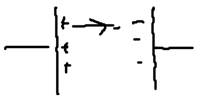
Bsp für Gewinn von Feldenergie, d.h. $\vec{j}\cdot\vec{E} < 0$

Kondensator; $U = \frac{E}{d}$



positive Ladung von negative Platte → positive Platte → entgegen Feldrichtung

$\Rightarrow$ Temp $\vec{j} \uparrow\downarrow \vec{E} \Rightarrow \vec{j}\cdot\vec{E} < 0$

b) Impulsbilanz

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B} - \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} = \vec{j} \qquad (2)$$

Kreuzprodukt bilden $\varepsilon_0 \vec{E} \times (1)$, $\vec{B} \times (2)$

$$\varepsilon_0 \vec{E} \times \operatorname{rot}\vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E} \times \partial_t \vec{B} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B} \times \operatorname{rot}\vec{B} - \varepsilon_0 \vec{B} \times \partial_t \vec{E} = \vec{B} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{B}$$

Summe:

$$\varepsilon_0 \vec{E} \times \partial_t \vec{B} - \varepsilon_0 \vec{B} \times \partial_t \vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E} \times \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \times \operatorname{rot}\vec{B} = -\vec{j} \times \vec{B} \qquad (*)$$

1.+2. Term

$$\varepsilon_0 \left(\vec{E} \times \partial_t \vec{B} - \vec{B} \times \partial_t \vec{E}\right) = \varepsilon_0 \left[\vec{E} \times \partial_t \vec{B} + (\partial_t \vec{E}) \times \vec{B}\right]$$

$$= \varepsilon_0 \partial_t \left[\vec{E} \times \vec{B}\right]$$

3. +4. Term

$$\vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \nabla\left(\frac{1}{2}\vec{a}^2\right) - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{a}$$

i-te Komponente

$$[\vec{a} \times (\nabla \times \vec{a})]_i = \partial_i \frac{1}{2}\vec{a}^2 - (a_j \partial_j) a_i$$

$$= \partial_i \frac{1}{2}\vec{a}^2 - \partial_j (a_i a_j) + a_i \partial_j a_j$$

$$= \partial_j \left(\frac{1}{2}\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j\right) + a_i \partial_j a_j$$

$$= \partial_j \left(\frac{1}{2}\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j\right) + a_i \operatorname{div}\vec{a}$$

$\partial_j(a_i a_j) = a_j \partial_j a_i + a_i \partial_j a_j$

Setze $\vec{a} = \vec{E}$, benutze $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$$\Rightarrow \left(\vec{E} \times \operatorname{rot}\vec{E}\right)_i = \partial_j \left[\frac{1}{2}\vec{E}^2 \delta_{ij} - E_i E_j\right] + \frac{1}{\varepsilon_0}\rho E_i$$

Setze $\vec{a} = \vec{B}$, benutze $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

$$\left(\vec{B} \times \operatorname{rot}\vec{B}\right)_i = \partial_j \left[\frac{1}{2}\vec{B}^2 \delta_{ij} - B_i B_j\right]$$

in (*) einsetzen

$$\varepsilon_0 \partial_t (\vec{E}\times\vec{B})_i + \partial_j \left[\varepsilon_0 \left(\tfrac{1}{2}\vec{E}^2 \delta_{ij} - E_i E_j \right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\tfrac{1}{2}\vec{B}^2 \delta_{ij} - B_i B_j \right) \right]$$
$$= -(\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})_i$$

Struktur von Kontinuitätsgleichung

Impulsdichte von Feld

$$\Pi_i = \varepsilon_0 (\vec{E}\times\vec{B})_i \longrightarrow \vec{\Pi} = \varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B}$$

Kraftdichte

$$f_i = (\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})_i \longrightarrow \vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$$

Lorentz

"Divergenzterm" weiterverarbeiten:

$$\vec{T}^{(i)} = T_{ij}\vec{e}_j$$

$$\nabla\cdot T^{(i)} = \partial_j T_{ij}$$

$$T_{ij} := \varepsilon_0 \left(\tfrac{1}{2}\vec{E}^2 \delta_{ij} - E_i E_j \right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\tfrac{1}{2}\vec{B}^2 \delta_{ij} - B_i B_j \right)$$

T_{ij} = j-te Komponente von einem Vektor $\vec{T}^{(i)}$

$T_{ij} = T_{ji}$ (symmetrisch)

T_{ij} = Tensor 2. Stufe → Physik I

$\partial_j T_{ij}$: "Verjüngung" des Tensors T_{ij} zu Vektor

($\partial_i a_i$: "Verjüngung" von Vektor zu Skalar)

insgesamt

$$\partial_t \Pi_i + \vec{\nabla}\cdot\vec{T}^{(i)} = -f_i$$

$$\partial_t \vec{\Pi} + \nabla\cdot\overleftrightarrow{T} = -\vec{f}$$

Lorentzkraftdichte

$$\overleftrightarrow{T} = (T_{ij})$$

$\vec{\Pi} = \varepsilon_0 (\vec{E}\times\vec{B})$ = räumliche Dichte des Feldimpulses

warum Minuszeichen auf r.h.s.

Lorentzkraft → Kraft auf Ladungen → Änderungsrate des Impulses der Ladungen → Impulszunahme der Ladungen ⟺ Impulsabnahme von Feld.

$$\vec{T}^{(i)} = T_{ij}\vec{e}_j$$

= Flußdichte der i-ten Komponente des Feldimpulses

T_{ij} = j-te Komponente von Flußdichte

$= $ Maxwellsches Spannungstensor

$$\partial_t \vec{\Pi} + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T} = -\vec{f}$$ allg. Form von Impulsbilanz

erweitert Newton Gl. auf Felder / Dichten.

c) Drehimpulsbilanz:

Mechanik $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$, $L_i = \varepsilon_{ijk}\, x_j\, p_k$

Starte mit

$$\partial_t \Pi_i + \partial_j T_{ij} = -f_i$$

multipliziert mit $\varepsilon_{lmi}\, x_m$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{lmi}\, x_m\, \partial_t \Pi_i = \partial_t\, \varepsilon_{lmi}\, x_m\, \Pi_i$$

$$\varepsilon_{lmi}\, x_m\, \partial_j T_{ij} \underset{HA}{=\ldots=} \partial_j\left(\varepsilon_{lmi}\, x_m\, T_{ij}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t l_i + \partial_j D_{ij} = -\tau_i$$

$$l_i = \varepsilon_{imn}\, x_m\, \Pi_n$$

$$D_{ij} = \varepsilon_{imn}\, x_m\, T_{nj}$$

$$\tau_i = \varepsilon_{imn}\, x_m\, f_n$$

l_i : i-te Komp. der Drehimpulsdichte von Feld

D_{ij} : j-te Komponente der Flußdichte der i-ten Komponente der Felddrehimpulses

τ_i : i-Komponente der Dichte der Drehmoments der Lorentzkraft.

Spezialfall freies Feld:

$\rho = 0 = \vec{j}$:

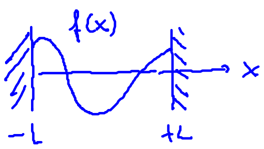
$$\partial_t w + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0 \qquad \text{Energie}$$
$$\partial_t \vec{\Pi} + \nabla\, \overleftrightarrow{T} = 0 \qquad \text{Impuls}$$
$$\partial_t \vec{l} + \nabla\cdot\overleftrightarrow{D} = 0 \qquad \text{Drehimpuls}$$

$\Big\}$ Erhaltung.

—— Ende 2011

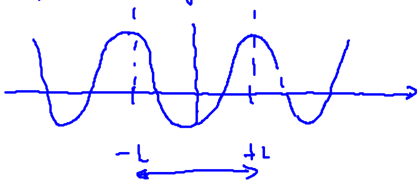
5.3. mathem. Exkurs: Fourier-Transformation

Fourier Reihe: $f(x)$ definiert auf Intervall $[-L,+L]$ definiert



$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\, e^{in\frac{\pi}{L}x}$$

auch für period. fortgesetzte Fkt. möglich



Verallgemeinerung auf nicht-periodische Funktionen $f(x)$?

Darstellung von $f(x)$ als Überlagerung von trigonometr. Funktion

Integraltransformation $\longrightarrow$ insb. Fourier Transformation

grundlegende Idee

$$f(x) \sim \int \underbrace{\hat{f}(k)}_{\text{kontinuierl. Funktion}} e^{ikx} \underbrace{dk}_{\text{kontinuierliches } k}$$

kontinuierliches k ersetzt $\frac{n\pi}{L}$ in Fourier Reihe

Einführung von FT via δ-Funktion

$$I := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\; e^{ikx - \varepsilon|k|} \qquad , x, k, \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} dk\; e^{ikx-\varepsilon|k|} + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} dk\; e^{ikx-\varepsilon|k|}$$

$k \leq 0 \to |k| \to -k$

$k \geq 0 \to |k| \to k$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{0} dk\; e^{(\varepsilon+ix)k} + \int_{0}^{+\infty} dk\; e^{-(\varepsilon-ix)k} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon+ix} e^{(\varepsilon+ix)k} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\varepsilon-ix} e^{-(\varepsilon-ix)k} \Big|_{0}^{+\infty} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon+ix} - \frac{1}{\varepsilon-ix} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2} \qquad \text{(Lorenz-Kurve)}$$

$$= \delta_\varepsilon(x) \qquad \text{approx von } \delta\text{-Fkt } \delta(x) \quad \varepsilon \to 0$$

Limes $\varepsilon \to 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\; e^{ikx} = \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\; e^{-ikx}$$

Darstellung von δ-Fkt als Ausgangspunkt für FT

Def: Fourier-Transformierte einer Funktion $f(x)$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; f(x)\; e^{-ikx}$$

Multipliere mit $e^{ikx'}$ & integriere über k

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \hat{f}(k)\, e^{ikx'} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, e^{ik(x'-x)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \hat{f}(k)\, e^{ikx'} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ik(x'-x)}}_{\equiv\, \delta(x'-x)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \delta(x'-x)$$

$$= f(x')$$

Fourier-Theorem:

- $f(x)$ i. Allg nicht periodisch
- $f(x)$ reelle oder komplexe Fkt in einer reellen Variablen
- $f(x)$, $f'(x) = \frac{df}{dx}$ in jedem Intervall stückweise stetig
- $f(x)$ absolut integrabel in $(-\infty, +\infty)$, d.h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty$$

Dann gilt: für $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, e^{-ikx'} f(x')}_{\sim\, \hat{f}(k)}}$$

Fourier-Transformierte:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} = F\left[f(x)\right]$$

inverse Fourier-Transformierte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \hat{f}(k)\, e^{+ikx} = F^{-1}\left[\hat{f}(k)\right]$$

Fourier Theorem: $f(x) = F^{-1}\left[F\left[f(x)\right]\right]$

Bemerkung:

1) formal

$$\begin{array}{ccc} \text{x-Raum} & & \text{k-Raum} \\ f(x) & \underset{F^{-1}[\hat{f}(k)]}{\overset{F[f(x)]}{\rightleftarrows}} & \hat{f}(k) \end{array}$$

2) x und k beide reell

x und k reziprok bzgl. Dimension $\longrightarrow$ $\dim x = \frac{1}{\dim k}$

in der Physik:

x – Raum — 1d Ortsraum
k – Raum — Wellenzahlraum

oder $x \to t$, $k \to \omega$

t – Raum — Zeit-Raum
ω – Raum $\longrightarrow$ (Kreis)-Frequenz Raum

3) t, ω - Version der FT

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, e^{-i\omega t'} s(t')$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow 2\pi f = \omega \Rightarrow d\omega = 2\pi df$$

$$s(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{s}(f)$$

Champeney: Fourier transforms and their phys. application, 1973
Titchmarsh: Introduction to the theory of Fourier Integrals, 1948

Elementare Eigenschaften der FT:

$$\hat{f}(k) = F[f(x)]$$
$$f(x) = F^{-1}[\hat{f}(k)]$$

Addition & Subtraktion   2 Fkt. $f_1(x)$, $f_2(x)$

$$F[f_1(x) + f_2(x)] = F[f_1(x)] + F[f_2(x)]$$

Multipl. mit Konst. c

$$F[c\, f(x)] = c\, F[f(x)]$$

Verschiebung:

$$F[f(x-x_0)] = e^{-ikx_0} F[f(x)]$$

Skalierung

$$F[f(cx)] = \frac{1}{|c|} \hat{f}\left(\frac{k}{c}\right)$$

da: $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(cx)\, e^{-ikx} \underset{x'=cx}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{|c|} f(x')\, e^{-i\left(\frac{k}{c}\right)x'}$$

$$= \frac{1}{|c|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, e^{-i\left(\frac{k}{c}\right)x}$$

$$= \frac{1}{|c|} \hat{f}\left(\frac{k}{c}\right) \quad \boxtimes$$

Inversion:

$$F\left[f(-x)\right] = \hat{f}(-k)$$

Ableitung:

$$F\left[\frac{d}{dx} f(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{d}{dx} f(x)\right) e^{-ikx}$$

Part. Integration

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{f(x)\, e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\to 0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (-ik)\, f(x)\, e^{-ikx}$$

absolut integrabel

$$= +ik \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}$$

$$= ik\, \hat{f}(k)$$

$$= (ik)\, F\left[f(x)\right]$$

Faltungstheorem:

Faltung (convolution) $\quad f_1(x) * f_2(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y)\, f_2(x-y)\, dy$

$$F\left[f_1(x) * f_2(x)\right] = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}_1(k)\, \hat{f}_2(k)$$

Parseval-Plancherel-Theorem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_1(x)\, f_2^*(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \hat{f}_1(k)\, \hat{f}_2^*(k)$$

$f_1 = f_2$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, |\hat{f}(k)|^2$$

Flächensatz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(k=0)$$

da $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \hat{f}(k)\, e^{ikx}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \hat{f}(k) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ikx}}_{2\pi\,\delta(k)}$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(k=0)$$

Allg. Version von Ableitung:

$$F\left[\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right] = (+ik)^n\, \hat{f}(k)$$

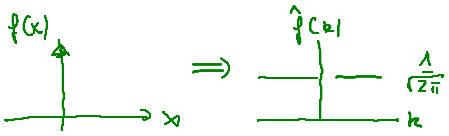
Symmetrien:

$f(x)$ reell $\Rightarrow f(x) = f^*(x) \Rightarrow \hat{f}(k) = \hat{f}^*(-k)$

$f(x)$ rein imag. $\Rightarrow f(x) = -f^*(x) \Rightarrow \hat{f}(k) = -\hat{f}^*(-k)$

$f(x)$ gerade $\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow \hat{f}(k) = \hat{f}(-k)$
$f(x)$ ungerade $\Rightarrow f(x) = -f(-x) \Rightarrow \hat{f}(k) = -\hat{f}(-k)$

$f(x) = \delta(x) \Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

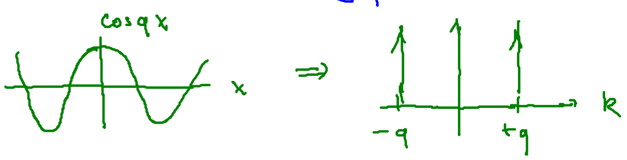


$f(x) = 1 \Rightarrow \hat{f}(k) = \sqrt{2\pi}\,\delta(k)$

$f(x) = \sum_n f_n\, e^{inqx}$ (periodisch!)

$\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi} \sum_n f_n\, \delta(k - nq)$

$f(x) = \cos qx = \frac{1}{2}\left[e^{iqx} + e^{-iqx}\right]$



$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(k-q) + \delta(k+q)\right]$

$f(x) = \sin qx$

Verallgemeinerung auf N-Dimension im Ort

$\vec{r}$ - Raum - Ortsraum $\quad \vec{r} = r_i \vec{e}_i$
$\vec{k}$ - Raum - Wellenvektor-Raum $\quad \vec{k} = k_i \vec{e}_i$ $\Big\}\ i = 1, \dots N$

$$f(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^N x\, \hat{f}(k)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = F^{-1}\left[\hat{f}(\vec{k})\right]$$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^N k\, f(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = F\left[f(\vec{r})\right]$$

insb.: $\quad F\left[\nabla f(\vec{r})\right] = i\vec{k}\,\hat{f}(\vec{k})$

Verallgemeinerung auf Felder

Fourier Transformation bzgl. Ort und Zeit

Skalarfeld $\quad f(\vec{r}, t)$
bzw. Komponente von Vektorfeld, Tensorfeld.. $\quad f_\alpha(\vec{r}, t)$

Fourier Transformierte:

$+\infty \quad +\infty$

$$\hat{f}(\vec{k},\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt \; f(\vec{r},t)\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$f(\vec{r},t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; \hat{f}(\vec{k},\omega)\, e^{+i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$f(\vec{r},t)$ als "Superposition" von "ebenen" Wellen

$$F\left[\partial_t f(\vec{r},t)\right] = -i\omega \hat{f}(\vec{k},\omega) = -i\omega\, F\left[f(\vec{r},t)\right]$$

$$F\left[\nabla f(\vec{r},t)\right] = i\vec{k}\, \hat{f}(\vec{k},\omega)$$

$$F\left[\nabla^2 f(\vec{r},t)\right] = -\vec{k}^2 f(\vec{k},\omega)$$

elementares Anwendungsbeispiel: getriebener, gedämpfter Oszillator

$x = x(t) \rightarrow$ nur zeitl. Ableitung

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + d\, x(t) = f(t)$$ beliebig

FT:

$x(t) \rightarrow \hat{x}(\omega)$

$\dot{x}(t) \rightarrow +i\omega\, \hat{x}(\omega)$

$\ddot{x}(t) \rightarrow -\omega^2 \hat{x}(\omega)$

$f(t) \rightarrow \hat{f}(\omega)$

} Konv. wie oben

$$\Rightarrow \; -\omega^2 \hat{x}(\omega) + i\omega\gamma\, \hat{x}(\omega) + d\, \hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$(-\omega^2 + i\omega\gamma + d)\, x(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow \; \hat{x}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{d + i\omega\gamma - \omega^2}$$

Lösen der Dgl $\longrightarrow$ im ω-Raum: algebraisches Problem

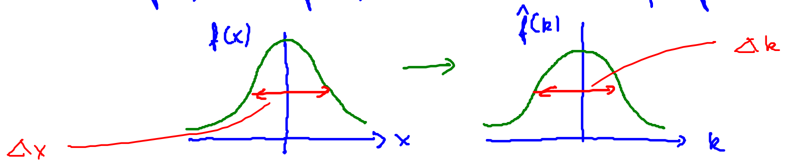
$\rightarrow \hat{x}(\omega)$ gelöst

$$x(t) \sim \int d\omega \, \frac{\hat{f}(\omega)}{d + i\omega\gamma - \omega^2}\, e^{-i\omega t}$$

muß noch gelöst werden!

"Bandbreite"-Theorem der FT

$f(x)$ und $\hat{f}(k)$ zentriert um Ursprung mit einem Höcker



$$(\Delta x)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx}, \quad (\Delta k)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 |\hat{f}(k)|^2 dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk}$$

es gilt: $\Delta x \; \Delta k \geq 1 \longrightarrow$ Grundlage für

$\Delta x \cdot \Delta k \gtrsim \frac{1}{2}$ $\Longrightarrow$ Heisenbergsche Unschärfe in der QM

5.4. Ebene Wellen Lösungen der homogenen Wellengleichung

einfachster Typ von Lösungen der zeitabhängigen MG (ohne Quellen)

d.h. $\rho \equiv 0$, $\vec{j} = 0$

$$\Rightarrow \quad \Box \psi = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\psi = 0$$

wobei $\psi = \psi(\vec{r}, t)$ Repräsentant einer Komp. von $\vec{E}$ bzw $\vec{B}$.

a) Vereinfachung: ebene Wellen in z-Richtung

$\vec{E}$ bzw $\vec{B}$ nur von einer KO-Richtung abhängig z.B. z-Richtung

$$\psi = \psi(z,t) \;\rightarrow\; \left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\psi(z,t) = 0$$

Lösung per Substitution

$$\left.\begin{aligned} \xi &:= z - ct \\ \eta &:= z + ct \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Add} \rightarrow 2z \\ &\text{Subtr.} \rightarrow 2ct \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{2}(\eta + \xi) = z(\eta, \xi)$$

$$t = \frac{1}{2c}(\eta - \xi) = t(\eta, \xi)$$

Ableitungen bilden

$$\partial_\xi := \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\partial_z - \frac{1}{c}\partial_t\right)$$

$$\partial_\eta := \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\partial_z + \frac{1}{c}\partial_t\right)$$

$$\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 = \left(\partial_z - \frac{1}{c}\partial_t\right)\left(\partial_z + \frac{1}{c}\partial_t\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \partial_\xi \partial_\eta \psi(\xi, \eta) = 0$$

elementare Lösung: $\psi = f_+(\xi)$ oder $\psi = f_-(\eta)$

allgem. Lösung: Linearkombination

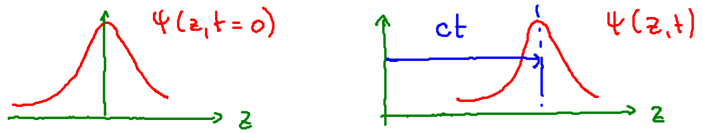
$$\psi(\xi, \eta) = f_+(\xi) + f_-(\eta)$$

Rücktransf.:

$$\psi(z,t) = f_+(z - ct) + f_-(z + ct)$$

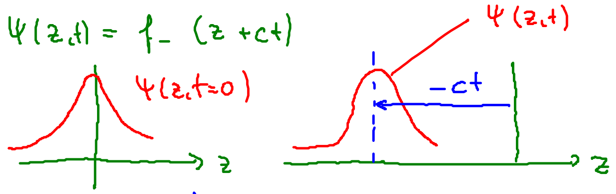
Interpretation:

1) $\Psi(z,t) = f_+(z-ct)$



$\Psi(z,t=0)$ bewegt sich mit fester Form mit Lichtgeschw. c in positive z-Richtung

2) $\Psi(z,t) = f_-(z+ct)$



$\Psi(z,t=0)$ bewegt sich mit fester Form mit c in negative z-Richtung

3) Gesamtlösung als lineare Superposition

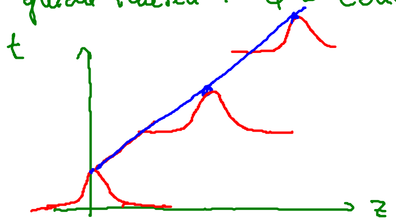
4) Translationsinv. in t $\Rightarrow$ $t=0$, $t=t_0$ ....

5) c als Propagationsgeschwindigkeit von elektromagn. Welle

6) $f_\pm(z \mp ct)$:

$$\phi = z \mp ct \quad \text{Phase der Lösung}$$

gleiche Phasen: $\phi = \text{const} \Rightarrow z \mp ct = \text{const}$



Punkte gleicher Phase haben gleiche Funktionswerte $f_\pm(z \mp ct)$

b) Verallgemeinerung: ebene Welle in beliebige Raumrichtung

allgem. Wellengl.: $$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\Psi(\vec{r},t) = 0 \qquad (WG)$$

Lösung $$\Psi(\vec{r},t) = f(\vec{n}\cdot\vec{r} - ct) \qquad (*)$$

mit $\vec{n}$ Einheitsvektor in beliebige Raumrichtung

$$\vec{n}\cdot\vec{n} = |\vec{n}|^2 = 1$$

Nachweis, dass (*) die WG löst: | Abl. nach Argument

$$\partial_i \Psi = n_i f'(\vec{n}\cdot\vec{r} - ct)$$
$$\partial_t \Psi = -c f'(\vec{n}\cdot\vec{r} - ct)$$

$$\nabla^2\Psi = \partial_i^2\Psi = n_i^2 f''(\vec{n}\cdot\vec{r} - ct)$$
$$= f''(\vec{n}\cdot\vec{r} - ct)$$

$$\partial_t^2 \psi = c^2 f''(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\psi(\vec{r},t) = \left(1-\frac{1}{\cancel{c^2}}\cancel{c^2}\right) f''(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct) = 0 \qquad \square$$

Phase der Lösung $\phi = \vec{n}\cdot\vec{r} - ct$

Orte gleicher Phase von ψ in Ebene

$$\vec{n}\cdot\vec{r} - ct = \phi_0 = \text{const}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{r} - \vec{n}\cdot\vec{n}\, ct = \vec{n}\cdot\vec{n}\,\phi_0$$

$$\vec{n}\cdot\left[\vec{r} - \vec{n}(ct+\phi_0)\right] = 0$$

$$\vec{n}\cdot[\dots] = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n} \perp [\dots]$$

Orte gleicher Phase in Ebene $\perp \vec{n}$ mit Punkt $r_0(t) = n(ct+\phi_0)$, der sich mit c in $\vec{n}$-Richtung bewegt.

jetzt speziell elektr.magnet. Feld $\vec{E}, \vec{B}$ betrachten

ψ als Komponente von $\vec{E}$ oder $\vec{B}$-Feld

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= E_i \vec{e}_i \\ \vec{B} &= B_i \vec{e}_i\end{aligned}\right| \quad i = 1,2,3$$

$$E_i(\vec{r},t) = f_i(\vec{n}_{iE}\cdot\vec{r} - ct)$$

$$B_i(\vec{r},t) = g_i(\vec{n}_{iB}\cdot\vec{r} - ct)$$

insgesamt 6 Fkt / Felder $\to f_i, g_i \quad (i=1,2,3)$

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0\, f(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct) \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{B}_0\, f(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)\end{aligned}\right\}$$

gleiche Orts-Zeitabh. $f(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)$ gleiche Ausbreitungsrichtung annehmen
mit Amplituden $\vec{E}_0, \vec{B}_0$ verschieden.

Ziel Bedingungen für $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{n}$ aus MG

1) $\operatorname{div}\vec{E} = 0$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \nabla\cdot\vec{E}_0 f(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)$$

$\vec{E}_0 = \text{Konst}$

$$= \partial_i E_{0i} f(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)$$

$$= n_i E_{0i} f'(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)$$

$$= \vec{n}\cdot\vec{E}_0 \, f'(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)$$

$$\overset{!}{=}$$

$\doteq$

$f(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct) \neq \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}\cdot\vec{E}_0 = 0$

$\Rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{n} \quad \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{n}$

2) $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

analog zu 1) $\Rightarrow \dots \Rightarrow \quad \vec{n}\cdot\vec{B}_0 = 0$

$\Rightarrow \vec{B}_0 \perp \vec{n} \quad \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{n}$

3) $\operatorname{rot}\vec{E} = -\partial_t \vec{B}$

$\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 \, f(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)$

bemerke $\operatorname{rot}(\phi\vec{V}) = (\nabla\phi)\times\vec{V} + \phi \operatorname{rot}\vec{V}$

und $\vec{V} = \vec{E}_0 = \text{const}$, $\phi = f$

$\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{E} = \left[\nabla f(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)\right] \times \vec{E}_0$

$\nabla f(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct) = \vec{n}\, f'(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)$

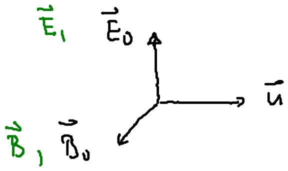
$\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{E} = n \times \vec{E}_0 \, f'(\vec{n}\cdot\vec{r}-\omega t)$

$\partial_t \vec{B} = -c\vec{B}_0 \, f'(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)$

$\Rightarrow \quad \vec{n} \times \vec{E}_0 = c\,\vec{B}_0$

$\Rightarrow \quad \vec{E}_0$ und $\vec{B}_0 \perp \vec{n}$ $\quad \underline{\underline{\&}} \quad \vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$

$\Rightarrow \quad \{\vec{n}, \vec{E}_0, \vec{B}_0\}$ rechts-orientiertes Dreibein



$\{n, \vec{E}, \vec{B}\}$!

4) $\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} \quad \xrightarrow[\text{analog zu 3)}]{} \quad \vec{n}\times\vec{B}_0 = -\frac{1}{c}\vec{E}_0$

keine weitere Bed.

c) monochrom. ebene Wellen

monochromatisch: Form der Welle sinusoidal + propagierend

$\vec{E}(\vec{r},t) \sim \cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_0)$

$\vec{B}(\vec{r},t) \sim \cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_0)$

Argument (....) dimensionslos

$k(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct) = (k\vec{n})\cdot\vec{r} - kct$

$= \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$

$\Rightarrow \vec{k} = k\vec{n}$: Wellenzahlvektor

$\omega = ck$: Kreisfrequenz

t momentan fest:

→ $\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} + \tilde{\phi}_0)$ $\Rightarrow$ periodisch in $\vec{k}$-Richtung

→ Periodizität via Wellenlänge λ

→ $|\vec{k}|\,\lambda = 2\pi$ $\Rightarrow$ $k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\vec{r}$ momentan fest:

→ $\cos(-\omega t + \tilde{\phi}_0)$ $\Rightarrow$ periodisch in t

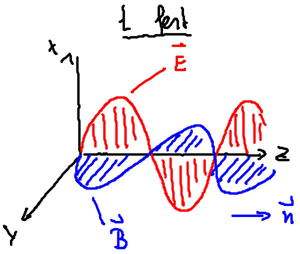
→ Periodizität via Schwingdauer T

nur ein fester T: monochromatisch

$$\omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Frequenz $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{ck}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}$

$$\lambda f = c$$



komplexe Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{B}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \end{aligned}\right\} (*)$$

physikal. Felder reell / meßbar

d.h. von (*) nur Realteil betrachten

allgemein:
$$\vec{n} \times \vec{E}_0 = c\,\vec{B}_0$$
$$\vec{n} \times \vec{B}_0 = -\frac{1}{c}\vec{E}_0$$

$$\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}| = \vec{k}/k$$

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{ck}\,\vec{k}\times\vec{E}_0 = \frac{1}{\omega}\,\vec{k}\times\vec{E}_0$$

$$\vec{E}_0 = -\frac{c}{k}\,\vec{k}\times\vec{B}_0 = -\frac{c^2}{\omega}\,\vec{k}\times\vec{B}_0$$

i. Allg. $\vec{E}_0, \vec{B}_0$ auch komplex möglich
$\vec{k}, \vec{n}$ bleiben reell

Minus

komplexes Quadrat

$$\vec{E}_0^{\,2} = |\vec{E}_0|^2 \, e^{-2i\alpha} \quad , \quad \vec{E}_0 = |\vec{E}_0| \cdot e^{-i\alpha}$$

Amplitudenvektor:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}_0 \, e^{i\alpha} \quad , \quad \alpha : \; -\pi < 2\alpha < \pi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\mathcal{E}}^{\,2} = e^{2i\alpha}\,\vec{E}_0^{\,2} = e^{2i\alpha}\,e^{-2i\alpha}\,|\vec{E}_0|^2 \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}^{\,2} \text{ reell}$$

$\mathcal{E}$ i. Allg. komplex

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}_1 + i\,\vec{E}_2 \quad \text{mit } \vec{E}_1, \vec{E}_2 \text{ reell}$$

$$\vec{\mathcal{E}}^{\,2} = \vec{E}_1^{\,2} + \vec{E}_2^{\,2} - 2i\,\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2$$

$, \overset{!}{=}$ reell

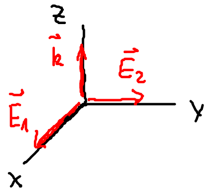
$$\Rightarrow \vec E_1 \cdot \vec E_2 = 0$$

$$\vec E_1 \perp \vec E_2$$

$$\vec E_0 \perp \vec n \text{ bzw } \vec k \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{E}} \perp \vec n \text{ bzw. } \vec k$$

rechtshändige Basis wählen $(\vec e_x, \vec e_y, \vec e_z)$

$$\vec k = k\, \vec e_z$$
$$\vec E_1 = |\vec E_1|\, \vec e_x$$
$$\vec E_2 = |\vec E_2|\, \vec e_y$$



einsetzen:

$$\vec E_0 = \vec{\mathcal{E}}\, e^{-i\alpha} = (\vec E_1 + i \vec E_2)\, e^{-i\alpha}$$

in $\quad E(\vec r, t) = \vec E_0\, e^{i(\vec k \cdot \vec r - \omega t)}$

einsetzen + Realteil bilden

$$\mathrm{Re}\left[\vec E(\vec r, t)\right] = \mathrm{Re}\left[(\vec E_1 + i \vec E_2)\, e^{i(kz - \omega t - \alpha)}\right]$$
$$= \vec E_1 \cos(kz - \omega t - \alpha) + \vec E_2 \sin(kz - \omega t - \alpha)$$

Verschieben von Zeitnullpunkt $\quad \omega(t + \frac{\alpha}{\omega}) \to \omega \tilde t \to \omega t$

$$E_x(z,t) = |\vec E_1| \cos(kz - \omega t)$$
$$E_y(z,t) = \pm |\vec E_2| \sin(kz - \omega t)$$

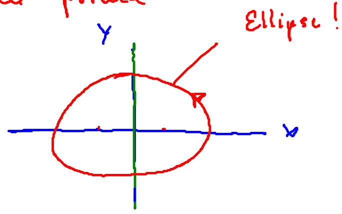
$$\curvearrowright \quad \frac{E_x(z,t)}{|\vec E_1|} = \cos(kz - \omega t)$$
$$\frac{E_y(z,t)}{|\vec E_2|} = \sin(kz - \omega t)$$

quadrieren:

$$\left(\frac{E_x(z,t)}{|\vec E_1|}\right)^2 + \left(\frac{E_y(z,t)}{|\vec E_2|}\right)^2 = \cos^2(\dots) + \sin^2(\dots) = 1$$

$\Rightarrow$ Feldvektor $\mathrm{Re}\, \vec E(\vec r, t)$ beschreibt elliptische Spirale

- Propagation / Fortbewegung in z Richtung
- Projektion auf x, y Ebene
- Halbachsen $|\vec E_1|$ und $|\vec E_2|$
- nach einem Umlauf ist $\mathrm{Re}\, \vec E(\vec r, t)$ um Wellenlänge λ in z-Richtung propagiert.



H.A.

analoges gilt für $\mathrm{Re}\, \vec B(\vec r, t)$

analoges gilt für $\mathrm{Re}\,\vec{B}(\vec{r},t)$ /

nur berücksichtigen, dass um Phase π vor oder nachläuft wg $\vec{E} \perp \vec{B}$.

allgemeinster Fall monochromatische ebene Welle, die elliptisch polarisiert

Spezialfälle 1) $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$ → Ellipse → Kreis

zirkular polarisiert → links / rechts zirkular

2) $|\vec{E}_1| = 0$ oder $|\vec{E}_2| = 0$

linear polarisiert

d) Kugelwellen:

bisher nur eine Klasse von Lösungen der Wellengleichung konstruiert.

ebene Welle mit fester Propagationsrichtung $\vec{n} = \vec{k}/k$

jetzt Kugelwellen

Lösung der WG in Kugelkoordinaten

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\,\partial_\theta\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right]$$

Annahme: kugelsymmetrische Lösungen.

$$\Psi(\vec{r},t) = \Psi(|\vec{r}|,t) = \Psi(r,t)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \longrightarrow \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\Psi(r,t) = 0 \qquad \text{WG}$$

$$\begin{aligned}
\partial_r^2(r\Psi) &= \partial_r\left(\partial_r r\Psi\right) = \partial_r\left(\partial_r\Psi + r\,\partial_r\Psi\right) \\
&= \partial_r\Psi + \partial_r r\,\partial_r\Psi \\
&= \partial_r\Psi + \partial_r\Psi + r\,\partial_r^2\Psi \\
&= 2\,\partial_r\Psi + r\,\partial_r^2\Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\partial_r\left(r^2\partial_r\Psi\right) &= \frac{1}{r}\,2r\,\partial_r\Psi + \frac{1}{r}\,r^2\partial_r^2\Psi \\
&= 2\,\partial_r\Psi + r\,\partial_r^2\Psi \\
&= \partial_r^2(r\Psi)
\end{aligned}$$

neues Feld einführen:

$$S(r,t) = r\,\Psi(r,t)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t^2\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{r}\partial_t^2(r\Psi)$$

in Wellengleichung einsetzen:

in Wellengleichung einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \left(\partial_r^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) S(r,t) = 0$$

wiederum "eindimensionale" homogene WG
mit r = radiale Koordinate

$$S(r,t) = S_+(kr - \omega t) + S_-(kr + \omega t)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{als Bedingung für Lösungen} \quad (\omega = kc)$$

für ursprüngl. Feld $\Psi(\vec{r},t)$

$$\Psi(r,t) = \frac{1}{r}\left[S_+(kr - \omega t) + S_-(kr + \omega t)\right]$$

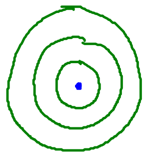
Phase $\phi_\pm = kr \pm \omega t$

nur von $|\vec{r}|$ abhängig

t_0 festhalten:

Punkte gleicher Phase $\quad \phi_0 = kr + \omega t_0$

$$\Rightarrow \quad kr = \phi_0 - \omega t_0 = \text{fest}$$



Punkte mit gleichem Ψ haben gleiches r,
gleichen Abstand zu Ursprung, Kugelfläche
mit Radius r

Amplitude $\Psi(r,t) = \frac{1}{r} \times$ ("ebene" Welle, ohne Abfall oszilliert)

$\Rightarrow$ Abfall von $\Psi(r,t)$ mit $\frac{1}{r}$ bei Kugelwelle

$$\Psi_\pm(r,t) = \frac{A_\pm}{r}\, e^{i(kr \mp \omega t)}$$

definiert Kugelwelle

$$kr \mp \omega t = \phi_0 = \text{const}$$

$$r = \pm \frac{1}{k}\omega t + \phi_0$$

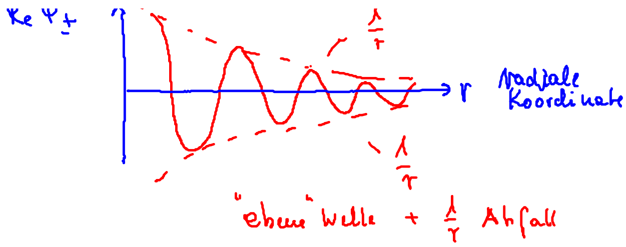
$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{\omega}{k} = c \qquad \text{(Phasengeschw. der Kugelwelle)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} r(t) = r_0 - ct & \text{einlaufende} \\ r(t) = r_0 + ct & \text{auslaufende} \end{array}\right\} \text{Kugelwelle}$$

Punkte gleicher Phase: (feste Zeit)

$$k \cdot \Delta r = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$



für $\vec{E}$ und $\vec{B}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, \frac{1}{r} \, e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \, \frac{1}{r} \, e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Nachrechnen}]{} \left.\begin{array}{l} \vec{E} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{B} \cdot \vec{r} = 0 \end{array}\right\} \text{ transversale Wellen}$$

e) allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung via Fourier Transformation

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0$$

zweite Ordnung in t $\longrightarrow$ 2 Anfangsbedingungen

Anfangszeitpunkt t_0 $\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \Psi(\vec{r}, t_0) \\ \partial_t \Psi(\vec{r}, t_0) \end{array}\right\}$ sind zu spezifizieren!

homogene Wellengleichung zeittranslationsinvariant $t \longrightarrow t' = t + \tau$

$\Rightarrow$ $t_0 \longrightarrow 0$ wählbar, (falls $\vec{j} = 0 = \rho$)

$$\Psi(\vec{r}, t_0 = 0) = \Psi_0(\vec{r})$$

$$\partial_t \Psi(\vec{r}, t_0 = 0) = \Psi_D(\vec{r})$$

Fourier Transformierte von $\Psi(\vec{r}, t)$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; \hat{\Psi}(\vec{k}, \omega) \; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

in homogene WG einsetzen. $\longleftarrow$