4.4. Magnetostatik in Materie / Magnetismus

Magnetismus: Kraftwirkung zwischen magnetischen, magnetisierbaren Körpern
Hufeisenmagnet, Kompaßnadel etc

Was hat dies mit bewegten Ladungen zu tun?

magnetische / magnetisierbare Materialien: auf atomarer Ebene
- "winzige" Ströme
- Dipolmomente

naives Modell (später in QM besser begründbar)

Atom = Kern + Elektronenhülle

Elektronen kreisen um Atomkern auf Kreisbahnen

Elektronen "rotieren" um eigene Achse – Spin

in beiden Fällen als Stromschleifen interpretierbar

→ als magnetische Dipol behandelbar

ohne externes $\vec{B}$-Feld: Vielzahl von $\vec{m}_i$, $i = 1 \ldots 10^{23}$ im makroskop. Material regellos → kompensieren sich zu Null
(Ausnahme Ferromagnete)

mit externem $\vec{B}$-Feld: Ausrichtung der Magnet. Dipole
→ magnet. Polarisation → Magnetisierung

3 Arten von Stoffen:

1) Paramagnete $\uparrow\uparrow$ $\vec{B}$
Magnetisierung
2) Diamagnete $\downarrow\uparrow$ $\vec{B}$
3) Ferromagnete Magnetisierung bleibt auch, wenn $\vec{B} \to 0$

Paramagnetismus:

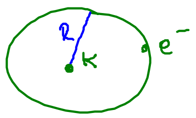
magnet. Dipol in externem $\vec{B}$-Feld $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ → parallele Ausrichtung

naiv: Elektron als winzige geladene Kugel, die um sich selbst rotiert.

QM: Pauli-Prinzip Drehmoment von Elektronenpaaren kompensiert sich
nur Atome mit ungeradzahliger Elektronenzahl trägt zu Magnet. bei

Diamagnetismus:

naiv Elektronen rotieren um Kern
vereinfachend: Kreisbahnen

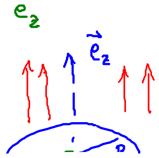


Periode $T = \frac{2\pi R}{v}$

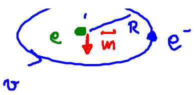
Strom: $I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R}$ Elektronladung $-e$

Dipolmoment bzgl. Kernrotation
$\vec{m} = I \cdot \pi R^2 \, \vec{e}_z = -\frac{1}{2} e v R \, \vec{e}_z$

Drehmoment im äußeren Feld $\vec{B}$
$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$



$M = m \times B$



je nach Orientierung von $\vec B$ beschleunigt Elektron oder bremst ab.

ohne $\vec B$: Zentripetalkraft $\hat{=}$ Coulombkraft zw. Elektron und Kern

$$m_e \frac{v^2}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2}$$

mit $\vec B$ – zusätzl. Lorentzkraft – $-e(\vec v \times \vec B)$ berücksichtigen

Annahme $\vec B \perp$ Kreisbahn

$$m_e \frac{\bar v^2}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2} + e\bar v B$$

$\bar v$ „neue" Geschwindigkeit

$$e\bar v B = \frac{m_e}{R}\left(\bar v^2 - v^2\right) = \frac{m_e}{R}\left(\bar v + v\right)\left(\bar v - v\right)$$

kleines $\vec B \rightarrow \Delta v = \bar v - v$ klein

$$\simeq \frac{m_e}{R}\, 2\bar v\, \Delta v$$

$$\curvearrowright \quad \Delta v = \frac{eRB}{2m_e}$$

$\vec B$ Feld einschalten $\rightarrow$ e^- wird beschleunigt.

$\rightarrow$ Veränderung von Dipolmoment

$$\Delta \vec m = -\frac{1}{2} e (\Delta v) R \vec e_z = -\frac{e^2 R^2}{4 m_e} \vec B$$

Minus-Zeichen $\uparrow\downarrow \vec B$

Ursprung von Diamagnetismus

schwächer als Paramagnetismus

meist bei Atomen mit gerader Elektronenzahl in Hülle dominant

(da dort kein Paramagnetismus vorhanden)

im Prinzip für $O(10^{23})$ Teilchen sehr komplex zu beschreiben

anderer Ansatzpunkt:

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec J(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}\, d^3 r'$$

J Ströme auf atomarer Skala durch Bewegung von Elektronen um Kern / um sich selbst $\rightarrow$ mikroskop. Ströme von Ladungen

$\rightarrow$ magnet. Phänomene

$$\vec J(\vec r') = \vec J_{ext}(\vec r') + \vec J_{mikro}(\vec r')$$

extern — in Materie generiert, unbekannt

$$\vec A(\vec r) = \vec A_{makro}(\vec r) + \vec A_{mikro}(\vec r)$$

Linearität von Vektor-Poisson Gl.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{J}_{ext}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \vec{A}_{mikro}(\vec{r})$$

$$A_{mikro}(\vec{r}) = \sum_i \vec{A}_i \qquad i = 1, .. \, 10^{23}$$

$i \leftarrow$ Atome, ...

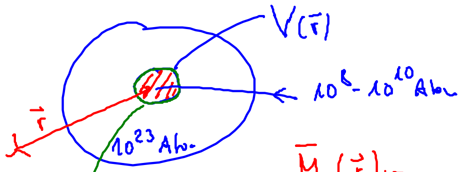
Dipol-approximation

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i \frac{\vec{m}_i \times (\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} + \text{h.o.t.}$$

Kontinuisierung:

$$\sum_i m_i \times \ldots \longrightarrow \int d^3r' \, \vec{M}(\vec{r}\,') \times \ldots$$

wobei $\vec{M}(\vec{r}\,')$ = magnet. Dipoldichte
= Magnetisierung

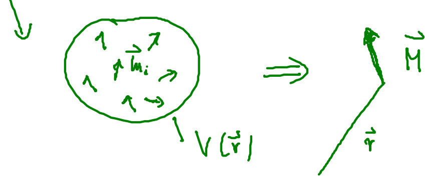


magnet. Dipoldichte im Volumen $V(\vec{r})$

$$\vec{M}(\vec{r}) := \frac{1}{V(\vec{r})}\sum_i \vec{m}_i$$

noch $\vec{r}$-abhängig

nur im Volumen $V(\vec{r})$ enthaltene Atome, ..



insgesamt:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{J}_{ext}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{M}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \qquad !$$

da: $\nabla' \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \dfrac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{J}_{ext}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \vec{M}(\vec{r}\,') \times \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

2 Term umformen, so daß $\sim \operatorname{rot} \vec{M}$

$$\operatorname{rot}(\psi \vec{V}) = \psi \operatorname{rot} \vec{V} - \vec{V} \times \nabla\psi$$

$$\psi = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \quad \vec{V} = \vec{M}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{J}_{ext}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$$

Nun gilt:

$$\left[\int d^3r' \, \nabla' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]_i = \int d^3r' \, \varepsilon_{ijk} \, \partial_j' \, \frac{M_k(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \equiv 0$$

wg $M(\vec{r}\,') \longrightarrow 0$ [illegible] wg $\frac{M(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} \xrightarrow[\vec r' \to \infty]{} 0$, $M(\vec r')$ lokalisiert auf endl. Raumbereich.

insgesamt:

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec J_{ext}(\vec r') + \nabla' \times \vec M(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$\vec J(\vec r) = \vec J_{gesamt}(\vec r') = \vec J_{ext}(\vec r') + \vec J_{mikro}(\vec r')$$

$$\vec J_{mikro} = \nabla \times \vec M(\vec r)$$

Mikroskop. Stromdichten durch Rotation von Magnetisierung $\vec M$ beschreiben.

Wirbel von $\vec B$ Feld

$$\vec J_{gesamt} = \vec J_{ext} + \vec J_{mikro} = \vec J_{ext} + \mathrm{rot}\, \vec M$$

$$\mathrm{rot}\, \vec B = \mu_0 \vec J_{gesamt} = \mu_0 \left(\vec J_{ext} + \mathrm{rot}\, \vec M \right)$$

$$\mathrm{rot}\left(\vec B - \mu_0 \vec M\right) = \mu_0 \vec J_{ext}$$

definiere: $\vec H = \frac{1}{\mu_0} \vec B - \vec M$ = magnet. Erregung
= (veralt) magnet. Feldstärke

Maxwell-Gleichungen für Magnet. / Magnetisierbare Materialien

$$\mathrm{rot}\, \vec H = \vec J_{ext} = \vec J(\vec r)$$

$$\mathrm{div}\, \vec B = 0$$

Wirbel von $\vec H$-Feld sind ausschließlich durch die makroskop. Stromdichte $\vec J(\vec r)$ gegeben.

System $\vec H, \vec B$ Gl. nicht geschlossen, $\vec H = \vec H(\vec B)$?

Vakuum: $\vec M = 0 \Rightarrow \vec B = \mu_0 \vec H$

mit Materie: $\rightarrow \vec M \neq 0$ falls $\vec B, \vec H \neq 0 \rightarrow \vec M = f(\vec H)$

$f(\vec H)$ i. Allg beliebig kompliziert, nichtlinear, tensoriell

einfachster Ansatz: Taylor Entwicklung 1. Ordnung + Isotropie

$$\vec M = \chi_M \vec H \qquad (\chi = \text{chi})$$

χ_M: magnet. Suszeptibilität

$$\Rightarrow \quad \vec B = \mu_0 \left(\vec H + \vec M \right)$$
$$= \mu_0 \left(1 + \chi_M \right) \vec H$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

$$\mu_r = 1 + \chi_M = \text{relative Permeabilität}$$

Bemerkungen:

1) nicht magnetisierbares Medium / "Vakuum"

$$\chi_M = 0 \Rightarrow \mu_r = 1$$

2) Messung, z.B. $\vec{B} = B\vec{e}_z$, $\vec{H} = H\vec{e}_z$, $\vec{M} = M\vec{e}_z$

$$\frac{\partial B}{\partial H} = \mu_r \mu_0 \quad , \quad \frac{\partial B}{\partial M} = \chi_M$$

3) mit χ_M Klassifikation von Materialien möglich

beachte χ_M auch negativ möglich!

Diamagnetismus: $\chi_M < 0$ & $\chi_M = \text{const}$

$$\vec{M} \downarrow\uparrow \vec{H}$$

Eigenschaft aller Stoffe: $\chi_M \sim -10^{-5}$ klein

χ_M nicht wesentl. temperaturabhängig

Paramagnetismus: magnet. Dipole vorhanden ohne $\vec{B}$-Feld
Einschalten von $\vec{B}$ → graduelle Ausrichtung der Dipol
$\uparrow\uparrow$ $\vec{H}$ oder $\vec{B}$

$$\chi_M > 0 \quad \text{da} \quad \vec{M} \uparrow\uparrow \vec{H}$$

$$\chi_M = \chi_M(T)$$

$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ $\quad\nwarrow\nearrow\uparrow\nwarrow\uparrow\nearrow\nearrow$

Curie Weiss Gesetz: $\chi_M = \frac{C}{T}$

makroskop. Beobachtg., gilt nicht für $T \to 0\,K$

Kollektive magnet. Phänomene

$$\chi_M = \chi_M(T, \vec{H})$$

permanente magnet. Dipole ⟺ Austauschwechselwirkg

unterhalb $T = T_C$ spontane Ordng ohne Magnetfeld

magnet. Dipole lokalisiert oder itinerant (Fe, Co, Ni)

Ferromagnetismus:

$T < T_C$ = Curie-Temperatur

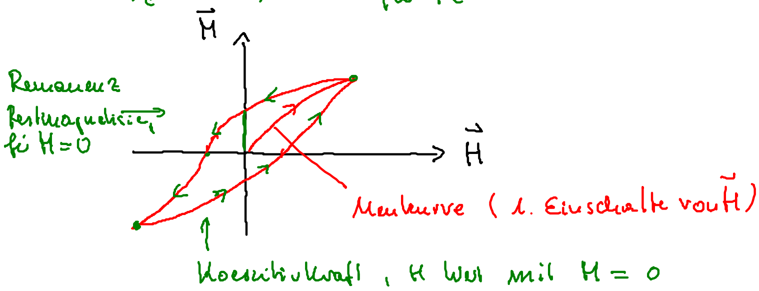
$T = 0$ $\quad\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$

$0 < T \leq T_C$ graduelle Unordng, aber $\vec{M} \neq 0$

$T > T_C$

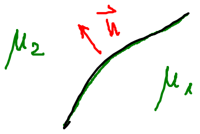
T_C : $10^3\,K$ für Fe

T_c : 10^3 K für Fe



Ferrimagnetismus	↑↓↑↓↑↓↑	$\vec{M} \neq 0$
Antiferromagnetismus	↑↓↑↓↑↓↑	$\vec{M} = 0$

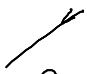
Verhalten von $\vec{B}$ und $\vec{H}$ an Grenzflächen



1) Komponente von $\vec{B}$ $\perp$ Grenzfläche ändert sich nicht
2) Fließt kein Strom in Grenzfläche, so ist Komponente von $\vec{H}$ $\parallel$ Grenzfläche ungeändert

zu 1) Gauß Kasten: $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta x$

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$



$$0 = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{B}\, dV = \oint_{\Delta S} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \left[\vec{B}_1 \cdot \vec{n} - \vec{B}_2 \cdot \vec{n}\right] \Delta S = 0$$

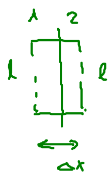
$\Rightarrow$ $\vec{B}_1 \cdot \vec{n} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n}$ Normalkomponente gleich

mit $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$ $\Rightarrow$ $\mu_r^{(2)} \vec{H}_2 \cdot \vec{n} = \mu_r^{(1)} \vec{H}_1 \cdot \vec{n}$

falls $\mu_r^{(i)}$ verschieden: Normalkomponente verschieden

zu 2) $\left[\operatorname{rot} \vec{H}\right]_{\text{Grenzf.}} = \vec{j}\,\Big|_{\text{Grenzfl.}} \overset{!}{=} 0$ (kein Strom in Grenzfläche

Stokes-Fläche



$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0 \Rightarrow 0 \int_{\Delta S} (\operatorname{rot} \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{\Rightarrow} (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)\, \vec{e}_\parallel\, l$$

$\Rightarrow$ $\vec{H}_1 \vec{e}_\parallel = \vec{H}_2 \vec{e}_\parallel$

Tangentialkomponenten von $\vec{H}$ stetig an Grenzfläche
aber Tangentialkomponenten von $\vec{B}$ unstetig an Grenzfläche falls $\mu_r^{(i)}$ verschieden, da

falls $\mu_r^{(i)}$ verschieden, da

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}$$

$$\curvearrowright \quad \frac{\vec{B}_1}{\mu_r^{(1)}} = \frac{\vec{B}_2}{\mu_r^{(2)}}$$