4. Magnetostatik

aus Kap. 2. stationär $\partial_t \vec B = 0 = \partial_t \vec E = 0 = \partial_t \vec j = \partial_t \varrho$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} \vec B &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec B &= \mu_0 \vec j \end{aligned}}$$

(keine magnet. Ladungen)

(Magnetfeld ist Wirbelfeld)

$\vec j = \vec j(\vec r)$ stationär

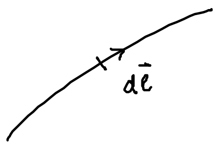
$$\partial_t \varrho + \operatorname{div} \vec j = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t \varrho = 0$$

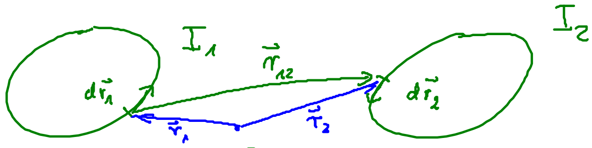
$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec j(\vec r) = 0} \quad \leftarrow$$

Stromfaden-Approximation (Analogon zu Punktladung in ES)

$$\vec j \cdot d^3r \rightarrow I\, d\vec l$$



Ampèresches Gesetz (Analogon zu Coulomb Gesetz in ES)



$$\vec F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec r_1 \times (d\vec r_2 \times \vec r_{12})}{r_{12}^3} \qquad \vec r_{12} = \vec r_2 - \vec r_1$$

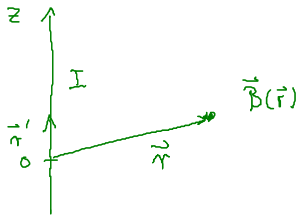
$$\vec F_{12} = -\vec F_{21}$$

$$\vec B_2(\vec r_1) = \mu_0 \frac{I_2}{4\pi} \oint_{L_2} \frac{d\vec r_2 \times \vec r_{12}}{r_{12}^3}$$

$$\vec F_{12} = I_1 \oint_{L_1} d\vec r_1 \times \vec B_2(\vec r_1)$$

gerade Stromfaden

$$\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec r \times (\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3}$$



Verallgemeinerung:

$$\vec B(\vec r) = \frac{\mu}{4\pi} \int d^3r' \, \vec j(\vec r') \times \frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3} \qquad \text{(Biot-Savart Gesetz)}$$

$$\vec F(\vec r) = \int d^3r' \, \vec j(\vec r') \times \vec B(\vec r)$$

$$\vec M = \int d^3r' \, \vec r' \times \vec j(\vec r') \times \vec B(\vec r')$$

Drehmoment auf $\vec j(\vec r)$ von $\vec B$ erzeugt

4.1. Vektorpotential eines Magnetfeldes

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ (\text{Vektorfeld}) = 0$ allgemein

Vektorpotential

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\vec{A} = \mu_0\,\vec{j}(\vec{r})$$

$\vec{A}'$ nicht eindeutig → Eichtransformation

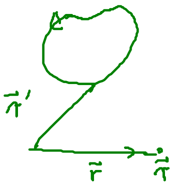
$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}'(\vec{r}) + \vec{\nabla}\,\Psi(\vec{r})$$

$\Rightarrow\ \mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{A}' \ \rightarrow\ \vec{B}$ ungeändert

Coulomb-Eichung: $\mathrm{div}\,\vec{A} \overset{!}{=} 0$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{A}}_{\mathrm{div}\,\vec{A} \overset{!}{=} 0} - \nabla^2\vec{A}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\vec{A} &= -\mu_0\,\vec{j}(\vec{r})\\ \nabla\cdot\vec{A} &= 0\end{aligned}}$$ ← Vektor Poisson Gleichung



Stromverteilung lokalisiert →

$\vec{B}(\vec{r}) \rightarrow 0$ für $|\vec{r}| = r \rightarrow \infty$

$\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$

Lösung von $\vec{A}$-Gleichung

$$\nabla^2 A_i = -\mu_0\,j_i(\vec{r})$$

vgl. mit ES $\quad \nabla^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\varrho(\vec{r}) \ \longrightarrow\ \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$\varphi(\vec{r}) \Leftrightarrow A_i(\vec{r})$$

$$\frac{\varrho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \mu_0\,j_i(\vec{r})$$

insgesamt: $\quad A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{j_i(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad i = 1,2,3$

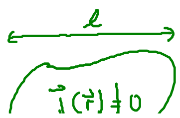
als Vektorgleichung:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

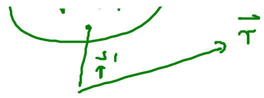
4.2. Magnetischer Dipol / Magnetisches Moment

lokalisierte Stromverteilung (endl. Raumbereich!)

$$\vec{j}(\vec{r}) = \begin{cases}\text{beliebig} & r < R_0\\ 0 & r > R_0\end{cases}$$



$\vec{j}(\vec{r}')$ erzeugt magnet. Feld $\vec{B}(\vec{r})$



Abstand: Stromverteilung zu Aufpunkt, wo $\vec{B}(\vec{r})$ gemessen wird groß gegenüber ℓ

Multipol-Entwicklung für $\vec{A}$ bzw $\vec{B}$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3} + \dots \qquad \text{für } r'<r$$

$$\curvearrowright \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r}\int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}')}_{\text{Monopolterm}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\int d^3r' \, \vec{r}' \, \vec{j}(\vec{r}')}_{\text{Dipolterm}} + \text{h.o.t.}$$

wesentliche mathem. Identität:

$f(\vec{r})$ und $g(\vec{r})$ stetig differenzierbare Skalarfelder

$\vec{j}(\vec{r})$ stationäre Stromdichteverteilung

$$C = \int_V d^3r \, \left[f(\vec{r})\,\vec{j}(\vec{r})\cdot\nabla g(\vec{r}) + g(\vec{r})\,\vec{j}(\vec{r})\cdot\nabla f(\vec{r}) \right] = 0$$

Nachweis:

$$\operatorname{div}(g f \vec{j}) = g f \underbrace{\operatorname{div}\vec{j}}_{=0} + \vec{j}\cdot\operatorname{grad}(gf)$$

$$= \vec{j}\cdot\operatorname{grad}(fg)$$

$$= \vec{j}\cdot f\,\operatorname{grad} g + \vec{j}\,g\,\operatorname{grad} f$$

$$= f(\vec{j}\cdot\nabla g) + g(\vec{j}\cdot\nabla f)$$

$$\curvearrowright \quad C = \int_V d^3r \, \operatorname{div}\left(g(\vec{r})\,f(\vec{r})\,\vec{j}(\vec{r})\right)$$

$$= \oint_{S(V)} d\vec{S}\cdot g(\vec{r})\,f(\vec{r})\,\vec{j}(\vec{r})$$

$$= 0 \qquad \text{für } S(V)\to\infty$$

da $\vec{j}(\vec{r})$ auf endl. Raumbereich konzentriert. ☑

Spezialfälle:

1) $f=1 \quad \Rightarrow \quad \nabla f = 0$

$g(\vec{r}) = x$ oder y oder $z \quad \Rightarrow \quad \nabla g = \vec{e}_i \qquad i = x, y,$ oder z

$\vec{r} = (x, y, z)$

$$C = \int d^3r \, \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{e}_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int d^3r\, \vec{j}(\vec{r}) = 0$$

Konsequenz: erste Term in Multipolentwicklung von $\vec{A}(\vec{r})$

$$\frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r'\, \vec{j}(\vec{r}\,') \equiv 0$$

$\Rightarrow$ kein Monopolterm $\Rightarrow$ keine Magnet. Ladung

2) $f = x_i \Rightarrow \nabla f = \vec{e}_i$ $\qquad$ $i,j = x, y$ oder z

$g = x_j \Rightarrow \nabla g = \vec{e}_j$

$$\Rightarrow C = \int d^3r \left[x_i \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{e}_j + x_j \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{e}_i \right]$$

$$= \int d^3r \left[x_i j_j(\vec{r}) + x_j j_i(\vec{r}) \right] \equiv 0$$

$$\Rightarrow \int d^3r\, x_i j_j(\vec{r}) = -\int d^3r\, x_j j_i(\vec{r}) \qquad (**)$$

beliebiger Vektor $\vec{a}$ $\qquad$ i-te Komp. von Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}\,')$

$$\vec{a} \int d^3r'\, \vec{r}\,' j_i(\vec{r}\,')$$

$$= \sum_j a_j \int d^3r'\, x_j' j_i(\vec{r}\,') \qquad (*)$$

betrachte $\int d^3r'\, x_j' j_i(\vec{r}\,')$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r'\, x_j' j_i(\vec{r}\,') + \frac{1}{2} \int d^3r'\, x_j' j_i(\vec{r}\,')$$

$$\overset{(**)}{=} \frac{1}{2} \int d^3r'\, x_j' j_i(\vec{r}\,') - \frac{1}{2} \int d^3r'\, x_i' j_j(\vec{r}\,')$$

$$= -\frac{1}{2} \int d^3r' \left(x_i' j_j(\vec{r}\,') - x_j' j_i(\vec{r}\,') \right)$$

in $(*)$

$$\vec{a} \int d^3r'\, \vec{r}\,' j_i(\vec{r})$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_j a_j \int d^3r' \left(x_i' j_j(\vec{r}\,') - x_j' j_i(\vec{r}\,') \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\, a_j \int d^3r' \left(\vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,') \right)_k$$

insgesamt:

$$\int d^3r' \left(\vec{a}\cdot\vec{r}\,' \right) \vec{j}(\vec{r}\,') = -\frac{1}{2}\, \vec{a} \times \int \left[\vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,') \right] d^3r'$$

Konsequenz für 2. Term in Multipolentwicklung

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \int d^3r'\, \vec{r}\,' \cdot \vec{j}(\vec{r}\,') = \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{\vec{r}}{r^3} \times \underbrace{\int d^3r'\, \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')}$$

mit Identifikation: $\frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{a}$, hängt nicht von $\vec{r}\,'$ ab!

magnet. Moment einführen:

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V d^3r\; \vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})}$$

grundlegend für Magnetostatik!

Bem: $\vec{m}$ als globale Eigenschaft von $\vec{j}(\vec{r})$, $\vec{m}$ nicht $\vec{r}$ abhängig

führende Ordnung der Multipolentwicklung

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} + \dots$$

entspricht Dipolterm!

Berechnung von zugehörigem Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ in Dipolapproximation:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

$\mathrm{rot}\,\vec{a}\psi = \psi\,\mathrm{rot}\,\vec{a} - a\times\nabla\psi$

$\vec{m}\times\vec{r} = \vec{a}$, $\psi = 1/r^3$

$\nabla\frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^5}\vec{r}$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r^3}\,\mathrm{rot}(\vec{m}\times\vec{r}) - (\vec{m}\times\vec{r})\times\nabla\frac{1}{r^3}\right]$$

$\mathrm{rot}\,\vec{a}\times\vec{b}$
$= (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}$
$+ \vec{a}\,\nabla\cdot\vec{b} - \vec{b}\,\nabla\cdot\vec{a}$

$\mathrm{div}\,\vec{r} = 3$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r^3}\Big[\underbrace{\cancel{(\vec{r}\cdot\nabla)\vec{m}}}_{=0} - (\vec{m}\cdot\nabla)\vec{r} + \vec{m}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{r}}_{=3} - \vec{r}\,\underbrace{\cancel{\mathrm{div}\,\vec{m}}}_{=0}\Big] + \frac{3}{r^5}(\vec{m}\times\vec{r})\times\vec{r}\right]$$

$(\vec{m}\times\vec{r})\times\vec{r}$
$= -\vec{r}\times(\vec{m}\times\vec{r})$
$= -\left(r^2\vec{m} - (\vec{r}\cdot\vec{m})\vec{r}\right)$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{1}{r^3}\underbrace{(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{r}} + \frac{3}{r^3}\vec{m} - \frac{3m\,r^2}{r^5} + \frac{3}{r^5}(\vec{r}\cdot\vec{m})\vec{r}\right] \;!$$

$m_i\partial_i x_j = m_i\delta_{ij} = m_j \rightarrow (\vec{m}\cdot\nabla)\vec{r} = \vec{m}$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^5}(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}\right]$$

Insgesamt:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{m})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right] + \text{h.o.t.}}$$

gleiche funktionale Form wie Dipolfeld in ES

Ersetzungsschema:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r'\,\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,') \longleftrightarrow \vec{p} = \int d^3r'\,\vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')$$

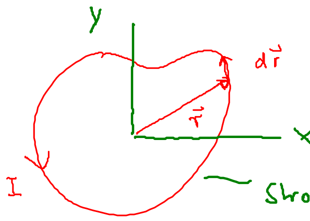
$$\vec{B} \longleftrightarrow \vec{E}$$

$$\mu_0 \longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_0}$$

Konsequenz: Dipolapproximation von ES Feld mit $\rho(\vec{r})$ und Gesamtladung Null <u>formal</u> äquivalent zu MS Feld.

gilt zunächst nur in erster Näherung → große Abstände vom Dipol bzw. magnet. Moment → "Fernfeld".

Bsp: geschlossene ebene Leiterschleife / magnet. Moment $\vec m$



geschlossen
eben (!)
durchflossen von Strom I

magnet. Moment: $\vec m = \frac{1}{2}\int d^3r \; \vec r \times \vec j(\vec r)$

Stromfaden: $d^3r \; \vec j(\vec r) \longleftrightarrow I \, d\vec r$

$$\curvearrowright \quad \vec m = \frac{1}{2} I \oint_L \vec r \times d\vec r$$

Stokes'scher Satz

$$\oint_L d\vec r \times \vec F(\vec r) = \int_S (d\vec S \times \vec\nabla) \times \vec F(\vec r)$$

$$\vec F(\vec r) = \vec r$$

$$\begin{aligned}
\left[(d\vec S \times \vec\nabla) \times \vec r\,\right]_i &= \varepsilon_{ijk} (d\vec S \times \vec\nabla)_j \, x_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{jlm} \, dS_l \, \partial_m x_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{jlm} \, dS_l \, \delta_{mk} \\
&= \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{jlk} \, dS_l \\
&= -\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ljk} \, dS_l \\
&= -2\, \delta_{il} \, dS_l \\
&= -2\, dS_i
\end{aligned}$$

insgesamt

$$\left[(d\vec S \times \vec\nabla) \times \vec r\,\right] = -2\, d\vec S$$

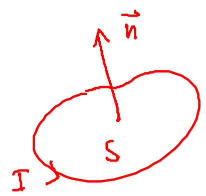
$$\begin{aligned}
\curvearrowright \quad \frac{\vec m}{I} &= \frac{1}{2} \oint_L \vec r \times d\vec r = -\frac{1}{2} \oint_L d\vec r \times \vec r \\
&= -\frac{1}{2} \int_S (d\vec S \times \vec\nabla) \times \vec r = +\int_S d\vec S \\
&= \vec n \, S
\end{aligned}$$

von Stromfaden eingeschlossene Fläche

$$\curvearrowright \quad \vec m = I \cdot S \cdot \vec n$$

magnet. Moment der ebenen Leiterschleife

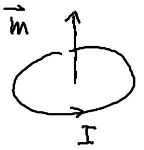
durchfließender Strom



Normalenvektor auf S

Resultat unabhängig von Form von geschlossener Leiterschleife wesentlich, dass eben

nicht zu Magnetfeld / magnet. Moment von ebener Leiterschleife



Schleife mit Strom I

$\updownarrow$

globale Beschreibung mittels $\vec m$

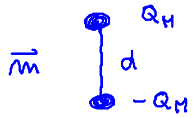
$\vec m$ als magnet. Dipol analog zu elektr. Dipol $\vec p$

Magnetostatik   Elektrostatik

Analogie der Feldlinienbilder für Fernfeld

$\Rightarrow$ Ringstrom durch fiktiven Dipol ersetzen, mit Moment $\vec m$

rein fiktiv $\vec m = Q_M \cdot \vec d$



$\longleftarrow$ Nordpol Q_M

$\longleftarrow$ Südpol $-Q_M$

bildhaftes Modell von Magnetismus

formal möglich, aber physikal. unsinnig: $\nexists$ keine magnet. Ladung. Obigen Vorschlag nicht aufspaltbar!
magnet. Moment als Entität!

bewegte Ladungsträger $\longrightarrow$ Stromdichte $\vec j(\vec r)$

$$\vec j(\vec r) = \vec v(\vec r) \cdot \rho(\vec r)$$

Geschwindigkeit der Ladungsträger $\nearrow$ $\nwarrow$ stat. Ladungsdichte

magnet. Moment:

$$\vec m = \frac{1}{2}\int d^3r \; \vec r \times \vec j(\vec r)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r \; \rho(\vec r)\, \vec r \times \vec v(\vec r)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r \; \frac{\rho(\vec r)}{\mu(\vec r)}\, \vec r \times \vec p(\vec r)$$

$\rho(\vec r)$: Ladungsdichte

$\mu(\vec r)$: Massendichte der Ladungsträger

$\vec p(\vec r) = \mu(\vec r)\, \vec v(\vec r)$ Impulsdichte der Ladungsträger

$$\mu(\vec r) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{M(\Delta V)}{\Delta V} = \frac{\text{Masse von Ladungsträgern in } \Delta V}{\Delta V}$$

Verhältnis von $\mu(\vec r)$ und $\rho(\vec r)$ konstant.

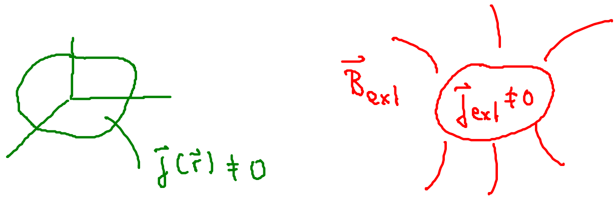
$$\frac{\rho(\vec r)}{\mu(\vec r)} = \frac{\rho(\vec r)}{\mu(\vec r)} \cdot \frac{V}{V} = \frac{q}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{m} = \left(\frac{1}{2}\,\frac{q}{m}\right) \cdot \underbrace{\int d^3r\; \vec{r} \times \vec{p}(\vec{r})}_{= \vec{L} \,=\, \text{Gesamtdrehimpuls der Ladungsträger}}$$

klassische gyromagnet. Verhältnis

insgesamt: $$\vec{m} = \frac{q}{2m}\,\vec{L}$$

4.3. Lokalisierte Stromverteilung: Kräfte und Drehmomente



zwei räumlich getrennte lokalisierte Stromverteilungen

- $\vec{j}(\vec{r})$ zentriert um KO-Ursprung
- $\vec{j}_{ext}(\vec{r})$ äußere Stromverteilung, die Magnetfeld $\vec{B}_{ext} = \vec{B}$ erzeugt

Kraft von $\vec{B} = \vec{B}_{ext}$ auf $\vec{j}(\vec{r})$

$$\vec{F} = \int d^3r\; \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

Drehmoment von $\vec{B}$ auf $\vec{j}(\vec{r})$

$$\vec{M} = \int d^3r\; \vec{r} \times \left(\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\right)$$

Anm: Stromverteilung $\vec{j}_{ext}(\vec{r})$ so weit weg von $\vec{j}(\vec{r})$ entfernt, dass sich $\vec{B} = \vec{B}_{ext}$ nur schwach entlang Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ ändert und durch

$$\vec{B}_{ext}(\vec{r}) = \vec{B}_{ext}(0) + (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}_{ext}\Big|_{\vec{r}=0} + \text{h.o.t.}$$

im Zentrum von $\vec{j}(\vec{r})$

hinreichend gut approximiert wird.

$$\wedge \quad \vec{F} = -\int d^3r\; \vec{B}(\vec{r}) \times \vec{j}(\vec{r})$$

$$= -\vec{B}(0) \times \underbrace{\int d^3r\, \vec{j}(\vec{r})}_{=0} + \int d^3r\; \vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}(0) + \text{h.o.t.}$$

$\vec{B}_{ext} \mathrel{\hat{=}} \vec{B}$

$$= \int d^3r\; \vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}(0) + \text{h.o.t.}$$

$\vec{B}(\vec{r}) = \text{konst} \longrightarrow$ homogenes $\vec{B}$-Feld $\rightarrow$ keine Kraftwirkung

i-te Komponente von $\vec{F}$

$$F_i = -\int d^3r \left[(\vec r\cdot\vec\nabla) B(0) \times \vec j(\vec r)\right]_i$$

$$= -\varepsilon_{ijk} \left[\int d^3r\, \vec r \cdot j_k(\vec r)\right] \nabla B_j(0)$$

wir wenden Identität aus letzter Vorlesung

$$\int d^3r\, (\vec a\cdot\vec r)\,\vec j(\vec r) = -\frac{1}{2}\, \vec a \times \int d^3r\, \vec r\times\vec j(\vec r)$$

$$\vec a = \nabla B_j$$

$$= \frac{1}{2}\, \varepsilon_{ijk}\left[\nabla B_j(0) \times \int d^3r\, \vec r\times \vec j(\vec r)\right]_k$$

$$= -\varepsilon_{ijk}\left[\vec m \times \nabla B_j(0)\right]_k$$

$$= -\varepsilon_{ijk}\left[m\times\nabla\right]_k B_j(0)$$

$$= \varepsilon_{ijk}\left[\vec m\times\nabla\right]_j B_k(0)$$

$i \leftrightarrow k$
komp. $\to$ "–"

$$= \left[(\vec m\times\vec\nabla)\times\vec B(0)\right]_i$$

insgesamt:

$$\vec F = (\vec m\times\vec\nabla)\times\vec B(0)$$

$$= -\vec m\,(\underbrace{\vec\nabla\cdot\vec B(0)}_{=0}) + \nabla(\vec m\cdot\vec B(0))$$

Maxwell Gl. der MS $\qquad \mathrm{div}\,\vec B = 0$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec F &= \nabla(\vec m\cdot\vec B(0)) + h.o.t.\\ \vec F &= \nabla(\vec m\cdot\vec B)\end{aligned}}$$

von $\vec j_{ext}$ erzeugtes Magnetfeld, beim Zentrum von $\vec j(\vec r)$

Kraft wirkt auf $\vec j(\vec r)$

Magnet. Moment der Stromverteilung $\vec j(\vec r)$

Notiz: $\vec F = \left[\nabla(\vec m\cdot\vec B)\right]_{\vec r=0} \;\hat{=}\; \nabla(\vec m\cdot\vec B(0))$

Drehmoment:

$$\vec M = \int d^3r\; \vec r\times\left(\vec j(\vec r)\times\vec B(\vec r)\right)$$

$$= \int d^3r\; \vec r\times\left(\vec j(\vec r)\times\vec B(0)\right) + h.o.t.$$

$$= \int d^3r \left[\underbrace{\vec j(\vec r)\left(\vec r\cdot\vec B(0)\right)}_{=0} - \vec B(0)\left(\vec r\cdot\vec j(\vec r)\right)\right] + h.o.t.$$

benutze Hilfssatz von letzter Stunde

$$\int d^3r \left[f(\vec r)\,\vec j(\vec r)\,\nabla g(\vec r) + g(\vec r)\,\vec j(\vec r)\,\nabla f(\vec r)\right] = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f &= r\\ g &= r\end{aligned}\right\} \quad 2\int d^3r\; r\,\vec j(\vec r)\cdot\nabla r =$$

$$= 2\int d^3r\; r\,\vec j(\vec r)\cdot\vec e_r = 2\int d^3r\; \vec j(\vec r)\cdot\vec r$$

$$\equiv 0$$

Insgesamt $\vec{M} = \int d^3r \left(\vec{r} \cdot \vec{B}(0) \right) \vec{j}(\vec{r}) + h.o.t.$

benutze nochmals $\int d^3r \; \vec{r} \, (\vec{a} \cdot \vec{r}) \, \vec{j}(\vec{r}) = -\frac{1}{2} \vec{a} \times \int d^3r \; \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$

mit $\vec{a} = \vec{B}(0)$

$$\curvearrowright \quad \vec{M} = -\frac{1}{2} B(0) \times \int d^3r \; \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) + h.o.t.$$

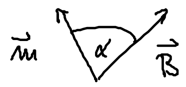
$$\curvearrowright \quad \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}(0) + h.o.t.$$

Drehmoment von $\vec{B} = \vec{B}_{ext}$ auf $\vec{j}(\vec{r})$ ausgeübt:
Kreuzprodukt von magnet. Moment von $\vec{j}(\vec{r})$ und $\vec{B}_{ext}$ im Zentrum von $\vec{j}(\vec{r})$

Bemerkung

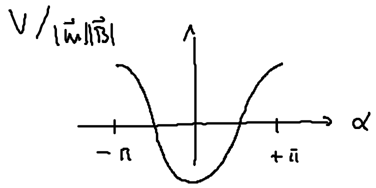
$$\vec{F} = \nabla \left(\vec{m} \cdot \vec{B} \right)$$

$$V = - \vec{m} \cdot \vec{B}$$



$$V = - |\vec{m}| |\vec{B}| \cos \alpha$$

$$\alpha = \sphericalangle (\vec{m}, \vec{B})$$



Potentialminimum bei $\alpha = 0^\circ \Rightarrow \vec{m} \uparrow\uparrow \vec{B}$

Zustand geringster pot. Energie für $\vec{m}$ erfordert, dass $\vec{m}$ parallel zu $\vec{B} = \vec{B}_{ext}$.