,\varphi(\vec r\,') = \text{"}-\text{"} \text{ Mittelwert von } \varphi \text{ auf Oberfläche } S(V)$$

<u>Bemerkung</u> bis Greensche Fkt für 3d Raum

$$\left.\begin{array}{lll} d=3: & G = \dfrac{1}{|\vec r-\vec r\,'|} \\ d=2: & G = \ln\dfrac{a}{|\vec r-\vec r\,'|} \\ d=1: & G = -\dfrac{1}{2}|x-x'| \end{array}\right\} \quad \nabla^2 G = -4\pi\,\delta(\vec r-\vec r\,')$$

3.8 Methode der Spiegelladungen / Bildladungen

erste einfache Anwendung der Greensfkts methode

$$G(\vec r,\vec r\,') = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|}}_{\text{freie Greenfkt ohne RB im Endl.}} + \underbrace{F(\vec r,\vec r\,')}_{\text{weiteres "Bildpotential"}}$$

Randbedingungen durch Wahl von $F(\vec r,\vec r\,')$ adjustieren

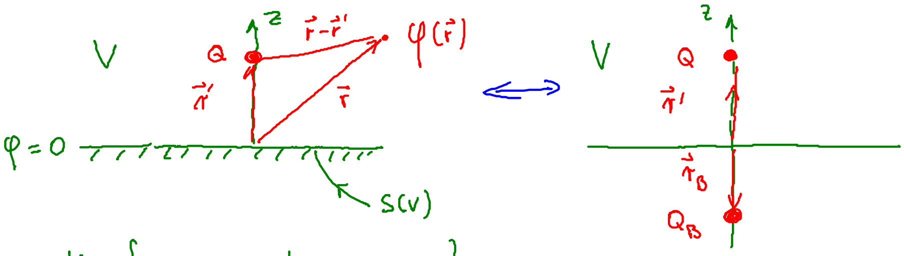
Idee: außerhalb von V

an von Geometrie des Problems abhängige Positionen fiktive Ladungen („Spiegelladungen") anbringen, so dass geforderte RB bei $S(V)$ erfüllt werden.

innerhalb von V Poisson Gl. $\nabla^2 \varphi = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ gültig

$$\rho(\vec{r}) + RB \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(\vec{r}) + \text{Bildladung } \underline{\text{ohne}} \text{ RB}$$

Bsp: Punktladung über geerdeter, unend. ausgedehnter Metallplatte:



$$V = \{ x, y, z \geq 0 \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$$

RB: $\varphi = 0$ auf $S(V)$ = Dirichlet

Ansatz: $$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\text{reale Ladung}} + \underbrace{\frac{Q_B}{|\vec{r}-\vec{r}_B|}}_{\text{Bild Ladung}} \right]$$

Ziel Q_B und $\vec{r}_B$ so bestimmen, dass

1) $\vec{r}_B \notin V$

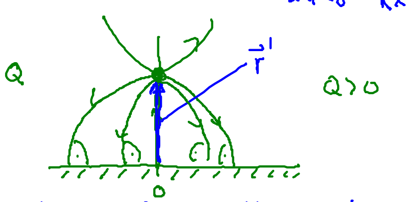
2) $\varphi(\vec{r}) = 0 \quad \forall\, \vec{r} = (x, y, z=0)$

$\varphi(x, y, z=0) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_B = -\vec{r}\,', \quad Q_B = -Q$$

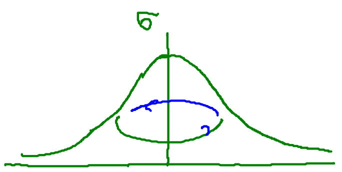
elektr. Feld

$$\vec{E} = -\nabla \varphi(\vec{r})$$
$$\vec{E}(x, y, z=0) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x^2+y^2+z'^2)^{3/2}}\, z'\, \vec{e}_z$$



$E(x, y, z=0)$ nur Komponente in $\vec{e}_z$ Richtung

influenzierte Flächenladungsdichte



Gerade in x,y Ebene durch (0,0)

$$E_a^{(t)} = 0$$
$$E_a^{(n)} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$$
$$\sigma = \varepsilon_0 E(x, y, z=0) = \sigma(x, y, z=0)$$
$$= -\frac{Q}{2\pi} \frac{z'}{(x^2+y^2+z'^2)^{3/2}}$$

σ radialsymmetrisch

σ maximal bei $x = y = 0$

σ maximal bei $x = y = 0$

Gesamtflächenladung

$$\tilde{Q} = \int_{S(\text{mit } z=0)} dS\, \sigma(x,y) = -Q$$

Bildkraft: σ in Platte induziert durch Ladung Q

Kraft von Q auf σ

$$\vec{F} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2z'^2}\,\vec{e}_z$$

Zusammenhang mit Greenscher Funktion:

$$\nabla^2 G_D(\vec r,\vec r\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\delta(\vec r-\vec r\,') \quad + \text{ Dirichlet RB bei } \varphi(S)$$

$G_D(\vec r,\vec r\,')$ = Potential von Einheitspunktladung $Q=1$ + RB

= Potential von Einheitspunktladung $Q=1$ bei $\vec r\,'$

+ Potential von Einheitspunktladung $Q=-1$ bei $-\vec r\,'$

so, dass $G_D(\vec r,\vec r\,') = 0$ @ $S(V)$

⇒

$$G_D(\vec r,\vec r\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|} - \frac{1}{|\vec r+\vec r\,'|}\right)$$

$G_D(\vec r,\vec r\,') = 0$ @ $S(V)$ simultan erfüllt.

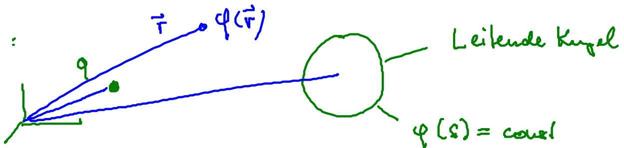
allgemeine Ladungsverteilung:

Einsetzen in Greensche Darstellung von Potential

$G_D(\vec r,\vec r\,')$

$$\underbrace{\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec r\,')\left[\frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|} - \frac{1}{|\vec r+\vec r\,'|}\right]d^3r' - \varepsilon_0\oint_S dS\,\underbrace{\varphi(\vec r\,')}_{\to 0}\,\partial_{n'} G_D(\vec r,\vec r\,')}_{=0}$$

Verallgemeinerung:



$\Rightarrow \quad \varphi(\vec r) \Rightarrow G_D(\vec r,\vec r\,')$

spezielles Problem

G_D, G_N nicht mehr von Randwertproblemstellung abhängig,

aber: von Form, Größe von S abhängig

Bestimmung von G_D, G_N im Allg. kompliziert

$$\nabla^2 G(\vec r,\vec r\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\delta(\vec r-\vec r\,')$$

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + F(\vec{r},\vec{r}')$$

$$\nabla'^2 F(\vec{r},\vec{r}') = 0$$

notwendig $F(\vec{r},\vec{r}')$ mittels RB (D, N) bestimmen.

- allgemeine Lösung von $\nabla^2 F = 0$
- Anpassung an RB

allgemeine Lösung von $\nabla^2 F = 0$ kompliziert

manchmal: Lösung per Separation der Variablen in verschiedenen KO-Systemen möglich

Lösungstechnik: Entwicklung nach vollständigen, orthogonalen Funktionensystemen.