3.9. Mathem. Einschub: Vollständige orthogonale Funktionensysteme

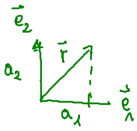
Laplace ∇^2 fundamental in vielen Grundgleichungen der Physik

- Diffusionsgleichung $\partial_t \psi = D \nabla^2 \psi$
- Wellengleichung $\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \psi = \nabla^2 \psi$
- → Schrödinger-Gl. $i\hbar \partial_t \psi \sim \nabla^2 \psi$ ("freier" Fall)
- Navier-Stokes-Gl. $\nabla^2 \vec{u}$ (Reibungsterm)

Grundlegende Frage: Lösungsmethode für Laplace Gleichung $\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = 0$

- VONS
- kartesische Koordinaten → Fourier
  zylindrische Koordinaten → Bessel / Hankel
  Kugelkoordinaten → Legendre / Kugelflächenfkt.

a) Grundlegende Idee:



Mechanik: Vektor $\vec{r}$ dargestellt als Superposition von Basisvektoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$\vec{r} = \sum_{n=1}^{3} a_n \vec{e}_n$$

Verallgemeinerung des Konzepts auf Funktionen:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)$$

a_n: Entwicklungskoeffizienten

$g_n(x)$: Basisfunktionen, die Funktionenraum, i.a. Raum der quadratintegrablen Funktionen, aufspannen

Dim (Funktionenraum) i. Allg. ∞

Betrachte 1d + Intervall $[a,b]$ und System von reellen/komplexen Funktionen
$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$ auf $[a,b]$

Funktionensystem $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ orthogonal, falls

$$\int_a^b g_n(x)\, g_m^*(x)\, dx = N_n \delta_{nm}$$

$\neq 0$ nur für $n = m$

Normierungskonstante

unitäres Produkt (verallg. Skalarprodukt)

$g_m^*(x)$: konj. kompl. Funktion von $g_m(x)$

falls $N_n = 1 \;\forall n \Rightarrow \{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ Orthonormalsystem

Norm von Funktion g: $|g| = \left| \int_a^b g(x)\, g^*(x)\, dx \right|^{1/2}$

$\Rightarrow |g| \in \mathbb{R},\ |g| \geq 0 \quad \rightarrow$ Norm!

Falls $g(x) \not\equiv 0 \Rightarrow g(x)$ normierbar

$$G(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{\int_a^b g(x)\, g^*(x)\, dx}}, \text{ die zu } g(x) \text{ normierte Fkt.}$$

(analog zu Vektoren $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}}$)

Bestimmung von Entwicklungskoeffizienten a_n

$f(x)$ beliebig

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x), \quad \{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \left\{\begin{matrix}\text{orthogonal} \\ + \\ \text{normiert}\end{matrix}\right\} \mathrel{\hat=} \text{orthonormal}$$

$$f(x) \cdot g_m^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)\, g_m^*(x)$$

$$\int_a^b f(x)\, g_m^*(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)\, g_m^*(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, g_m^*(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) g_m^*(x)\, dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_a^b g_n(x)\, g_m^*(x)\, dx}_{=\delta_{nm}}$$
$$= \sum_n a_n \delta_{nm}$$
$$= a_m$$

$$\Rightarrow \quad a_m = \int_a^b f(x)\, g_m^*(x)\, dx \qquad (*)$$

Vollständigkeit des Funktionensystems

$f(x)$ quadratintegrabel, $\int_a^b f(x) f^*(x)\, dx < \infty$

Funktionenfolge $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n g_n(x)$

$N \in \mathbb{N}$, $N < \infty$!

Ziel: a_n so wählen, dass $f_N(x)$ die vorgegebene Funktion $f(x)$ optimal approximieren.

$$A = \int_a^b dx\, |f(x) - f_N(x)|^2 \overset{!}{=} \text{minimal}$$

$$A = \int_a^b dx\, \big(f(x) - f_N(x)\big)\big(f^*(x) - f_N^*(x)\big)$$

$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n g_n(x)$

$$= \int_a^b dx\, f(x) f^*(x)$$
$$- \sum_{n=1}^{N} a_n^* \int_a^b dx\, g_n^*(x) f(x)$$
$$- \sum_{n=1}^{N} a_n \int_a^b dx\, g_n(x) f^*(x)$$
$$- \sum_{n=1}^{N} a_n^* a_n \underbrace{\int_a^b dx\, g_n^*(x) g_n(x)}_{=1}$$

Extremalbedingung

$$\frac{\partial A}{\partial a_n} \overset{!}{=} 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = -\int_a^b dx\, g_n(x) f^*(x) + a_n^*$$

$$\frac{\partial A}{\partial a_n^*} \overset{!}{=} 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = -\int_a^b dx\, g_n^*(x) f(x) + a_n$$

optimale Wahl der a_n, wenn

$$a_n = \int_a^b dx\, g_n^*(x) f(x)$$

die mit diesen a_n bildbare Funktion $f_N(x)$ ist im Rahmen von kleinstem mittleren Fehlerquadrat die beste Approximation von $f(x)$, die durch nur N Fktionen $\{g_n(x)\}_{n=1}^{N}$ erreichbar ist.

notwendig:
$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b |f(x) - f_N(x)|^2\, dx = 0$$

"Konvergenz im Mittel"

Orthonormales Funktionensystem $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ heißt vollständig, falls für jede quadratintegrable Fkt $f(x)$ die Reihe $f_N(x)$ im Mittel gegen $f(x)$ konvergiert

$$f_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)$$

Konsequenz:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)$$

$$(*) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b dy\, g_n^*(y)\, f(y) \cdot g_n(x)$$

$$= \int_a^b dy\, f(y) \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(y)\, g_n(x)}_{\stackrel{!}{=}\, \delta(x-y)} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(x)$$

x - Abh.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(y)\, g_n(x) = \delta(x-y)}$$

Analogie: Vektoren $\longleftrightarrow$ Funktionen

Vektoren im $\mathbb{R}^3$		Funktionen
$\vec{r}$		$f(x)$
$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$	Basis	$\{g_1(x), \dots, g_n(x), \dots\}$
$\vec{e}_n \cdot \vec{e}_m = \delta_{nm}$	Ortho-normiertheit	$\langle g_n(x) \mid g_m(x) \rangle = \delta_{nm}$ mit $\langle g_n(x) \mid g_m(x) \rangle = \int_a^b g_n(x)\, g_m^*(x)\, dx$
$\vec{r} = \sum_{n=1}^{3} x_n \vec{e}_n$	Entwicklung nach Basisvektoren	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, g_n(x)$
$x_n = \vec{r} \cdot \vec{e}_n$	Projektion	$a_n = \langle f(x) \mid g_n(x) \rangle$
$\vec{e}_n \cdot \vec{e}_n = 1$	Vollständigkeit	$\sum_n g_n^*(x)\, g_n(y) = \delta(x-y)$

b) Fourier-Reihen

1d Intervall, $-\pi \le x \le \pi$

positive, ganzzahlige n, m

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \pi \cdot \delta_{nm} \quad \longrightarrow \text{Nachrechnen!}$$

$$\Longrightarrow \quad g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \qquad n = 1, 2, \dots$$

bilden Orthonormalsystem

kann aber nur ungerade Funktionen approximieren, d.h. Funktionen mit $f(x) = -f(-x)$

Für beliebige $f(x)$ noch entsprechendes Orthonormalsystem, das gerade Funktionen $f(x) = f(-x)$ repräsentieren kann

$$f(x) = f_u(x) + f_g(x)$$

$$f_u(x) = -f_u(-x), \quad f_g(x) = f_g(-x)$$

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$h_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

insgesamt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx \right]$$

"Fourier-Reihe" für $f(x)$

mit Koeffizienten:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

alternative Version: komplexe Form der Fourier Reihe

$$\sin nx = \frac{1}{2i} \left(e^{inx} - e^{-inx} \right)$$

$$\cos nx = \frac{1}{2} \left(e^{inx} + e^{-inx} \right)$$

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)$$

in $f(x)$ einsetzen

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

$$= c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} + c_2 e^{2ix} + c_{-2} e^{-2ix} + \dots$$

$$\Rightarrow \quad c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dx\, f(x)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(a_1 - i b_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\left(\cos x - i \sin x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{-ix}\, dx$$

c_2, etc..

allgemein:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Fourier-Reihe}\\ f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\\ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx\end{array}}$$

Verallgemeinerung auf allgem. Intervall $[a,b]$

Länge $L = b - a$ statt wie vorher 2π

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{i\frac{2n\pi}{b-a}x}$$

$$c_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, e^{-i\frac{2n\pi}{b-a}x}\, dx$$

Bemerkungen:
- komplexe Form von Fourier Reihe
  Summe von $-\infty \rightarrow -\infty$
- c_n i. Allg komplexe Größen

$f(x)$ reelle Funktion $\quad f(x) = f^*(x) \quad \Rightarrow \quad c_n = c_{-n}^*$

da: $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{i\frac{2n\pi}{b-a}x}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\, e^{\frac{i2n\pi}{b-a}x} + c_n^*\, e^{-\frac{i2n\pi}{b-a}x}\right]$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\, e^{\frac{i2n\pi}{b-a}x} + \text{c.c.}\right]$$

$$\Rightarrow \quad c_n^* = c_{-n}$$

$f(x)$ symmetrisch: $\quad f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow \quad c_n = c_{-n}$

$f(x)$ antisymmetrisch: $\quad f(x) = -f(-x) \quad \Rightarrow \quad c_n = -c_{-n}$

Fourier Reihen

Verallgemeinerung auf 3 Raumdimensionen: $f(\vec{r}) = f_x(x)\, f_y(y)\, f_z(z)$

geläufige Schreibweise von $\frac{2\pi}{b-a} = \frac{2\pi}{L} \overset{!}{=}: k$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{L} = \frac{k}{2\pi}$$

k als Wellenzahl

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{inkx}\\ c_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, e^{-inkx}\, dx\end{array}}$$

c) Legendre Polynome / Kugelflächenfunktionen

Fourier gut wenn RB quaderförmig

bei radialsymm. Probleme oder ähnlichen anderer Satz von VONS besser.

bei radialsymm. Probleme oder ähnlichen anderer Satz von VONS besser.

Laplace Gleichung $\nabla^2 \varphi(\vec r) = 0$

Versuch der Lösung in Kugelkoordinaten

Separationsansatz: $\varphi(\vec r)$ als Kombination / Produkt von Funktionen, die nur von einer unabhängigen Variablen abhängen.

$$\varphi(\vec r) = \varphi(r,\theta,\phi) = \varphi_1(r)\,\varphi_2(\theta)\,\varphi_3(\phi) = \frac{U(r)}{r}\,P(\cos\theta)\;Q(\phi)$$

als Ansatz in Laplace Gl in Kugelkoordinaten einsetzen.

$$\nabla^2\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r}\partial_r^2(r\varphi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta\varphi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\varphi = 0$$

$$\frac{PQ}{r}\partial_r^2 U + UQ\,\frac{1}{r^3\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta P) + UP\,\frac{1}{r^3\sin^2\theta}\partial_\phi^2 Q = 0$$

multipliziere mit $r^3\sin^2\theta$

dividiere durch UPQ

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{Q}\partial_\phi^2 Q = -r^2\sin^2\theta\;\frac{1}{U}\partial_r^2 U - \frac{\sin\theta}{P}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta P) \overset{!}{=} -m^2 \quad (*)}$$

lhs nur von ϕ abhängig

rhs nur von r und θ abhängig

lhs = rhs $\Rightarrow$ lhs bzw rhs koordinatenunabhängige Größe

$\Rightarrow$ Größe darf nicht von r, θ, ϕ abhängen

Separationskonstante $K = -m^2$ (später nützlich)

Konsequenz: $\frac{1}{Q}\partial_\phi^2 Q = -m^2$

$$\partial_\phi^2 Q + m^2 Q = 0$$

harmon. Oszillator ($\phi \leftrightarrow t$, $Q(\phi) \leftrightarrow x(t)$)

Lösung: $Q(\phi) = Q_m(\phi) = e^{im\phi}$

Kugelkoord: $(r,\theta,\phi) = (r,\theta,\phi+2\pi)$

$\Rightarrow Q(\phi+2\pi) = Q(\phi)$

$\Rightarrow Q_m(\phi+2\pi)\,e^{im(\phi+2\pi)} \overset{!}{=} Q_m(\phi)\,e^{im\phi}$

$\Rightarrow$ 1) m ganzzahlig, $e^{im2\pi} = 1$ für $m \in \mathbb{Z}$!

2) $Q_m(\phi+2\pi) = Q_m(\phi)$

$\Rightarrow$ allgemein: $e^{\pm im\phi}$

rhs von (*) betrachten

r-abhängige Terme auf lhs

θ-abhängige Terme auf rhs

+ Division durch $\sin^2\theta$

$$\frac{r^2}{U}\partial_r^2 U = -\frac{1}{P\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta P) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \overset{!}{=} \lambda$$

analog zu oben

rhs nur r-abh.

lhs nur θ-abh. } lhs = rhs = λ = koordinatenunabhängig!

$\Rightarrow$ 2 GDgls für $u(r)$ und $P(\cos\theta)$

Dgl für P schöner schreiben: $x = \cos\theta \Rightarrow \frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}$

Konsequenz $\qquad \nabla^2\varphi(\vec r) = \nabla^2\varphi(r,\theta,\phi) = 0$

mit $\qquad \varphi(\vec r) = \frac{u(r)}{r}\, P(x)\, Q(\phi)$

auf 3 GDgls reduziert.

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial_r^2 u - \frac{\lambda}{r^2} u = 0 && , \; u = u(r) \\ &\partial_x\left[(1-x^2)\partial_x P\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P = 0 && , \; P = P(x) \\ &\partial_\phi^2 Q + m^2 Q = 0 && , \; Q = Q(\phi) \end{aligned}}$$

Legendre $\longrightarrow$ Gleichung

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

λ : noch nicht spezifiziert.

Nochmals zurück zur $Q(\phi)$ Gleichung

$$Q(\phi) = Q_m(\phi)\, e^{im\phi}$$

$Q(\phi)$ 2π periodisch weil ϕ 2π Periodisch

$$Q_m(\phi)\, e^{im\phi} = Q_m(\phi + 2\pi)\, e^{im(\phi+2\pi)}$$

$Q_m(\phi)$ = konstant, damit Q Dgl. erfüllt

$Q_m(\phi) = 1$ per Konv. (Konst in $u(r), P(x)$)

$Q(\phi) = e^{im\phi}$, $m \in \mathbb{Z}$

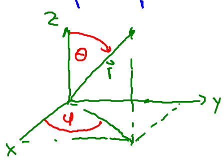
$\rightarrow Q(\phi) = \sum_m e^{im\phi}$ (Fourier-Reihe)

betrachte zunächst "zylindersymmetr." Problem als Spezialfall

$\varphi(r,\theta,\cancel{\phi}) = \varphi(r,\theta)$

unabhängig von ϕ

$Q_m(\phi) \sim e^{im\phi}$, $m \in \mathbb{Z}$



betrachte hier $m = 0 \Rightarrow Q(\phi) = 1$

$\Rightarrow$ Term $\frac{m^2}{1-x^2} = 0$ in Legendre-Gleichung

$$\partial_x\left[(1-x^2)\partial_x P\right] + \lambda P = 0$$

$$\boxed{(1-x^2)\,\partial_x^2 P - 2x\,\partial_x P + \lambda P = 0} \quad , \; P = P(x)$$

Koeffizient von P Gl. enthalten Potenzen von x

P(x) als Potenzreihe ansetzen:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

beachte: $x = \cos\theta$, $-1 \leq x \leq 1$!

$$\partial_x P(x) = \partial_x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, k\, x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, k\, x^{k-1} \underset{k+1 \to k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1)\, x^k$$

$$\partial_x^2 P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (k+2)(k+1)\, x^k$$

insgesamt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_k (k-1) k - 2k\, a_k + \lambda a_k \right] x^k = 0$$

muss identisch Null, wenn alle Koeffizienten $[\ldots] = 0$
jeder $[\ldots]$ vor Potenz x^k separat Null

Auflösen von $[\ldots]$ nach a_{k+2}

$$\curvearrowright \quad a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} a_k$$

Rekursionsformel $a_{k+2} = f(a_k)$

a_0 vorgeben $\longrightarrow$ a_{2n} $n \in \mathbb{N}$ bestimmbar
a_1 vorgeben $\longrightarrow$ a_{2n+1} $n \in \mathbb{N}$ bestimmbar

Grenzfall großer k:

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{\cancel{k^2}}{\cancel{k^2}} \frac{1 + \frac{1}{k} - \frac{\lambda}{k^2}}{1 + \frac{4}{k} + \frac{2}{k^2}} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$$

$$\Rightarrow a_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \text{const}$$

Konsequenz für $P(x)$:

$$P(x) = \ldots\ldots + \text{const}\,\underbrace{(x^n + x^{n+2} + x^{n+4} \ldots)}_{\xrightarrow[x=1]{} \infty}$$

für große n

Singularität von $P(1)$ vermeiden
→ Abbruchkrit. für Potenzreihe bei endlichem k
→ Abbruchbedingung:

$$\lambda \equiv k(k+1) \quad \text{für } \underline{\text{ein}}\ k$$

$$\Rightarrow a_{k+2} = 0, \quad a_{k+4} = 0 \Rightarrow a_{k+2n} = 0 \qquad n \in \mathbb{N}$$

Abbruch der Potenzreihe bei endlich Indizes

wenn $\lambda = l(l+1)$

$$l = \begin{cases} 0, 2, 4, \ldots & \text{und } a_1 = 0 \\ 1, 3, 5, \ldots & \text{und } a_0 = 0 \end{cases}$$

l geradzahlig $a_0, a_2, \ldots$ bricht ab
l ungeradzahlig $a_1, a_3, \ldots$ bricht ab

insgesamt: Lösung von P-Gleichung hat Form

$$P_l(x) = \sum_{k = l, l-2, l-4, \ldots} a_k x^k$$

niedrigster Koeffizient a_0 oder a_1 zunächst beliebig
Konvention: $P_l(x=1) = 1$

Bsp: $P_3(x) = ?$

l ungerade $\Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = a_4 = \ldots = 0$
a_1 beliebig, aber $\neq 0$

$$a_3 = \frac{1(1+1) - 3(3+1)}{(1+2)(1+1)} a_1 = -\frac{5}{3} a_1$$

$$a_5 = \frac{3(3+1) - 3(3+1)}{(3+2)(3+1)} a_3 = 0$$

$$a_7, a_9, a_{11}, \ldots \equiv 0$$

$$P_3(x) = a_1\left(x - \frac{5}{3}x^3\right)$$

$$P_3(x=1) \overset{!}{=} 1 \Rightarrow a_1\left(1 - \frac{5}{3}\right) = 1 \Rightarrow a_1 = -\frac{3}{2}$$

$$P_3(x) = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{3}x^3\right)$$

alternativ:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d}{dx^l}(x^2-1)^l \qquad \text{(Rodrigues-Formel)}$$

$P_l(x)$: Legendre Polynome Übungen

$P_l(x)$: Polynom vom Grad l
enthält entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen von x

$P_l(x)$ erfüllt Legendre Gl. für $m = 0$

niedrigste Legendre Polynome

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

Orthogonalität der $P_l(x)$ für $x \in [-1,1]$

d.h. zu zeigen: $\int_{-1}^{+1} dx\, P_l(x) P_{l'}(x) = N_l\, \delta_{ll'}$, $N_l = \frac{2}{2l+1}$

Vollständigkeit:

$\left\{ \sqrt{\frac{2l+1}{2}}\, P_l(x) \mid l = 0,1,2,\ldots \right\}$ sollen vollständige

Satz orthonormierte Fkt auf $[-1,1]$ bilden

beliebige Fkt $f(x)$ mit konvergenter Taylor-Entwicklung
auf $[-1,+1]$ durch $\{\ldots \mid \ldots\}$ approximierbar

$$\Rightarrow \quad f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(\cos\theta)$$

$$\text{mit} \quad a_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\, f(\theta)\, P_l(\cos\theta)$$

$$\text{weiter:} \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(x') = \delta(x-x')$$

insgesamt allgemeine zylindersymmetr. Lösung der Laplace Gl.

$$\nabla^2 \varphi(r,\theta) = 0$$

$$\varphi(r,\theta) = \frac{u(r)}{r} P(\cos\theta)$$

$P \to P_l(\cos\theta)$, Legendre Polynome

noch zu berechnen: Radialgl., $u(r)$ gleichung

$$\frac{r^2}{u}\partial_r^2 u = \lambda = l(l+1)$$

$$r^2 \partial_r^2 u = l(l+1)\, u$$

$u(r)$ l abhängig $\to u_l(r)$

$$u_l(r) = a_l\, r^{l+1} + \frac{b_l}{r^l}$$

$$\text{da:} \quad \partial_r^2 u_l(r) = \partial_r^2 \left(a_l r^{l+1} + \frac{b_l}{r^l}\right)$$

$$\vdots$$

$$= l(l+1)\frac{1}{r^2}\left[a_l r^{l+1} + b_l r^{-l}\right]$$

$$= l(l+1)\frac{1}{r^2} u_l(r) \qquad \square$$

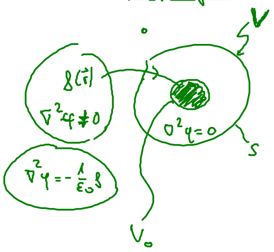
2 nod unabhängige Konstanten

insgesamt:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(r,\theta) &= \frac{u(r)}{r}\, P(\cos\theta) \\ \varphi(r,\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)\end{aligned}}$$

allgemeine zylindersymmetr. Lösung $(m=0)$ der Laplace Gleichg, mit noch offenen Koeffizienten a_l und b_l $(l = 0,1,2,\dots)$ bestimmt bis aus physikal. RB.

Folgerungen:



- Volumen V : $r \to \infty$

  a_l, b_l - Terme für $r \to \infty$

  $a_l r^l \to \infty$ für $r \to \infty$

  a_l, $l \geq 1$ $= 0$

  da Potential $\varphi(r \to \infty) = 0$ erfüllbar

- 1. Allg $\nabla^2\varphi = 0$ nur in Teilbereiche vom Raum, d.h. in $V \setminus V_0$

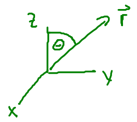
  Falls $\nabla^2\varphi = 0$ in $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $\varphi(r,\theta) = 0$

- $r \to 0$, $r \in V$ in dem $\nabla^2\varphi = 0$ gilt

  keine Ladungen vorhanden $\longrightarrow$ $b_l = 0$, $l = 0,1,2,\dots$

- $(\text{Terme} \sim b_l) \xrightarrow[r \to 0]{} \infty$ $\hat{=}$ "Punktladung bei $r=0$

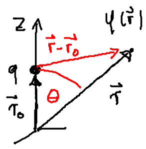
- $\theta = 0$ ($\vec r$ in z-Achse)

  $P_l(1) = 1$

  $$\Rightarrow \varphi(r,\theta=0) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l z^l + \frac{b_l}{z^{l+1}}\right)$$

Anwendungsbeispiel:



Punktladung bei $\vec r_0$: $\rho(\vec r) = q\cdot\delta(\vec r - \vec r_0)$

KO System so legen, dass z-Achse $\parallel$ $\vec r_0$

Abstand $|\vec r - \vec r_0|$

$$|\vec r - \vec r_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos\theta}$$

↑ Cosinus Satz bei Dreieck

Potential von Punktladung:

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec r - \vec r_0|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0\cos\theta}}$$

"zylindersymmetr." Potential $\varphi(\vec r) = \varphi(r,\theta,\cancel{\phi})$

Laplace Gl $\nabla^2\varphi = 0$ gültig in $\mathbb{R}^3 \setminus \vec r_0$
in $\vec r_0$ gilt Poisson Gl.

Aussparen von $\vec r_0$. Beschränkung auf $r > r_0$ bzw $r < r_0$
zwei Raumbereiche

$$V_1 = \{\vec r,\ r < r_0\}\ ;\quad V_2 = \{\vec r,\ r > r_0\}$$

$\nabla^2\varphi(\vec r) = 0$ für $\{V_1$

$$\nabla^2 \varphi(\vec r) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} V_1 \\ V_2 \end{cases}$$

für V_1 und V_2 gilt separat Entwicklung ⊛

Potential zunächst auf z-Achse berechnen.

$$|\vec r - \vec r_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos\theta} = \sqrt{r^2 - 2 r r_0 + r_0^2}$$

$$= \sqrt{(r - r_0)^2}$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} r_0 - r & \text{für} & r < r_0 \\ r - r_0 & \text{für} & r > r_0 \end{array} \right\} \text{ damit } \sqrt{\ldots} \text{ reell}$$

$$4\pi\varepsilon_0\, \varphi(r, \theta = 0) = \frac{q}{r_0 - r} = \frac{q}{r_0} \frac{1}{1 - \frac{r}{r_0}} \overset{\text{Taylor}}{=} \frac{q}{r_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r_0^l} \quad \text{für } r < r_0$$

$$4\pi\varepsilon_0\, \varphi(r, \theta = 0) = \frac{q}{r - r_0} = \frac{q}{r} \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} = \frac{q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_0^l}{r^l} \quad \text{für } r > r_0$$

vergleiche mit alter Entwicklung

$$\varphi(r, \theta = 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + b_l r^{-(l+1)} \right)$$

Koeffizientenvergleich ergibt a_l, b_l

$$a_l = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_0^{l+1}}, \quad b_l = 0 \quad \text{für } r < r_0$$

$$a_l = 0, \quad b_l = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} r_0^l \quad \text{für } r > r_0$$

$\curvearrowright$

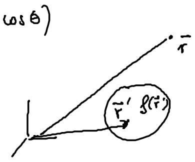
$$\varphi(r, \Theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec r - \vec r_0|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} P_l(\cos\theta) & \text{für } r < r_0 \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_0^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) & \text{für } r > r_0 \end{cases}$$

Definiere: $r_> = \max(r, r_0)$

$r_< = \min(r, r_0)$

$$\varphi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec r - \vec r_0|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$



$$\boxed{\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta)}$$

$\Theta = \sphericalangle(\vec r, \vec r\,')$

$r_> = \max(r, r')$

$r_< = \min(r, r')$

Multipl. mit r, einführen von $t = \frac{r'}{r}$, $t < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2t\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(\theta)\, t^l = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\theta)\, t^l \quad \text{für } t < 1$$

Entwicklungskoeffizienten sind Legendre Polynome

allgemeiner Fall (nicht mehr $m = 0$ annehmen)

$$\partial_r^2 u - \frac{\lambda}{r^2} u = 0 \qquad u = u(r)$$

$$\partial_x \left[(1 - x^2)\, \partial_x P \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P = 0 \qquad P = P(x)$$

$$Q_m(\phi) \sim e^{im\phi} \qquad m \in \mathbb{Z}$$

$Q_m(\phi) \sim e^{im\phi} \quad m \in \mathbb{Z}$

$m=0 \longrightarrow P_\ell$

$m \neq 0$:

erwendliche Punkte $\qquad$ Transf. $P \to T$

$$P(x) = (1-x^2)^{m/2}\, T(x)$$

$$\partial_x P(x) = \frac{m}{2}(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}(-2x)T(x) + (1-x^2)^{m/2}\partial_x T(x)$$

$$(1-x^2)\,\partial_x P(x) = \frac{m}{2}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}(-2x)T(x) + (1-x^2)^{\frac{m}{2}+1}\partial_x T(x)$$

noch einmal ableiten ..

mit $(1-x^2)^{-m/2}$ multiplizieren

$$(1-x^2)\,\partial_x^2 T(x) - 2(m+1)x\,\partial_x T(x) + [\lambda - m(m+1)]T(x) = 0$$

weiter ableiten:

$$(1-x^2)\,\partial_x^2 (\partial_x T(x)) - 2(m+2)x\,\partial_x(\partial_x T(x)) + [\lambda - (m+1)(m+2)](\partial_x T) = 0$$

Vergleich: $\quad \partial_x T_m = T_{m+1} \quad$ mit $T = T_m$

$$T_m(x) = \partial_x^m T_0(x)$$

$T_0(x)$ ist Lösung von Legendre Gleichung mit $m=0$

$$\to (1-x^2)\,\partial_x^2 T_0(x) - 2x\,\partial_x T_0(x) + \lambda T_0(x) = 0$$

Potenzreihenansatz

Konvergenzerzwingung

$$\lambda \overset{!}{=} \ell(\ell+1)$$

$$\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$T_0(x) = P_\ell(x)$$

$$P(x) = (1-x^2)^{m/2}\,\partial_x^m T_0(x)$$

$$P(x) = (1-x^2)^{m/2}\,\partial_x^m P_\ell(x)$$

Phasenfaktor einführen $(-1)^m$

erweiterte oder zugeordnete Legendre Polynome

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2}\,\partial_x^m P_\ell(x)$$

$m=0 \qquad P_\ell^0(x) = P_\ell(x)$

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{m/2}\,\partial_x^{\ell+m}(x^2-1)^\ell \qquad \text{(Rodriguez Formel)}$$

zugeordnete Legendre Polynome orthogonal

$$\int_{-1}^{+1} P_{\ell'}^m(x)\, P_\ell^m(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1}\,\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\,\delta_{\ell'\ell}$$

im phys Problem $\quad x = \cos\Theta$

Winkelabhängigkeit von Potential $\varphi(\vec{r})$ bzgl. Θ gegeben durch P_ℓ^m

Winkelabhängigkeit von Potential $\varphi(\vec{r})$ bzgl ϕ gegeben durch $Q_m = e^{im\phi}$

$$Y_{\ell m}(\Theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{m}\,\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\; P_\ell^m(\cos\Theta)\; e^{im\phi}$$

= Kugelfunktionen / Kugelflächenfunktionen

- kombiniert bei Winkelabhängigkeiten
- $Y_{\ell m}(\Theta,\phi)$ aus Dgl erhältlich

- $Y_{lm}(\theta,\phi)$ aus Dgl erhältlich

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\,\partial_\theta\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right]Y_{lm}(\theta,\phi) = -l(l+1)\,Y_{lm}(\theta,\phi)$$

"Eigenwertgl." für Y_{lm}

analog: Radialgl. / $u(r)$-Gleichg. betrachten:

analog zum Fall $m=0$ zwei unabh. Lösungen $\sim r^{-(l+1)}$, $\sim r^{+l}$

$\rightsquigarrow$ allgem. Lösung: $r^{-(l+1)}Y_{lm}$ bzw. $r^{+l}\,Y_{lm}$

Laplace Gleichg linear $\longrightarrow$ jede Linearkomb. von Lösungen wiederum Lösung

allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\boxed{\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left(a_{lm}r^l+\frac{b_{lm}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\phi)}$$

Konsequenzen:

1) Terme $\sim b_{lm}$ führen für $r\to 0$ auf Divergenzen
$r\in$ Volumen, in dem $\nabla^2\varphi=0$
$\Rightarrow\quad b_{lm}=0$

2) Falls Volumen bis $r\to\infty$ geht
Terme mit a_{lm} und $l\geq 1$ singulär für $r\to\infty$
aber $\varphi(\infty)=$ const $\longrightarrow$ $a_{lm}=0\quad\forall\ l\geq 1$

3) Eigenschaften der Kugelfunktionen:

$\underline{m=0}$: $P_l^0(x) = P_l(x)$ "alte" Legendre Funktionen

$$\Rightarrow\quad Y_{l0}(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,P_l(x)$$

$\underline{m=l}$:

$$P_l^l(x) = (-1)^l\,\frac{(2l)!}{2^l\,l!}\,(1-x^2)^{l/2}$$
$$= (-1)^l\,\frac{(2l)!}{2^l\,l!}\,\sin^l\theta$$

Symmetrie:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,P_l^m(x) \quad\longrightarrow\quad \text{H.A.}$$

für Kugelfunktionen:

$$Y^*_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m\,Y_{l\,-m}(\theta,\phi)$$

Orthonormierung:

$$\langle P_l^m\,|\,P_{l'}^m\rangle = \int_{-1}^{+1}dx\;P_l^m(x)\,P_{l'}^m(x)$$
$$= \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{l,l'}$$

für Kugelfunktionen:

$$\langle Y_{l'm'}\,|\,Y_{lm}\rangle = \int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{+1}d(\cos\theta)\;Y^*_{l'm'}(\theta,\phi)\,Y_{lm}(\theta,\phi)$$
$$\cong \delta_{ll'}\,\delta_{mm'}$$

Raumwinkel $\quad d\Omega = d\phi\;d(\cos\theta)$
$\quad\Omega = (\theta,\phi)$

$$\langle Y_{l'm'}\,|\,Y_{lm}\rangle = \int d\Omega\;Y^*_{l'm'}(\Omega)\,Y_{lm}(\Omega) = \delta_{ll'}\,\delta_{mm'}$$

Vollständigkeit: jede in $0\leq\theta\leq\pi$ und $0\leq\phi\leq 2\pi$

integrable Funktion $f(\theta,\phi)$ läßt sich nach Kugelfunktionen entwickeln:

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} c_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (*)$$

multipliziere mit $Y^*_{l'm'}$ + Winkelintegration + Orthonormierung

$$c_{lm} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\; f(\theta,\phi)\, Y^*_{lm}(\theta,\phi)$$

f vorgeben $\rightarrow$ c_{lm} berechenbar

c_{lm} in $(*)$ einsetzen:

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} Y^*_{lm}(\theta',\phi')\, Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta(\cos\theta-\cos\theta')\,\delta(\phi-\phi')$$

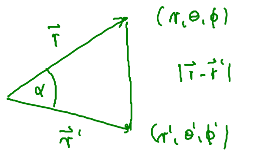
$Y_{lm}(\theta,\phi)$ bilden VONS

Additionstheorem:

$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ nach Kugelfunktionen entwickeln

$\vec{r} = (r,\theta,\phi)$

$\vec{r}' = (r',\theta',\phi')$



$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\vec{r}' &= r r' \cos\alpha \\ &= x x' + y y' + z z' \\ &= r r' \left(\sin\theta \sin\theta' \cos(\phi'-\phi) + \cos\theta\cos\theta'\right)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}'}}$$

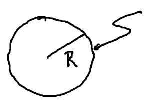
abhängig von $r,\theta,\phi,r',\theta',\phi'$ und α

Übungsaufgabe:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2l+1}\,\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\, Y^*_{lm}(\theta',\phi')\, Y_{lm}(\theta,\phi)$$

3.10 Lösung der Laplace Gl. an Beispielen

Bsp: Potential im Innern von Kugel



$\varphi_0(\theta)$ vorgeben bei R

im Innern hohl

$$\varphi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\phi)$$

keine ϕ Abhängigkeit in Problemstellung $\rightarrow$ nur $m=0$ relevant

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

alle b_l Terme gleich Null $\quad b_l = 0 \;\forall l$, da sonst Divergenz von $\varphi(r,\theta)$ bei $r=0$.

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos\theta)$$

bei $r=R$ muß $\varphi(r,\theta)$ Randbedingung $\varphi_0(\theta)$ erfüllen

$$\varphi(r=R,\theta) \stackrel{!}{=} \varphi_0(\theta)$$

$$\curvearrowright \sum_{l=0}^{\infty} a_l R^l P_l(\cos\theta) \stackrel{!}{=} \varphi_0(\theta) \qquad (*)$$

Lösen dieser Gleichung für a_l

benutze Orthogonalität der $P_l(\cos\theta)$

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x)\, P_{l'}(x)\, dx \underset{x=\cos\theta}{=} \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{für } l' \neq l \\ \frac{2}{2l+1} & \text{für } l' = l \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} (*) \cdot P_{l'}(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta$$

lhs: $$\sum_{l=0}^{\infty} a_l R^l \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta = a_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l'+1}$$

rhs: $$\int_0^{\pi} \varphi_0(\theta)\, P_{l'}(\theta)\, \sin\theta\, d\theta$$

lhs = rhs, auflösen nach $a_{l'}$ und dann $l' \to l$

$$a_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^{\pi} \varphi_0(\theta)\, P_l(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta$$

$\varphi_0(\theta)$ bekannt $\longrightarrow$ a_l berechenbar $\longrightarrow$ in Ansatz für φ einsetzen $\longrightarrow$ Lösung.

einfaches Beispiel:

$$\varphi_0(\theta) = k \sin^2\frac{\theta}{2}, \quad k = \text{const.}$$

$$= \frac{k}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$= \frac{k}{2}\left(P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta)\right)$$

$$a_l = \frac{2l+1}{2R^l}\, \frac{k}{2} \underbrace{\int_0^{\pi} \left(P_0(\cos\theta) P_l(\cos\theta) - P_1(\cos\theta) P_l(\cos\theta)\right) \sin\theta\, d\theta}_{\text{Orthogonalität der } P_l \text{ beachten!}}$$

$$\Longrightarrow \quad a_0 = \frac{k}{2}$$

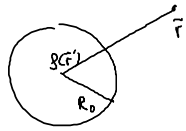
$$a_1 = -\frac{k}{2R}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(r,\theta) = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right)$$

andere Anwendung: Multipolentwicklung

stat. lokalisierte Ladungsverteilung

$$\rho(\vec r) = \rho(r,\theta,\phi) = \begin{cases} \text{beliebig} & \text{in } r \leq R_0 \\ 0 & \text{für } r \geq R_0 \end{cases}$$



$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r'\, \rho(\vec r') \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta',\phi')\, Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$\rho(\vec r) = 0$ für $r \geq R_0$

Beiträge zu Integral nur für $r' \leq R_0$

Potential zu bestimmen bei $r > R_0$

$$r_> = r, \quad r_< = r'$$

sphärische Multipolmomente:

$$q_{lm} := \int d^3r' \, \rho(\vec{r}') \, r'^{\,l} \, Y^*_{lm}(\theta', \phi')$$

Potential:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

φ für $r > R_0$, wo $\nabla^2 \varphi = 0$ gilt, formal gelöst.