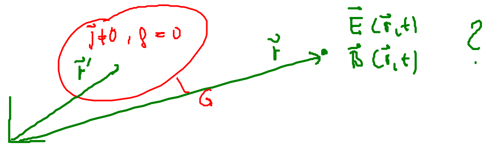
5.5. Lösungen der inhomogenen Wellengleichung

Nun allg. Ansatz:

$$\left.\begin{array}{l} \rho(\vec r,t) \neq 0 \\ \vec j(\vec r,t) \neq 0 \end{array}\right\} \text{ in lokalisierten Gebiet } G \in \mathbb{R}^3$$



$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 = \Box \ , & \vec E(\vec r,t) = -\partial_t \vec A(\vec r,t) - \nabla\varphi(\vec r,t) \\ & \vec B(\vec r,t) = \nabla \times \vec A(\vec r,t) \\ \Box\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec r,t) & \\ \Box\vec A = -\mu_0 \vec j(\vec r,t) & \Big\} \ \underline{\text{äquiv. zu MG}} \end{array}}$$

Ziel: Lösung beider Gleichungen für gegebene $\rho(\vec r,t)$ und $\vec j(\vec r,t)$

formal Potentialgleichungen haben Struktur einer inhomogenen Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\psi(\vec r,t) = f(\vec r,t) \qquad (*)$$

$\psi(\vec r,t)$ entweder für $\varphi(\vec r,t)$ oder Komponente von $\vec A(\vec r,t)$

$f(\vec r,t)$ entweder $-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec r,t)$ oder Komponente von $-\mu_0\vec j(\vec r,t)$

grundlegendes: $\psi(\vec r,t)$ überall im Raum definiert
$\psi(\vec r,t) \longrightarrow 0$ für $|\vec r| \to \infty$

Fourier Transf. von $(*)$

$$\psi(\vec r,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k \int d\omega\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}\,\hat\psi(\vec k,\omega)$$

$$f(\vec r,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k \int d\omega\, e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}\,\hat f(\vec k,\omega)$$

in $(*)$ einsetzen:

$$\int d^3k \int d\omega \left[\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat\psi(k,\omega) - \hat f(k,\omega)\right] e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)} = 0$$

$\Rightarrow \ [\,\ldots\,] = 0$

$$\Rightarrow \ \boxed{\hat\psi(\vec k,\omega) = \frac{\hat f(\vec k,\omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} \quad \longleftarrow$$

Lösung im Fourier Raum $(\vec k,\omega)$ $\longrightarrow$ algebraisches Problem

$f(\vec r,t)$ vorgegeben $\longrightarrow$ $\hat f(\vec k,\omega)$ $\longrightarrow$ rhs von $\Box$ bekannt

$\hat\psi(\vec k,\omega)$ per F.T $\psi(\vec r,t)$

explizit:

$$\psi(\vec r,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k \int d\omega\, \frac{e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3r' \int dt'\, e^{-i(\vec k\cdot\vec r'-\omega t')} f(\vec r',t')}_{\hat f(\vec k,\omega) \text{ dargestellt durch inverse FT}}$$

$$\cdot \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3r'\int dt' \underbrace{\int d^3k\int d\omega \,\frac{e^{i[\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')-\omega(t-t')]}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}}_{\text{nach Integration Fkt von } \vec{r}-\vec{r}\,' \text{ bzw } t-t'} f(\vec{r}\,',t')$$

$$\Psi(\vec{r},t) = \int d^3r'\int dt'\; G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')\, f(\vec{r}\,',t')$$

$G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')$ sieht aus wie Greensfunktion (vgl. Laplace-Gleichung) aber hier für Wellengleichung

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') := \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int d\omega\,\frac{e^{+i[\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')-\omega(t-t')]}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}} \qquad (*)$$

Erfüllt $G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')$ Grundgleichung für Greensfunktion, d.h.

$$\Box\, G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') = \left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')$$

Nachweis (elementar)

$$\Box\, G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int d\omega\,\frac{\Box\, e^{i[\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')-\omega(t-t')]}}{k^2-\omega^2/c^2}$$

$$= -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')$$

wobei $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = +\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\; e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}$, $\delta(t-t') = +\frac{1}{2\pi}\int d\omega\; e^{-i\omega(t-t')}$

$\square$

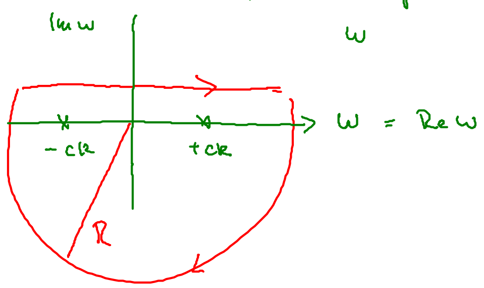
Fourier Transformierte der Greensfunktion

$$\hat{G}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{1}{k^2-\omega^2/c^2}$$

Problemstellung: Berechnung von $G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')$ aus $\hat{G}(\vec{k},\omega)$

Nenner von $G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')$ enthält Singularitäten, $\frac{1}{k^2-\omega^2/c^2} \to \frac{1}{0}$

$\to \quad \omega = \pm ck \qquad$ Pole 2. Ordnung



Anwendung von Residuensatz $\to$ $G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')$ berechenbar.

Ergebnis für Greensfunktion der Wellengleichung

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\!\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right) & \text{für } t>t' \\ 0 & t<t' \end{cases}$$

Bemerkungen:

Bemerkungen:

1) GF räumlich isotrop, d.h. $|\vec{r}-\vec{r}'|$

retardierte Greens funktion

2) GF erfüllt Kausalität

$$G(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = 0 \quad \text{für } t < t'$$

$$G(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = 0 \quad \text{für } t < t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$$

Retardierung: Wirkung ist gegenüber Ursache um

$$\Delta t = t - t' = \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$$

Laufzeit von Signal, das sich mit Geschwindigkeit c von Ort der "Ursache" $\vec{r}'$ zur Zeit t' zum Ort der Wirkung $\vec{r}$ (Aufpunkt wo $\psi(\vec{r},t)$ gemessen wird) bewegt und dort zur Zeit $t = t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ ankommt.

Greensfunktion in Lösung der Wellengleichung

$$\psi(\vec{r},t) = \int d^3r' \int dt' \; G(\vec{r}-\vec{r}', t-t') \, f(\vec{r}', t')$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt' \; \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) \frac{f(\vec{r}', t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\boxed{\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \; \frac{f\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

obiges gilt für inhomogene / partikuläre Lösung

freie Lösung noch additiv dazu.

allgemeine Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen (äquivalent zu Maxwell Gl.)

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\varphi_0(\vec{k}) \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + c.c.\right]$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \; \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\vec{A}_0(\vec{k}) \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + c.c\right]$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \; \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

mit $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$

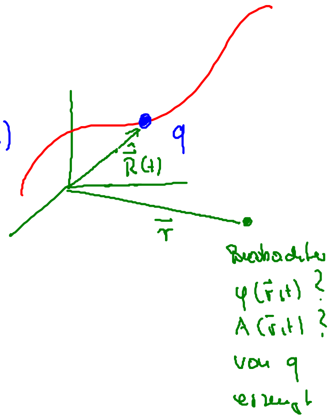
$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \partial_t \vec{A}$

Magnet Feld $\vec B(\vec r,t)$
Elektrisches Feld $\vec E(\vec r,t)$ $\Big\}$ im gesamten Raum für $t > t'$ bestimmbar

Noch zu zeigen: Lorentz Eichbedingung erfüllt von obiger Lösung
→ ist erfüllt (H.A.)

5.6. Lienard-Wiechert-Potentiale

Spezialfall: punktförmige Ladung q,
bewegt sich entlang der Bahn $\hat{\vec R}(t)$
mit Geschwindigkeit $\vec v(t)$



Ladungsdichte

$$\rho(\vec r,t) = q\,\delta(\vec r - \hat{\vec R}(t))$$

Stromdichte

$$\vec j(\vec r,t) = q\,\vec v(t)\cdot\delta(\vec r - \hat{\vec R}(t))$$

Ladungserhaltung: $\partial_t \rho(\vec r,t) = -\nabla\cdot\vec j(\vec r,t)$ erfüllt (HA)

partik. Lösung der Wellengleichung

$$\varphi(\vec r,t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\; G(\vec r-\vec r', t-t')\,\rho(\vec r', t')$$

G und δ einsetzen

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\; \delta\left(t-t'-\frac{|\vec r-\vec r'|}{c}\right)\frac{\delta(\vec r'-\hat{\vec R}(t'))}{|\vec r-\vec r'|}$$

$\vec r'$ Integr. ausführen

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\; \frac{1}{|\vec r-\hat{\vec R}(t')|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\vec r-\hat{\vec R}(t')|}{c}\right)$$

Abkürzungen:

$$\vec R(t') := \vec r - \hat{\vec R}(t')$$

$$R(t') = |\vec R(t')| = |\vec r - \hat{\vec R}(t')|$$

$$\xi := t'-t+\frac{|\vec r-\hat{\vec R}(t')|}{c} = t'-t+\frac{1}{c}R(t')$$

Neg. Argument von δ-Fkt, die von Greensfkt herrührt.

$$\frac{d\xi}{dt'} = 1 + \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}R(t')$$

$$\frac{dR(t')}{dt'} = \frac{d}{dt'}|\vec r-\hat{\vec R}(t')|$$

$$= -\vec v(t')\cdot\nabla|\vec r-\hat{\vec R}(t')|$$

$$= -\vec v(t')\cdot\frac{\vec r-\hat{\vec R}(t')}{|\vec r-\hat{\vec R}(t')|}$$

$$= -\vec v(t')\cdot\frac{\vec R(t')}{R(t')}$$

$$\frac{d\xi}{dt'} = 1 - \frac{1}{c}\vec v(t')\cdot\vec R(t')$$

$$\frac{d\xi}{dt'} = 1 - \frac{1}{c}\vec{v}(t')\cdot\frac{\vec{R}(t')}{R(t')}$$

$$\frac{dt'}{|\vec{r}-\vec{R}(t')|} = \frac{dt'}{R(t')} = \frac{d\xi}{R(t') - \frac{1}{c}v(t')\cdot\vec{R}(t')}$$

alles in $\varphi(\vec{r},t)$ einsetzen:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\vec{r},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \, \frac{\delta(\xi)}{R(t') - \frac{1}{c}\vec{v}(t')\vec{R}(t')} \\ &=: \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{R(t') - \frac{1}{c}\vec{v}(t')\cdot\vec{R}(t')}\right]_{ret}\end{aligned}} \qquad (1)$$

index ret bedeutet, dass in eckige Klammer [ ] Auswertung für $\xi = 0$, d.h.

$$t' = t - \frac{R(t')}{c}$$

vorgenommen wird.

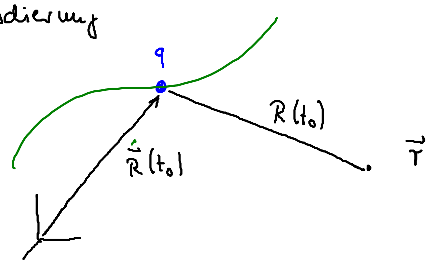
völlig analoge Rechnung für Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$ ergibt

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{q\vec{v}(t')}{R(t') - \frac{1}{c}\vec{v}(t')\cdot\vec{R}(t')}\right]_{ret.}} \qquad (2)$$

$\varphi(\vec{r},t)$ und $A(\vec{r},t)$ bestimmt $\longrightarrow$ $E(\vec{r},t)$, $B(\vec{r},t)$ bestimmbar

Gleichungen (1) + (2) heißen Lienard-Wiechert Potentiale

Problem: Retardierung



q zur Zeit t_0 in $\vec{R}(t_0)$, erzeugt Potentiale $\Rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$

müssen propagieren (von $\vec{R}(t_0)$ nach $\vec{r}$ ausbreiten)

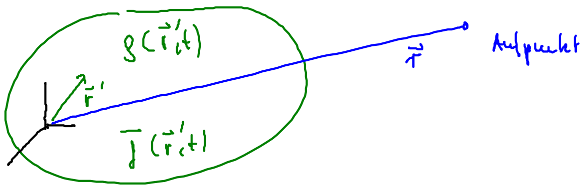
Effekt von q zur Zeit t_0 erst später in $\vec{r}$ spürbar

$$t_L = t_0 + \frac{R(t_0)}{c}$$

Laufzeit abhängig von Distanz zw Ladung, die zu Zeit t_0 in $\vec{R}(t_0)$ ist und Aufpunkt $\vec{r}$, wo gemessen wird

5.7 Dynamische Multipol-Entwicklung

allgemeine Lösung der MG bekannt $\rightarrow$ siehe Ende 5.5
exakt, aber unhandlich.



lokalisierte Ladungs + Stromverteilung in Ballon der Größe R

$\rho, \vec j$ nur Ballon um $R \ll |\vec r|$

Statische Fall

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|} \qquad \vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\vec j(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

$\rho(\vec r\,') = 0$ für $R > |\vec r\,'|$ $\qquad$ $\vec j(\vec r\,') = 0$ für $R > |\vec r\,'|$

$|\vec r| \gg R$

elektr. Dipolmoment $\vec p = \int d^3r' \, \vec r\,' \rho(\vec r\,')$

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec p \cdot \vec r}{r^3} + \dots \qquad \vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec m \times \vec r}{r^3} + \dots$$

q: elektr. Monopolmoment / Ladung

$q = \int d^3r' \, \rho(\vec r\,')$

$\vec m$: magnet. Dipolmoment

$\vec m = \frac{1}{2} \int d^3r' \, \vec r\,' \times \vec j(\vec r\,')$

dynamische Verallgemeinerung:

$$\varphi(\vec r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho\left(\vec r\,', t - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

$$\vec A(\vec r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\vec j\left(\vec r\,', t - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

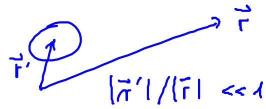
Lorentz-Eichung

$$\nabla \cdot \vec A(\vec r, t) + \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi(\vec r, t) = 0$$

dyn. Multipol-Entwicklung für $\vec A(\vec r, t)$ $\longrightarrow$ $\nabla \cdot \vec A(\vec r, t)$ berechnen

+ Zeitintegration $\longrightarrow$ $\varphi(\vec r, t)$

a) Vektorpotential $\vec A$



$|\vec r\,'| / |\vec r| \ll 1$

$$|\vec r - \vec r\,'| = r - \frac{1}{r} \vec r \cdot \vec r\,' + \dots$$

$$\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \vec r \cdot \vec r\,' + \dots$$

nur Mono + Dipol beiträge betrachten

in Stromdichte in $\vec A$-Formel einsetzen

$$\vec j = \vec j\left(\vec r\,', t - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}\right)$$

$$= \vec j\left(\vec r\,', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{cr} \vec r \cdot \vec r\,' + \dots\right)$$

Taylor Entwicklung von 2. Argument von $\vec j$ um retardierte Zeit $t - \frac{r}{c}$ bzgl. $\vec r = 0$

$$= \vec j\left(\vec r\,', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{cr} \vec r \cdot \vec r\,' \, \partial_t \vec j\left(\vec r\,', t - \frac{r}{c}\right) + \dots$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Korrekturterm zu } t-\frac{r}{c} \text{ für } \vec{r}\,' \neq 0}$

in $\vec{A}$-Formel einsetzen:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d^3r'\,\vec{j}\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)$$

$$+\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3}+\frac{1}{cr^2}\partial_t\right)\int d^3r'\,\vec{r}\cdot\vec{r}\,'\,\vec{j}\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)$$

$$+\ \ldots\ldots$$

$\vec{A}^{(0)}(\vec{r},t)+\vec{A}^{(1)}(\vec{r},t)+\ldots$

0. Ordnungsterm in $\vec{A}$-Entwicklung

$$\vec{p}(t) = \int d^3r'\,\vec{r}\,'\,\rho(\vec{r}\,',t)$$

$$\partial_t\,\vec{p}(t) = \int d^3r'\,\vec{r}\,'\,\partial_t\rho(\vec{r}\,',t)$$

$$\overset{KG}{=} -\int d^3r'\,\vec{r}\,'\,\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t)$$

$$\ldots\ \Rightarrow\ \dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \int d^3r'\,\vec{j}\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)$$

$$\Rightarrow\ \vec{A}^{(0)}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

1. Ordnungsterm in $\vec{A}$-Entwicklung

$$A_i^{(1)}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3}+\frac{1}{cr^2}\partial_t\right)x_j\,M_{jk}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$$M_{jk}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \int d^3r'\,x_j'\,j_k\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

mit $(\vec{m}\times\vec{r})_i = \varepsilon_{ijk}\,m_j\,x_k = \frac{1}{2}x_l M_{li}-\frac{1}{2}x_l M_{il}$

$$\vec{m}(t) = \frac{1}{2}\int d^3r'\,\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,',t)$$

verallgem. / zeitabhängiges magnet. Moment

$$M_{ik}(t) = -M_{ki}(t)+O(r'^2)$$

$$(\vec{m}(t)\times\vec{r})_i = x_k\,M_{ki}(t)$$

$$\Rightarrow\ \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\left(\frac{1}{r^3}+\frac{1}{cr^2}\partial_t\right)\left(\vec{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{r}\right)+\ldots\right.$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{1}{r^3}\vec{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{r}+\frac{1}{cr^2}\dot{\vec{m}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{r}\right]+\ldots$$

$$\nabla\times\left(\frac{1}{r}\vec{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) = \frac{1}{r^3}\vec{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{r}+\frac{1}{cr^2}\dot{\vec{m}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{r}$$

$$\Rightarrow\ \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\nabla\times\frac{\vec{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]+\ldots$$

$$\curvearrowright \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \nabla \times \vec{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] + \dots \quad (*)$$

$\vec{A}(\vec{r},t)$ als Kombination von $\dot{\vec{p}}$ und Term der $\vec{m}$ enthält

b) skalares Potential φ

$$\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\varphi = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \nabla\cdot(*)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\frac{1}{r}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$$= \partial_t\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\frac{1}{r}\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$$

$$\overset{!}{=} -\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi(\vec{r},t)$$

$$\curvearrowright \quad \varphi(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\left(\frac{1}{r}\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

willkürl. zeitunabh. Potential zunächst möglich

$\varphi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$, aber $q = q(t) \longrightarrow$ kein Beitrag von $q = \text{konst.}$

$$\curvearrowright \quad \varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{cr^2}\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] + \dots$$

nach Auswerten von $\nabla\cdot\left(\frac{1}{r}\vec{p}\right)$.

$\varphi(\vec{r},t)$ analog zu $\vec{A}(\vec{r},t)$: zwei Terme

- Term $\sim \vec{r}\cdot\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)$
- Term $\sim \frac{1}{cr^2}\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \leftarrow$ dynamischer Korrekturterm da $\vec{p}$ zeitabhängig

Insgesamt (dynam. Multipol-Entwicklung)

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_s(\vec{r},t) + \vec{A}_d(\vec{r},t) + \dots$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \varphi_s(\vec{r},t) + \varphi_d(\vec{r},t) + \dots$$

$\vec{A}_s$ und φ_s : Dipolbeiträge von stat. Multipolentwicklung, die aber Zeitargument tragen

$$\vec{A}_s(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\vec{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{r}$$

$$\varphi_s(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

statisch $\quad \vec{m} = \text{const}, \; \vec{p} = \text{const} \quad \longrightarrow$ dynamisch $\quad \vec{m}(t_{ret}) = \vec{m}\left(t-\frac{r}{c}\right), \; \vec{p}(t_{ret}) = \vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)$

$A_s, \varphi_s \sim \frac{1}{\cdot}$

statisch $\vec{m} = \text{const}$, $\vec{p} = \text{const}$ $\longrightarrow$ dynamisch $m(t_{ret}) = m(t - \frac{r}{c})$, $\vec{p}(t_{ret}) = \vec{p}(t - \frac{r}{c})$

$$A_s, \varphi_s \sim \frac{1}{r^2}$$

$\vec{A}_d$ und φ_d: dynamische Beiträge

$$\vec{A}_d(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{cr^2}\dot{\vec{m}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{r}\right]$$

$$\varphi_d(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c\,r^2}\,\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$\vec{A}_d$ und φ_d enthalten Zeitableitungen von Momenten.

$\vec{A}_d$ und $\varphi_d \sim \frac{1}{r}$

Konsequenz: $\vec{A}_d$ und φ_d dominieren für große $|\vec{r}|$

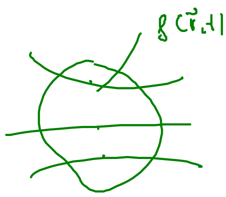
$$A(\vec{r},t) = \vec{A}_d(\vec{r},t) + \text{h.o.t}$$
$$\varphi(\vec{r},t) = \varphi_d(\vec{r},t) + \text{h.o.t.}$$

grundsätzlich verschieden vom statischen Fall.

5.8. Elektrodynamik in Materie

elektr. Ladung + Ströme im Vakuum

$\rho(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$ } vorgegeben



zusätzlich Materie vorhanden: → Vielteilchendynamik
→ Festkörperphysik

a) phänomenologisch:

homogenes Feld auf Materie → $\vec{F} = q\vec{E}$ → Ladungstrennung

→ induzierte Dipole, im Innern von Materie kompensiert

→ Polarisationsladungen an Oberfläche

→ zusätzl. Ladungsdichte ρ_P

→ $\varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$ → $\varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho + \rho_P$

inhomogenes Feld $\vec{E} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t)$

→ keine Kompensation der induzierten Dipole im Innern

→ $\rho_P = \rho_P(\vec{r},t)$

→ $\vec{j}_P = \vec{j}_P(\vec{r},t)$ (Polarisationsströme)

mit $\partial_t \rho_P + \nabla\cdot\vec{j}_P = 0$

gilt für rot $\vec{B}$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \longrightarrow$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_p \right) + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}$$

elektr. Polarisation: $\vec{P}(\vec{r},t)$

$$\partial_t \rho_p + \nabla \cdot \vec{j}_p = 0 \longrightarrow \begin{aligned} \vec{j}_p(\vec{r},t) &:= \partial_t \vec{P}(\vec{r},t) \\ \rho_p(\vec{r},t) &:= -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r},t) \end{aligned}$$

KG erfüllt

außerhalb Materie: $\vec{P}(\vec{r},t) = 0$, $\vec{j}_p = 0$ & $\rho_p = 0$ $\longleftarrow$

dielektrische Verschiebung

$$D(\vec{r},t) = \varepsilon_0 E(\vec{r},t) + \vec{P}(\vec{r},t)$$

$\curvearrowright$
$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$
$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \vec{j} + \partial_t \vec{D}$$

außerhalb Materie $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

inhomogenes $\vec{B}$-Feld $\vec{B}(\vec{r},t)$ von außen anlegen

$\exists$ Magnetisierungsströme mit Dichte

$$\vec{j}_m = \vec{j}_m(\vec{r},t) \longleftarrow$$

mikroskop. Ringströme

$$\nabla \cdot \vec{j}_m = 0$$

abändern der MG

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \vec{j} + \vec{j}_m + \partial_t \vec{D}$$

$\operatorname{div} \vec{j}_m = 0$, da $\underbrace{\partial_t \rho_m}_{=0} + \nabla \cdot \vec{j}_m = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j}_m = 0$

$\curvearrowright$
$$\vec{j}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r},t)$$

$\vec{M}(\vec{r},t)$: Magnetisierung

$\vec{M}(\vec{r},t) = 0$ außerhalb von Materie , $\vec{j}_m = 0$

insgesamt:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \vec{j} + \vec{j}_m + \partial_t \vec{D}$$
$$= \vec{j} + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \partial_t \vec{D}$$

$$\nabla \times \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right)} = \vec{j} + \partial_t \vec{D}$$

$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r},t) - \vec{M}(\vec{r},t)$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}(\vec{r},t) - \vec{M}(\vec{r},t)$$

auf Materie erweiterte Maxwell-Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \partial_t \vec{D} \end{array}\right\} \text{ modifiziert}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\partial_t \vec{B} \end{array}\right\} \text{ ungeändert}$$

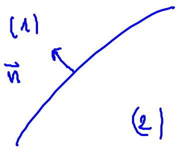
$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \end{array}\right\} \text{ analog ES}$$

4 Felder $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$

kein geschlossenes System $\rightarrow$ Materialgleichungen notwendig

b) Randbedingungen:

Grenzfläche Material 1 / Material 2

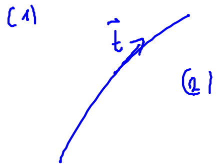


$\vec{n}$: Normale zu Grenzfläche, $|\vec{n}| = 1$

$$\vec{n}\cdot\left[\vec{B}^{(1)} - \vec{B}^{(2)}\right] = 0 \quad \rightarrow \text{ stetig}$$

$$\vec{n}\left[\vec{D}^{(1)} - \vec{D}^{(2)}\right] = \sigma$$

σ: mögliche Flächenladungsdichte



$\vec{t}$: tangential zu Grenzfläche, $|\vec{t}| = 1$

$$\vec{n}\times\left[\vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(2)}\right] = 0 \quad \rightarrow \text{ stetig}$$

$$\vec{n}\times\left[\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}\right] = \eta$$

η: mögliche Flächenstromdichte

Diskussion analog zu ES bzw. MS

d) Materialgleichungen:

Materialrelation $\vec{D}, \vec{H}$ mit $\vec{E}, \vec{B}$ verknüpfe
$\vec{P}, \vec{M}$ mit $\vec{E}, \vec{B}$ verknüpfe

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P}(\vec{r},t) = \vec{f}_P\left[\vec{E}(\vec{r}',t'), \vec{B}(\vec{r}',t')\right] \\ \vec{M}(\vec{r},t) = \vec{f}_M\left[\vec{E}(\vec{r}',t'), \vec{B}(\vec{r}',t')\right] \end{array}\right\} \quad t' \leq t$$

[..] "Funktionale"

$\vec{P}, \vec{M}$ i. Allg. abhängig von gesamter Historie von $\vec{E}(\vec{r}',t')$ und $\vec{B}(\vec{r}',t')$ an allen $\vec{r}'$ und Zeiten $t' \leq t$ (Kausalität)

$\rightarrow$ Festkörperphysik für Details

empirische Fakten:

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \vec{f}\left[\vec{E}(\vec{r}',t')\right]$$

$$\vec{P}(\vec{r},t) = f_P\left[\vec{E}(\vec{r}',t')\right]$$
$$\vec{M}(\vec{r},t) = f_M\left[\vec{B}(\vec{r}',t')\right]$$

elementarste Fall

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P} \sim \vec{E} \sim \vec{D} \\ \vec{M} \sim \vec{B} \sim \vec{H}\end{array}\right\} \text{linear, instantan}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$
$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$
$$= \varepsilon_0 (1+\chi_e) \vec{E}$$
$$= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

ε_r: relative DK

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$$
$$= \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \chi_m \vec{H}$$
$$\vec{B} = \mu_0 (1+\chi_m)\vec{H}$$
$$= \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

ε_r: relative Permeabilität

komplizierter Fall

$$\left[\vec{P}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_0 \int d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt' \; \chi_{ij}^{(e)}(\vec{r},\vec{r}',t,t')\, E_j(\vec{r}',t')$$
$$\left[\vec{M}(\vec{r},t)\right]_i = \int d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt' \; \chi_{ij}^{(m)}(\vec{r},\vec{r}',t,t')\, H_j(\vec{r}',t')$$

wobei $\left.\begin{array}{l}\vec{P} = 0 \text{ falls } \vec{E} = 0 \\ \vec{M} = 0 \text{ falls } \vec{H} = 0\end{array}\right\}$ keine spontane Polarisation / Magnetisierung

e) leitende Materialien:

freie Ladungsträger (Metall / Halbleiter / elektrolyt. Fluide etc.)

$\vec{E}$-Feld anlegen $\longrightarrow$ Strom $\vec{j}$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = f_\sigma\left[\vec{E}(\vec{r}',t')\right]$$

lineare Approximation

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt' \; \sigma(\vec{r},\vec{r}',t,t')\, \vec{E}(\vec{r}',t')$$

$$\vec{j} \sim \vec{E} \qquad \text{Ohmsches Gesetz}$$

(Weber et al: Ohmic law survives to the atomic scale
Science 335, 64 (2012))

$\sigma(\ldots)$ = spezif. elektr. Leitfähigkeit

$$\sigma(\vec r,\vec r\,',t,t') = \sigma\,\delta(\vec r-\vec r\,')\,\delta(t-t')$$

$$\Rightarrow \quad \vec j(\vec r,t) = \sigma\,\vec E(\vec r,t) \qquad \text{Ohmsches Gesetz}$$

bricht Zeitumkehrinvarianz $\rightarrow$ irreversible Prozeß

5.9 Wellenausbreitung in elektrisch leitenden Materialien

Leiter: homogen, isotrop ε_r, μ_r

Leitfähigkeit σ (skalar, konst) $\rightarrow \vec j = \sigma\cdot\vec E$

Maxwell Gleichungen

$\mathrm{div}\,\vec E = 0$ (ladungsfrei)

$\mathrm{div}\,\vec B = 0$ $\quad \vec j = \sigma\vec E$

$\mathrm{rot}\,\vec E = -\partial_t \vec B$

$\mathrm{rot}\,\vec B = \mu_r\mu_0\sigma\vec E + \frac{1}{u^2}\partial_t\vec E$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (universell)

Mediumeigenschaft

$$= \frac{c}{n}$$

$n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ = Brechungsindex

u = Geschwindigkeit von freien elektromagn. Wellen in Materie

wieso $\mathrm{div}\,\vec E = 0$?

anfänglich: $\rho(\vec r,t) = 0$ - Leiter ungeladen

zu zeigen $\rho(\vec r,t) = 0 \quad \forall t$

$$\mathrm{rot}\,\vec B = \mu_r\mu_0\sigma\vec E + \frac{1}{u^2}\partial_t\vec E$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec B = \mu_r\mu_0\sigma\,\mathrm{div}\,\vec E + \frac{1}{u^2}\mathrm{div}\,\partial_t\vec E \equiv 0$$

$$\partial_t\,\mathrm{div}\,\vec E = -\mu_r\mu_0\sigma u^2\,\mathrm{div}\,\vec E$$

(analog zu $\dot x = -ax$, $x = \mathrm{div}\,\vec E$)

Relaxationsgl. für $\mathrm{div}\,\vec E$

wäre: $\mathrm{div}\,\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\rho(\vec r,t) \neq 0$

$$\curvearrowright \quad \partial_t\,\rho(\vec r,t) = -\mu_0\mu_r\sigma u^2\,\rho(\vec r,t)$$

$$\curvearrowright \quad \rho(\vec r,t) = e^{-\mu_0\mu_r\sigma u^2 t}\,\rho(\vec r,t=0)$$

mit $\rho(\vec r,t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\vec r,t) = 0 \quad \forall t$

Differentialgleichung für Wellenausbreitung

$$\text{rot}\, \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

$$\text{rot rot}\, \vec{E} = \text{grad}\, (\underbrace{\text{div}\, \vec{E}}_{=0}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\text{rot rot}\, \vec{E} = -\partial_t\, \text{rot}\, \vec{B}$$

da: $\quad \text{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \mu_r \sigma \vec{E} + \frac{1}{u^2} \partial_t \vec{E}$

$$\text{rot rot}\, \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$
$$= -\partial_t \left[\mu_0 \mu_r \sigma \vec{E} + \frac{1}{u^2} \partial_t \vec{E} \right]$$

$$\wedge \quad \left[\nabla^2 - \frac{1}{u^2} \partial_t^2 - \mu_0 \mu_r \sigma \partial_t \right] \vec{E}(\vec{r},t) = 0$$

analog

$$\text{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \mu_r \sigma \vec{E} + \frac{1}{u^2} \partial_t \vec{E}$$

$$\text{rot rot}\, \vec{B} = \text{grad}\, (\underbrace{\text{div}\, \vec{B}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$$

$$\text{rot rot}\, \vec{B} = \mu_0 \mu_r \sigma\, \text{rot}\, \vec{E} + \frac{1}{u^2} \partial_t\, \text{rot}\, \vec{E}$$

$$\wedge \quad \left[\nabla^2 - \frac{1}{u^2} \partial_t^2 - \mu_0 \mu_r \sigma \partial_t \right] \vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

allgemein: $\quad \left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{u^2} \partial_t^2 \right) - \mu_0 \mu_r \sigma \partial_t \right] \vec{\Psi}(\vec{r},t) = 0$

mit $\vec{\Psi} = \vec{E}$ oder $\vec{B}$

Telegraphen-Gleichung

Bemerkungen:

1) $\sigma = 0$ nicht leitendes Material $\Rightarrow$ Wellengleichung analog zu Wellengleichungen im Vakuum

Unterschied $u \Longleftrightarrow c$

$$u^2 = c^2 / \varepsilon_r \mu_r$$

2) $\sigma \neq 0$ leitendes Material $\Rightarrow$ Zusatzterm, linear in Ψ, $\sim \partial_t \vec{\Psi}$

$\Rightarrow$ bricht Zeitumkehrinvarianz!

$\rightarrow$ dissipatives Verhalten

Lösung der Telegraphengleichung:

$$\vec{\Psi}(\vec{r},t) = \vec{\Psi}_0(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

Zeitabhängigkeit abseparieren

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{u^2} + i\omega \mu_0 \mu_r \sigma \right] \vec{\Psi}_0(\vec{r}) = 0$$

[...] für $\sigma \neq 0$ komplex

komplexe DK:

$$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r + i\,\frac{\mu_0\mu_r\sigma c^2}{\omega} \qquad , \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

$$= \varepsilon_r + i\,\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$$

$$= \bar{\varepsilon}_r(\omega)$$

$$\sigma \to 0: \quad \bar{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon_r$$

komplexe Wellengeschwindigkeit

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\bar{\varepsilon}_r\mu_0\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\bar{\varepsilon}_r\mu_r}}$$

$$\curvearrowright \quad \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{\bar{u}^2}\right)\psi(\vec{r},t) = 0$$

Lösung: $\psi(\vec{r},t) = \psi_0\, e^{i(\bar{\vec{k}}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

mit komplexem Wellenvektor

$$\bar{\vec{k}} = \frac{\omega}{\bar{u}}\,\vec{\varkappa}$$

$$\vec{\varkappa} = \frac{\bar{\vec{k}}}{\bar{k}} \qquad \text{Einheitsvektor in Propagationsrichtung}$$

Brechungsindex $n = \sqrt{\bar{\varepsilon}_r\mu_r}$

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0\, e^{-k_a z} \cdot e^{i(k_B z - \omega t)}$$

$$k_a = \frac{\omega}{c}\,\bar{n}$$

$$k_b = \frac{\omega}{c}\,\gamma \qquad \text{(reell)}$$

$$\gamma^2 = \bar{n}^2 - n^2 = \frac{1}{2}n^2\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}\right)^2}\right] \in \mathbb{R}$$

$\longleftarrow$