5. Elektrodynamik: Raumzeitlich veränderliche Felder

MG:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}$$

Kopplung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ via Zeitableitungen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$

stat. Fälle: $\partial_t \vec{E} = 0 = \partial_t \vec{B} \quad \rightarrow \vec{E}$ und $\vec{B}$ entkoppelt

allgemeiner Fall: Kreuzkopplung berücksichtigen

elektromagnet. Feld: $\{\vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t)\}$

felderzeugende Ladungs- bzw. Stromdichten $\{\varrho(\vec{r},t), \vec{j}(\vec{r},t)\}$

Kontinuitätsgleichung: $\partial_t \varrho + \operatorname{div} \vec{j} = 0$ (Ladungserhaltung)

Lorentz Kraft Gleichung: $m \ddot{\vec{r}} = q\left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right]$

Lorentz-Eichung $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \Box \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} \\ \Box \varphi &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho \end{aligned}\right\}$$ "einfachste" Version der MG

$$c^2 = 1/\varepsilon_0 \mu_0$$

5.1. Invarianz-Eigenschaften der MG

1) Zeitspiegelung: $t \rightarrow -t \quad \rightarrow$ Reversibilität

$$t \rightarrow t' = -t$$
$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r}$$
$$\varrho(t) \rightarrow \varrho(-t)$$
$$\vec{v} = \partial_t \vec{r} \Rightarrow \vec{v} \rightarrow -\vec{v}$$
$$\vec{j} = \varrho \vec{v} \Rightarrow \vec{j} \rightarrow -\vec{j}$$
$$\vec{F} = \vec{F}' \Rightarrow \begin{aligned} \vec{B} &\rightarrow -\vec{B} \\ \vec{E} &\rightarrow \vec{E} \end{aligned} \quad ; \quad \vec{F} = q\left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right]$$

2) Raumspiegelung $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, aber $t \rightarrow t' = t$ ungeändert

$$\varrho \rightarrow \varrho' = \varrho$$
$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi$$
$$\vec{B} \rightarrow \vec{B}' = \vec{B}$$
$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = -\vec{A}$$
$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}' = -\vec{E}$$
$$\vec{j} \rightarrow \vec{j}' = -\vec{j}$$

3) Ladungsumkehr

3) Ladungsumkehr

$$q \to -q \quad \Rightarrow \quad \rho \to \rho' = -\rho$$
$$\vec{E} \to \vec{E}' = -\vec{E}$$
$$\vec{B} \to \vec{B}' = -\vec{B}$$
$$\vec{j} \to \vec{j}' = -\vec{j}$$

4) Skalentransformation von Raum & Zeit

$$t \to t' = K t \qquad K \text{ konst Faktor}$$
$$\vec{r} \to \vec{r}' = K \vec{r}$$

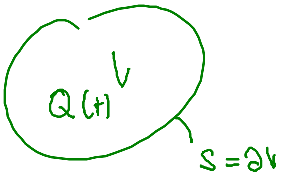
5) MG nicht Galilei-invariant

6) MG Lorentz-invariant

5.2. Bilanzgleichungen der Elektrodynamik

Bilanzen physikal. Größen wie z.B. Energie, Drehimpuls, Ladung etc.

Ladungserhaltung in ED bekannt → KG



Gesamtladung in V ändert

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_{\partial V} dI = -\oint_{\partial V} \vec{j}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S}$$

wäre Q nicht erhalten → Zusatzterm der Erzeugung bzw Vernichtung von Ladung beschreiben könnte.

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_{\partial V} \vec{j}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} + \int_V d^3r \; K(\vec{r},t) \qquad Q = \int \rho(\vec{r},t)\, d^3r$$

$$\Rightarrow \int_V d^3r \left(\partial_t \rho(\vec{r},t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) - K(\vec{r},t) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_t \rho(\vec{r},t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) = K(\vec{r},t)}$$

allgemeine Struktur von Bilanzgleichungen

In ED: Ladungserhaltung $K(\vec{r},t) = 0$

abstrakter:

Änderungsrate einer Dichte $\rho(\vec{r},t)$ gegeben durch Transport mit Flussdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$ und durch Erzeugung und/oder Vernichtung mit räuml. Dichte $K(\vec{r},t)$

a) Energiebilanz:

a) Energiebilanz:

MGs mit örtlichen Ableitungen der Felder

$$\nabla\times\vec E + \partial_t\vec B = 0 \qquad (1) \qquad |\cdot\vec B$$

$$\nabla\times\vec B - \varepsilon_0\mu_0\partial_t\vec E = \mu_0\vec j \qquad (2) \qquad |\cdot\vec E$$

+ Differenz

$$\curvearrowright \quad \vec B\cdot(\nabla\times\vec E) - \vec E\cdot(\nabla\times\vec B) + \underbrace{\vec B\,\partial_t\vec B + \varepsilon_0\mu_0\vec E\,\partial_t\vec E}_{=\partial_t\left(\frac12\vec B^2+\varepsilon_0\mu_0\frac12\vec E^2\right)} = -\mu_0\vec j\cdot\vec E$$

mit

$$\nabla\cdot(\vec E\times\vec B) = \vec B\cdot(\nabla\times\vec E) - \vec E\cdot(\nabla\times\vec B)$$

$$\curvearrowright \quad \nabla\cdot(\vec E\times\vec B) + \partial_t\tfrac12\left(\vec B^2 + \varepsilon_0\mu_0\vec E^2\right) = -\mu_0\vec j\cdot\vec E \quad \leftarrow$$

$$w(\vec r,t) = \frac12\varepsilon_0\vec E^2 + \frac12\frac{1}{\mu_0}\vec B^2$$

$$\vec S(\vec r,t) = \frac{1}{\mu_0}\vec E\times\vec B \qquad (\text{"Poynting-Vektor"})$$

$$\curvearrowright \quad \boxed{\partial_t w(\vec r,t) + \operatorname{div}\vec S(\vec r,t) = -\vec j(\vec r,t)\cdot\vec E(\vec r,t)} \qquad \text{Poynting Theorem}$$

$w(\vec r,t)$: Dichte der Feldenergie

$S(\vec r,t) = \frac{1}{\mu_0}\vec E\times\vec B$ Flußdichte der Feldenergie

Beachte: In Bilanzgleichung geht nur $\operatorname{div}\vec S$ ein

$$\to \vec S \to \vec S' = \vec S + \nabla\times\vec\Psi \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec S = \nabla\cdot\vec S'$$

Konsequenzen:

1) Ann: $\vec j\cdot\vec E = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t w + \operatorname{div}\vec S = 0$ (Bilanzgleichung ↓ Erhaltungssatz)

d.h. wenn

$$\left.\begin{array}{ll} \vec j = 0 & \forall(\vec r,t) \\ \vec j \perp \vec E & \forall(\vec r,t) \\ \vec E = 0 & \forall(\vec r,t) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec j\cdot\vec E \equiv 0$$

$$\underbrace{\partial_t\int_V d^3r\, w(\vec r,t)}_{=W(t)} + \underbrace{\int_V d^3r\,\operatorname{div}\vec S(\vec r,t)}_{\oint_{S(V)}\vec S\cdot\vec n\,dS} = 0$$

Oberflächenelement

$S(V)$ Poynting-Vektor

$$\partial_t W(t) + \oint_S S_n\,dS = 0$$

Gesamtenergiefluß durch $S = \partial V$

Gesamtfeldenergie in V

Änderung der Feldenergie nur durch Zu / Abfluß von Feldenergie durch $S(V)$ möglich

$\vec{j} = 0 \Rightarrow$ keine Ströme $\Rightarrow$ keine Bewegung von Ladung

$\Rightarrow$ keine Ladungen da Strom $\rightarrow$ Ladung via $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ verknüpft.

2) $\vec{j} \cdot \vec{E} \neq 0$ allgemein $\Rightarrow \partial_t w + \operatorname{div} \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$

$\vec{j} \cdot \vec{E}$ beschreibt Erzeugung und / oder Vernichtung von Feldenergie

Integrale Version:

$$\partial_t W(t) + \oint_{S(V)} \vec{S} \cdot \vec{n} \, dS = - \int_V d^3r \, \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Global muß Energie erhalten bleiben $\rightarrow$ keine generelle Erzeugung bzw Vernichtung von Energie möglich $\Rightarrow$ Energie muß ausgetauscht bzw transferiert werden in andere Form von Energie

elektr. Ladungen bzw elektr. geladene Teilchen müssen wegen $\vec{j} \cdot \vec{E} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} \neq 0$ Feldenergie aufnehmen oder abgeben

elektromagn. Feldenergie $\Longleftrightarrow$ Energie geladener Teilchen

Kraft auf geladenes Teilchen

$\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E}$

$\vec{F}_{magn} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$

$\vec{v}$ = Geschwindigkeit der Ladung

Übergang zu Dichten:

$q \rightarrow \rho(\vec{r}, t)$

$q \cdot \vec{v} \rightarrow \vec{j}(\vec{r}, t)$

Lorentz-Kraft-Dichte

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{f} &= \rho \, \vec{v} \cdot \vec{E} + \vec{v} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) \\ &= \rho \, \vec{v} \cdot \vec{E} + \underbrace{\vec{v} \cdot (\rho \vec{v} \times \vec{B})}_{=0} \quad \text{(Spatprodukt !)} \\ &= \rho \vec{v} \cdot \vec{E} \\ &= \vec{j} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Warum Minuszeichen auf rechter Seite von Poynting-Theorem?

$\vec{f}\cdot\vec{v} = \vec{j}\cdot\vec{E} > 0$:

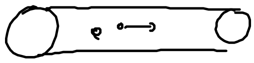
Leistung wird Feld entnommen und auf geladene Teilchen übertragen

$\vec{f}\cdot\vec{v} = \vec{j}\cdot\vec{E} < 0$:

Leistung von Ladungen entnommen und an Feld transferiert.

Konkretes Beispiel für Verlust von Feldenergie

Transport von Ladungen in Leitern



phänomenologisch: Ohmsches Gesetz

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad , \quad \vec{j} \parallel \vec{E} \ , \ \sigma > 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{j}\cdot\vec{E} = \sigma \vec{E}\cdot\vec{E} = \sigma \vec{E}^2 > 0$$

⇒ Feld überträgt Energie an Ladungsträger / Elektronen

⇒ Elektronen beschleunigt, stoßen mit Ionen im Leiter

⇒ Anregung von Schwingungen des Ionengitters

⇒ Ohmsche Wärme

⇒ Temperaturerhöhung — irreversibel