Montag, 28. November 2011
10:25

3.11. Elektrostatik der Dielektrika

bisher ES im Vakuum

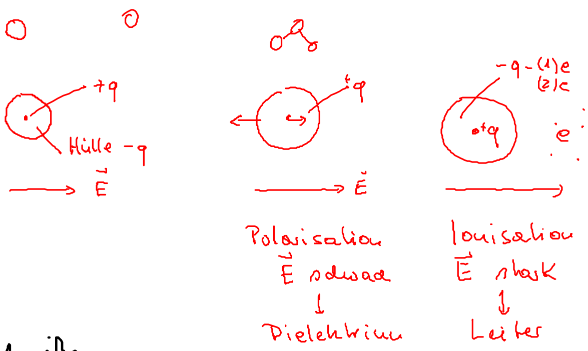
$$\operatorname{div}\vec E = -\rho/\varepsilon_0 \quad \& \quad \operatorname{rot}\vec E = 0$$

hier: Feldgleichung der Elektrostatik von Materie

Materie: geladene Teilchen bzw ungeladene Teilchen-Konglomerate mit Dipolmomenten (z.B. H_2-Molekül)

Phänomenologischer Ansatz für Dielektrika gültig

Dielektrikum: kein frei beweglichen Ladungsträger vorhanden



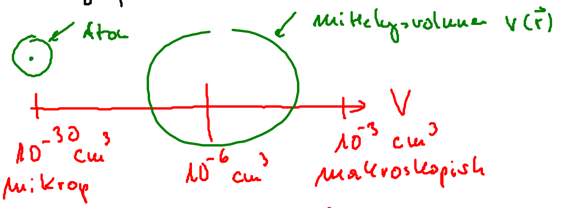
a) Makroskopische Feldgröße

Maxwell-Gl. im Vakuum gelten universell

$\vec e$: mikroskop. elektr. Feld

$$\operatorname{div}\vec e = \rho_{mikro}/\varepsilon_0$$
$$\operatorname{rot}\vec e = 0$$

b) gemittelte Größen relevant, nicht mikroskop. Details



~ etwa 10^{17} Teilchen

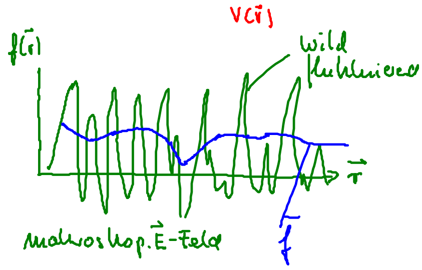
$f(\vec r,t)$ mikroskop. Feldgröße

$v(\vec r)$ mikroskop. großes, makroskop. kleines } Kugelvolumen mit Mittelpunkt bei $\vec r$

$$\overline{f(\vec r,t)} = \frac{1}{v(\vec r)}\int_{v(\vec r)} d^3r'\, f(\vec r\,',t) = \frac{1}{v(\vec r)}\int_{v(\vec r)} d^3r'\, f(\vec r\,'+\vec r,t)$$

wesentlicher Punkt

$$\nabla \bar f \overset{!}{=} \overline{\nabla f}$$



$\Rightarrow \quad \vec E(\vec r) = \overline{\vec e(\vec r)}$, $\vec E$ makroskop. $\vec E$-Feld

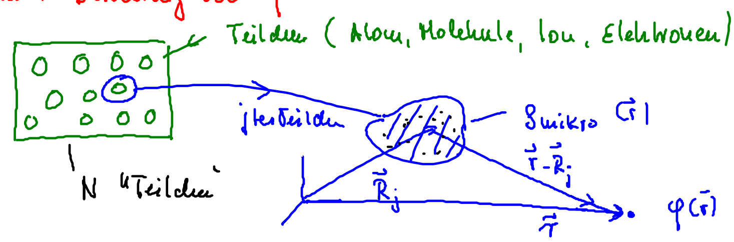
$$\text{rot}\,\overline{\vec e} = \overline{\text{rot}\,\vec e}$$
$$\text{div}\,\overline{\vec e} = \overline{\text{div}\,\vec e}$$

$$\text{div}\,\vec E = \frac{\overline{\rho_{\text{mikro}}}}{\varepsilon_0}$$

$$\text{rot}\,\vec E = 0$$

$$\vec e = -\nabla\varphi$$
$$\overline{\vec e} = -\overline{\nabla\varphi} = -\nabla\overline{\varphi}$$
$$\vec E = -\nabla\overline{\varphi}$$

es bleibt Berechnung von $\overline{\varphi}$



Potential von j-ten Teilchen : φ_j
aufgebaut aus Punktladungen $q_n^{(j)}$
+
mögliche Überschussladungen (freie Ladungen) im Raumbereich von j

$$q_j = \sum_n q_n^{(j)} \qquad \text{Gesamtladung bei } j$$

$$\rho_j = \sum_n q_n^{(j)}\,\delta(\vec r - \vec r_n) \ : \ \text{Ladungsdichte bei } j$$

$$\vec p_j = \int d^3r\,\vec r\,\rho_j(\vec r) \ : \ \text{Dipolmoment bei } j$$

Abstände innerhalb j von atomarer Größenordnung (10^{-10} m)
→ Multipol-Entwicklung + nach Dipolterm abbrechen

$$4\pi\varepsilon_0\,\varphi_j(\vec r) = \frac{q_j}{|\vec r - \vec R_j|} + \frac{\vec p_j\,(\vec r - \vec R_j)}{|\vec r - \vec R_j|^3} + \dots$$

effektive Ladungsdichte
$$\rho_e(\vec r) = \sum_{j=1}^{N} q_j\,\delta(\vec r - \vec R_j)$$

effektive Dipoldichte
$$\vec\Pi_e(\vec r) = \sum_{j=1}^{N} \vec p_j\,\delta(\vec r - \vec R_j)$$

effektive Dichten

gesamtes Potential:
$$4\pi\varepsilon_0\,\varphi(\vec r) = \int d^3r' \left[\frac{\rho_e(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|} + \vec\Pi_e(\vec r\,')\cdot\frac{(\vec r - \vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|^3}\right] + \dots$$

Mittelung über mikroskop. große / makroskop. kleine Volumina ausführen:

$$4\pi\varepsilon_0 \overline{\varphi(\vec r)} = \frac{1}{V}\int_V d^3x \int d^3r' \left[\frac{\varrho_e(\vec r')}{|\vec r+\vec x-\vec r'|} + \vec\pi_e(\vec r')\frac{(\vec r+\vec x-\vec r')}{|\vec r+\vec x-\vec r'|} \right]$$

Mittelung

$\vec r'' + \vec x = \vec r'$

$$= \frac{1}{V}\int d^3x \int d^3r'' \left[\frac{\varrho_e(\vec r''+\vec x)}{|\vec r-\vec r''|} + \vec\pi_e(\vec r''+\vec x)\frac{\vec r-\vec r''}{|\vec r-\vec r''|^3} \right]$$

$$= \frac{1}{V}\int d^3r'' \left[\frac{\overline{\varrho_e(\vec r''+\vec x)}}{|\vec r-\vec r''|} + \overline{\vec\pi_e(\vec r''+\vec x)}\frac{\vec r-\vec r''}{|\vec r-\vec r''|^3} \right]$$

$\overline{\varrho_e} = \varrho(\vec r)$ = makroskop. Ladungsdichte

$$= \frac{1}{V}\sum_{j\in V} q_j$$

$\varrho(\vec r)$ nur Beiträge von freien Ladungen, falls vorhanden

$\overline{\vec\pi_e} = \vec P(\vec r)$ = makroskop. Polarisation

$$= \frac{1}{V}\sum_{j\in V} \vec p_j$$

$\vec P(\vec r)$ muß im Prinzip mikroskop. modelliert werden

$$4\pi\varepsilon_0 \overline{\varphi(\vec r)} = \int d^3r' \left[\frac{\varrho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|} + \vec P(\vec r')\cdot\nabla_{r'}\frac{1}{|r-r'|} \right]$$

$$4\pi\varepsilon_0 \,\mathrm{div}\,\vec E = 4\pi\varepsilon_0 \nabla^2\overline{\varphi} =$$

$$= -\int d^3r' \left[\varrho(\vec r')\underbrace{\nabla_r^2\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}} + \vec P(\vec r')\underbrace{\nabla_r^2\nabla_{r'}\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}} \right]$$

$$= 4\pi\varrho(\vec r) + 4\pi\underbrace{\int d^3r'\,\vec P(\vec r')\,\nabla_r\,\delta(\vec r-\vec r')}_{=\nabla\cdot\vec P(\vec r)}$$

$$= \nabla_{r'}\nabla_r^2\frac{1}{|\vec r-\vec r'|} = 4\pi\,\nabla_{r'}\delta(\vec r-\vec r') = -4\pi\,\nabla_r\,\delta(\vec r-\vec r')$$

$$\to\quad \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec E = \varrho(\vec r) + \mathrm{div}\,\vec P(\vec r)$$

$$\mathrm{div}\left(\varepsilon_0\vec E + \vec P\right) = \varrho(\vec r)$$

$$\vec D := \underbrace{\varepsilon_0\vec E}_{\text{makr. }\vec E\text{-Feld}} + \underbrace{\vec P}_{\text{Polarisation}} = \text{dielektrische Verschiebung}$$

Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik in Dielektrika

$$\mathrm{div}\,\vec D(\vec r) = \varrho(\vec r)$$
$$\mathrm{rot}\,\vec E(\vec r) = 0$$

Polarisationsladungsdichte

$$\mathrm{div}\,\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\varrho(\vec r) + \varrho_P(\vec r)\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\rho(\vec r) - \operatorname{div}\vec P\right]$$

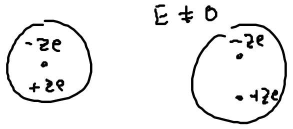
Polarisation wirkt wie inneres Zusatzfeld $\vec E_p$ im Dielektrikum.

Dielektrika: 3 Klassen

eigentl. Dielektrikum

Deformationspolarisation

$E = 0$ $\qquad$ $E \neq 0$



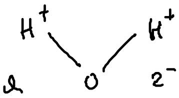
$\Downarrow$

$\vec P \neq 0$

Paraelektrikum

permanente Dipole vorhanden

z.B. H_2O, NH_3



regellos statistisch verteilt $\vec P(\vec E = 0) = 0$

$\vec P(\vec E \neq 0) \neq 0$

Orientierungspolarisation

+ Ferroelektrika

nur Di- & Paraelektrika betrachtet:

$$\vec P = \vec P(\vec E)$$

$$\vec P(\vec E = 0) = 0$$

Potenzreihe nach $\vec E$

$$P_i = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{ij} E_j + \sum_{j,k=1}^{3} \beta_{ijk} E_j E_k + \dots$$

nichtlinear

Materialparameter

exp. Erfahrung: 1. Allg. linearer Term dominant

$$P_i \simeq \sum_{j=1}^{3} \gamma_{ij} E_j$$ anisotrop für beliebige γ_{ij}

exp. Erfahrung: 1. Allg. isotropes Verhalten

$$P_i = \sum_{j=1}^{3} \begin{pmatrix} \gamma & & 0 \\ & \gamma & \\ 0 & & \gamma \end{pmatrix}_{ij} E_j$$ falls isotrop

$\Rightarrow$ isotrope Dielektrika:

$$\vec P = \gamma \vec E$$

$$\vec P \parallel \vec E$$

$$\vec P = \chi_e \varepsilon_0 \vec E$$

χ_e: dielektr. Suszeptibilität

$$\vec D = \varepsilon_0 \vec E + \vec P = \varepsilon_0 \vec E + \chi_e \varepsilon_0 \vec E$$

$$= \varepsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_e)}_{= \varepsilon_r} \vec E$$

$= \varepsilon_r$ relative Dielektrizitätskonstante

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

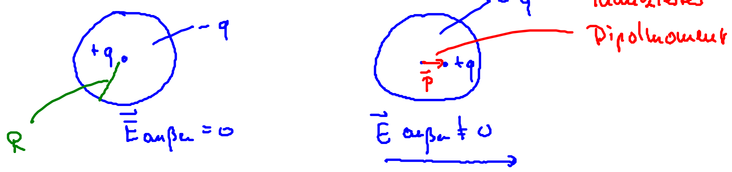
nicht polarisierbares Material: $\chi_e = 0 \Rightarrow \varepsilon_r = 1$

Modelle zur Interpretation vom Effekt von äußerem Feld bei Dielektrika

1) Deformationspolarisation

neutrales Atom $(\vec{E}_{außen} = 0) \Rightarrow$ Dipolmoment Null

$\vec{E}_{außen} \neq 0 \Rightarrow$



Kern gegenüber Ladungswolke verschoben um Strecke d

Gleichgewicht zwischen

Verschiebung von Kern nach rechts

Verschiebung der Elektronenwolke nach links

äußeren Feld E $\hat{=}$ inneren Feld E_e hervorgerufen von Elektronenwolke

$$E_e = E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qd}{R^3}$$

Radius der Elektronenwolke

$$\Rightarrow \quad p = q \cdot d = \underbrace{(4\pi\varepsilon_0 R^3)}_{\alpha \,=\, \text{molekulare Polarisierbarkeit}} E$$

Dipolmoment von 1 Atom im E-Feld

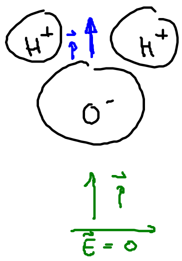
$$\alpha = 4\pi\varepsilon_0 R^3 = 3\varepsilon_0 \left(\frac{4\pi}{3} R^3\right) = 3\varepsilon_0 v$$

Atomvolumen

2) Orientierungspolarisation

Moleküle haben schon für $\vec{E}_{außen} = 0$ permanentes Dipolmoment

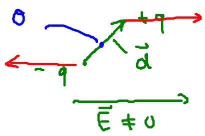
z.B. H_2O



$\vec{F}_+ = q\vec{E}$ auf $+q$

$\vec{F}_- = -q\vec{E}$ auf $-q$

Drehmoment



$$\vec{M} = (\vec{r}_+ \times \vec{F}_+) + (\vec{r}_- \times \vec{F}_-)$$

$$= \left(\frac{\vec{d}}{2} \times q\vec{E}\right) + \left(-\frac{\vec{d}}{2} \times (-q\vec{E})\right)$$

$$= q\vec{d} \times \vec{E}$$

$\vec{E}$ = const $\Rightarrow$ Drehmoment $M = \vec{p} \times \vec{E}$ $\quad (\vec{p} = q\vec{d})$

polares Molekül dreht sich bis $p \uparrow\uparrow \vec{E} \rightarrow \vec{M} = 0$

$\rightarrow$ „Orientierungspolarisation"

$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q(\vec{E}_+ + \vec{E}_-)$

$$= q \cdot \Delta\vec{E}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{E} = (\vec{d}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{E}$$

erneut hell: in beiden Fällen zeigen Dipole alle in Feld Richtung (vom äußeren Feld)

→ Polarisation von Dielektrikum durch $\vec{E}_{außen}$

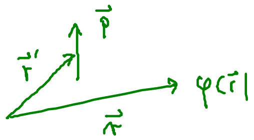
$\vec{P}$ = Dipolmoment pro Einheitsvolumen
= Polarisation

viele mikroskop. kleine Dipole (Vielteilchensystem)

welches Feld wird von den Dipolen erzeugt, d.h.
welches Feld entsteht aufgrund der Polarisation ?

Potential von 1 Dipol

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$



in Volumenelement d^3r' Dipolmoment

$$\vec{p} = \vec{P}\,d^3r'$$

Gesamtpotential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,d^3r'$$

$$\nabla'\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \vec{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)d^3r'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)d^3r' - \int_V \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\nabla'\cdot\vec{P}\;d^3r'\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{S}}_{\text{.. Potential einer Flächenladung}} - \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r'}_{\text{.. Potential einer Volumenladung}}$$

$\sigma_b = \vec{P}\cdot\vec{n}$ $\qquad$ $\rho_b = -\nabla\cdot\vec{P}$

$\vec{n}$ Normal auf S

$$\varphi(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_b}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dS}_{\text{Potential von Flächenladungsdichten}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_b}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r'}_{\text{Potential von Volumenladungsdichten}}$$

gesamte Ladungsdichte:

- Polarisationsladungen ρ_b
- u.U. "freie" Ladungen ρ_f (keine Folge von Polarisation) $\searrow$ Elektronen, Ionen

$$\rho = \rho_b + \rho_f$$

$$\varepsilon_0 \cdot \nabla \cdot \vec{E} = \rho = \rho_b + \rho_f$$
$$= -\nabla \cdot \vec{P} + \rho_f$$

$\vec{E}$: Gesamtfeld / nicht nur durch Polarisation erzeugt Anteil

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) = \rho_f$$

$$\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Relation $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$ notwendig

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \, , \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f = \int d^3r \, \rho_f(\vec{r})$$

gesamte freie Ladungen

Unterschied $\vec{E}$ und $\vec{D}$

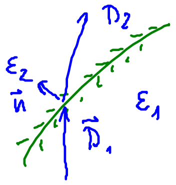
$$\nabla \times \vec{D} = \varepsilon_0 (\nabla \times \vec{E}) + \nabla \times \vec{P} = \nabla \times \vec{P}$$

i. Allg. ist $\nabla \times \vec{P} \neq 0$

$\Rightarrow$ i. Allg. $\vec{D}$ nicht als Gradient von Skalarfeld schreibbar

$\Rightarrow$ $\nexists$ i. Allg. kein Potential zu $\vec{D}$

Randbedingungen der $\vec{E}$ & $\vec{D}$ Felder: wenn $\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$
$= \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$



Grenzfläche

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_f$$

$$\vec{n} \cdot \left[\vec{D}_2 - \vec{D}_1 \right] = \sigma_f$$

freie Oberflächenladungen an Grenzfläche

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$(\vec{t} \times \vec{n}) (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

wie im Vakuum

Ungeladene Grenzfläche

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow E_{1n} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{2n}$$ (normal zu Grenzfläche)

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow D_{1t} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_{2t}$$ (tangential zu Grenzfläche)

elektrostatische Energie

elektrostatische Energie

Ladung $\delta\varrho(\vec r)\,d^3r$ hat im Potential $\varphi(\vec r)$, das von anderen Ladungen erzeugt wird, die Energie

$$\varphi(\vec r)\,\varrho(\vec r)\,d^3r$$

Arbeit, die notwendig ist um Ladungsdichte von ϱ auf $\varrho + \delta\varrho$ zu erhöhen:

Potential von $\varrho(\vec r)$ erzeugt

$$\delta W = \int d^3r\; \varphi(\vec r)\cdot\delta\varrho(\vec r)$$

$$\varphi(\vec r)\cdot\delta\varrho(\vec r) = \varphi(\vec r)\cdot \operatorname{div}(\delta\vec D)$$

$$= \operatorname{div}\left[\varphi(\vec r)\,\delta\vec D(\vec r)\right] - (\nabla\varphi)\,\delta\vec D$$

$$\delta W = \underbrace{\int d^3r\; \operatorname{div}(\varphi\,\delta\vec D)}_{\text{Gaußscher Satz}} + \int d^3r\; \vec E\cdot\delta\vec D$$

$$\oint_{S(V)} \varphi\,\delta\vec D\, d\vec S \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

$$\curvearrowright\quad W = \int d^3r \int_0^D \vec E\cdot\delta\vec D \qquad (\text{allgemein})$$

linearen isotropes Dielektrikum: $\vec D = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec E$

$$\vec E\cdot\delta\vec D = \varepsilon_0\varepsilon\,\vec E\,\delta\vec E$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon\,\delta\left(\vec E^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\delta\left(\vec E\cdot\vec D\right)$$

$$\curvearrowright\quad W = \frac{1}{2}\int d^3r\; \vec E\cdot\vec D$$