5.10. Ausbreitung elektromagnet. Wellen in linearen Medien

Spezialfall: lineare Medien
keine freien Ladungen bzw. Ströme, kein Leiter

MG:

$$\left.\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{D} &= 0 \\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0 \\ \nabla\times\vec{E} &= -\partial_t\vec{B} \\ \nabla\times H &= +\partial_t\vec{D} \end{aligned}\right\} \quad \rho = 0\,,\ \vec{j} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon\vec{E} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu}\vec{B} \end{aligned}\right\} \quad \text{linearer, homogener Medium}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r\,\varepsilon_0$$
$$\mu = \mu_r\,\mu_0$$

$$\curvearrowright \quad \boxed{\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{E} &= 0 \\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0 \\ \nabla\times\vec{E} &= -\partial_t\vec{B} \\ \nabla\times\vec{B} &= \mu\varepsilon\,\partial_t\vec{E} \end{aligned}}$$

Fast wie MG im Vakuum mit $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$
nur zu ersetzen:

$$\mu_0\,\varepsilon_0 \longrightarrow \mu\varepsilon = \mu_r\,\mu_0\,\varepsilon_r\,\varepsilon_0$$

em Wellen:

Propagationsgeschwindigkeit $\quad v = \frac{c}{n}$

n : Brechungsindex $\quad n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\,\mu_0}}$

meist Materialien haben $\quad \mu \simeq \mu_0 \quad$ (exp. Befund)

$$\Rightarrow \quad n \simeq \sqrt{\varepsilon_r}$$

ε_r meist > 1

$$\Rightarrow \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} < c$$

Licht langsamer propagierend in Medium im Vergleich zu Vakuum

Energiedichte $\quad w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon\,\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu}\vec{B}^2\right)$

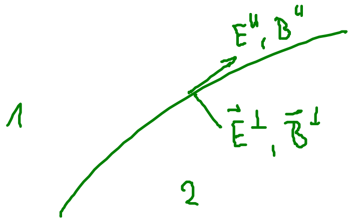
Poynting Vektor $\quad \vec{S} = \frac{1}{\ }\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$

Poynting Vektor $\vec{S} = \frac{1}{\mu}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$

Monochromat. Welle: / Frequenz-Wellenzahl-Relation

$$\omega = kv = k\cdot\frac{c}{n}$$

Frage: Was passiert bei Durchgang von ein Welle von Medium 1 $\longrightarrow$ Medium 2

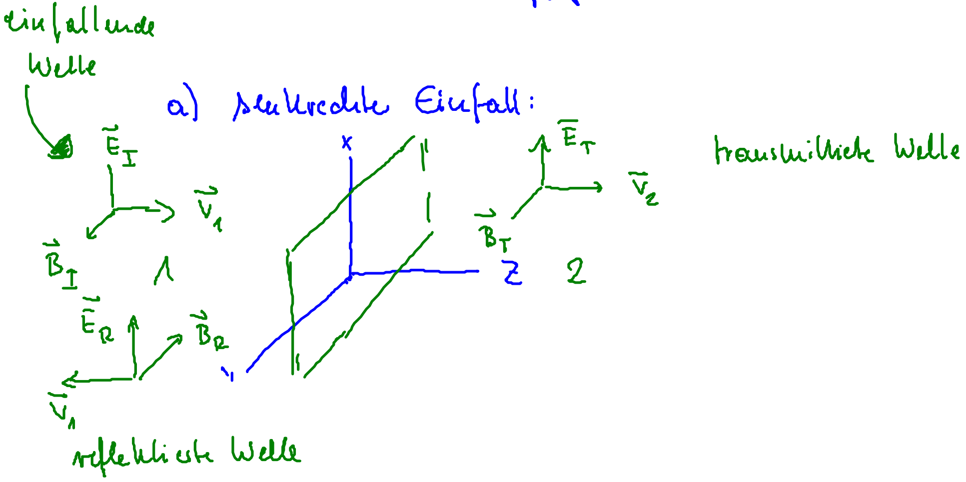


Randbed. an Grenzfläche

$$\varepsilon_1 E_1^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp} \qquad \text{normal}$$
$$\vec{E}_1^{\parallel} = \vec{E}_2^{\parallel} \qquad \text{tangential}$$
$$B_1^{\perp} = B_2^{\perp} \qquad \text{normal}$$
$$\frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2^{\parallel} \qquad \text{tangential}$$

Verknüpfung von $\vec{E}, \vec{B}$ Feldern in Medium 1 und 2

a) senkrechte Einfall:



einfallende Welle:

$$\vec{E}_I(z,t) = E_{0I}\, e^{i(k_1 z - \omega t)}\, \vec{e}_x$$
$$\vec{B}_I(z,t) = \frac{1}{v_1} E_{0I}\, e^{i(k_1 z - \omega t)}\, \vec{e}_y$$
$$\nabla\times\vec{E} = -\partial_t \vec{B} \Rightarrow \frac{k_1}{\omega} = \frac{1}{v_1}$$

reflektierte Welle:

$$\vec{E}_R(z,t) = E_{0R}\, e^{i(-k_1 z - \omega t)}\, \vec{e}_x$$
$$\vec{B}_R(z,t) = -\frac{1}{v_1} E_{0R}\, e^{i(-k_1 z - \omega t)}\, \vec{e}_y$$

transmittierte Welle:

$$\vec{E}_T(z,t) = \vec{E}_{0T}\, e^{i(k_2 z - \omega t)}\, \vec{e}_x$$
$$\vec{B}_T(z,t) = \frac{1}{v_2} E_{0T}\, e^{i(k_2 z - \omega t)}\, \vec{e}_y$$

betrachte Randbed / Grenzbed bei $z=0$

einlaufende Felder in Medium 1

$$\vec{E}_I + \vec{E}_R \quad , \quad \vec{B}_I + \vec{B}_R$$

müssen via RB gleich Felder in Medium 2 sein,
d.h. $\vec{E}_T$ bzw $\vec{B}_T$

hier nur parallele Komponente relevant.

$$\vec{E}_1^{\parallel} \overset{!}{=} \vec{E}_2^{\parallel} \quad \Rightarrow \quad E_{0I} + E_{0R} = E_{0T}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^{\parallel} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{1}{v_1} E_{0I} - \frac{1}{v_1} E_{0R}\right) = \frac{1}{\mu_2} \frac{1}{v_2} E_{0T}$$

$$\Rightarrow \quad E_{0I} - E_{0R} = \beta E_{0T}$$

Brechungsindizes

$$\text{mit} \quad \beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{n_1}{n_2}$$

Amplitude der auslaufenden Welle als Fkt. der einlaufenden

$$E_{0R} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) E_{0I}$$

$$E_{0T} = \left(\frac{2}{1+\beta}\right) E_{0I}$$

$$\text{falls} \quad \mu \simeq \mu_0 \Rightarrow \beta = \frac{v_1}{v_2}$$

$$E_{0R} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} E_{0I}$$

$v_2 > v_1$ in Phase

$v_2 < v_1$ außer Phase

$$E_{0T} = \frac{2 v_2}{v_1 + v_2} E_{0I}$$

reelle Amplituden:

$$E_{0R} = \left|\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}\right| E_{0I} = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right| E_{0I}$$

$$E_{0T} = \left|\frac{2 v_2}{v_1 + v_2}\right| E_{0I} = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} E_{0I}$$

Intensität einer Welle: mittlere Leistung pro Flächeneinheit

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2$$

$$= |\langle \vec{S} \rangle|$$

mit $\langle \ldots \rangle$ = Mittelwert über eine Periode.

Verhältnis von Intensitäte

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \frac{E_{0R}^2}{E_{0I}^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

= Reflexionskoeffizient

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{E_{0T}^2}{E_{0I}^2}\,\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\,\frac{v_2}{v_1} = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2}$$

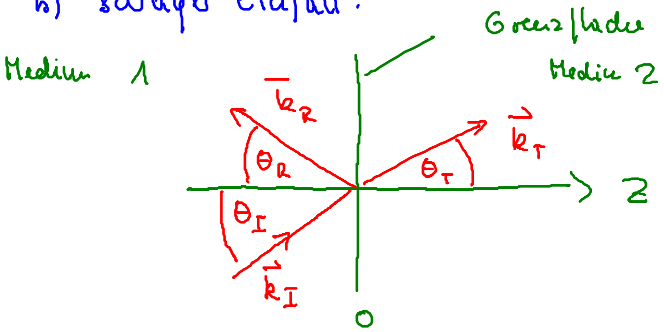
= Transmissionkoeffizient.

$$\Rightarrow \quad R + T = 1$$

eigentl. klar wg. Energieerhaltung.

Luft $n_1 = 1$, Glas $n_2 = 1.5$ $\Big\}$ $R = 0.04$, $T = 0.96$

b) schräger Einfall:



einfallend:
$$\vec{E}_I(\vec{r},t) = \vec{E}_{0I}\, e^{i(\vec{k}_I\cdot\vec{r} - \omega t)}$$
$$\vec{B}_I(\vec{r},t) = \frac{1}{v_1}\left(\vec{k}_I \times \vec{E}_I\right)$$

reflektiert:
$$\vec{E}_R(\vec{r},t) = \vec{E}_{0R}\, e^{i(\vec{k}_R\cdot\vec{r} - \omega t)}$$
$$\vec{B}_R(\vec{r},t) = \frac{1}{v_1}\left(\vec{k}_R \times \vec{E}_R\right)$$

transmittiert:
$$\vec{E}_T(\vec{r},t) = \vec{E}_{0T}\, e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r} - \omega t)}$$
$$\vec{B}_T(\vec{r},t) = \frac{1}{v_2}\left(\vec{k}_T \times \vec{E}_T\right)$$

ω gleich in Medien 1 und 2

$$\Rightarrow \quad \omega = k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2$$

$$\Rightarrow \quad \omega = k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2$$

$$k_I = k_R = \frac{v_1}{v_2} k_T = \frac{n_2}{n_1} k_T$$

analog zu vorher: Felder in Medium 1 $\vec{E}_I + \vec{E}_R$ bzw $\vec{B}_I + \vec{B}_R$ mittels Randbedingungen mit $\vec{E}_T$ und $\vec{B}_T$ verknüpfen

insgesamt:

$$(\dots)\, e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)} + (\dots)\, e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)} = (\dots)\, e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

RB für alle x,y und t gleich

$\Rightarrow$ Exponenten <u>für</u> $z = 0$ müssen alle gleich sein.

$$\Rightarrow \quad \vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r} \qquad \text{bei } z = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & (\vec{k}_I)_x \cdot x + (\vec{k}_I)_y \cdot y \\ &= (\vec{k}_R)_x \cdot x + (\vec{k}_R)_y \cdot y \\ &= (\vec{k}_T)_x \cdot x + (\vec{k}_T)_y \cdot y \end{aligned}$$

wenn erfüllbar:

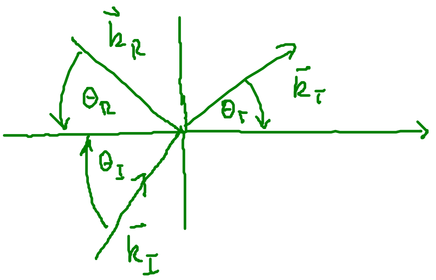
$$(\vec{k}_I)_y = (\vec{k}_R)_y = (\vec{k}_T)_y \qquad \text{für } x = 0$$
$$(\vec{k}_I)_x = (\vec{k}_R)_x = (\vec{k}_T)_x \qquad \text{für } y = 0$$

o.B.d.A. $\vec{k}_I$ in x,y Ebene legen

d.h. $(\vec{k}_I)_y = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{k}_R)_y = (\vec{k}_T)_y$

$\Rightarrow$ 1. Gesetz der Geometr. Optik:

einfallender, reflektierte und transmittierte Wellenvektor bilden zusammen eine Ebene (Einfallsebene)



$$(\vec{k}_I)_x = (\vec{k}_R)_x = (\vec{k}_T)_x$$
$$\Downarrow$$
$$k_I \sin\theta_I = k_R \sin\theta_R$$
$$= k_T \sin\theta_T$$

Einfallswinkel

Transmissionswinkel
= BRECHUNGSWINKEL

$\Rightarrow$ 2. Gesetz der Geometr. Optik (Reflexionsgesetz)

Einfallswinkel = Reflexionswinkel

$$\Theta_I = \Theta_R \qquad (k_I = -k_R)$$

$\Rightarrow$ 3. Gesetz der Geometr. Optik (Snellius Brechungsgesetz)

$$\frac{\sin\Theta_T}{\sin\Theta_I} = \frac{n_1}{n_2}$$

Berechnung von $\vec{E}_{0R}$ und $\vec{E}_{0T}$ komplizierter wg 4 RB

konzeptionell analog zu senkrechtem Einfall.

em Wellen: $\parallel$ zur Einfallsebene polarisiert

$\Rightarrow$ reflekt. und transmitt. Wellen gleich polarisiert

$\vdots$

$$E_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{0I}$$

$$E_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta} E_{0I}$$

Fresnel-Gleichungen

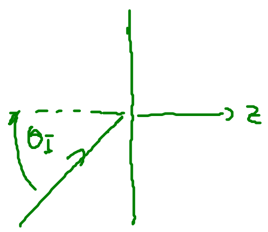
$$\alpha = \frac{\cos\Theta_T}{\cos\Theta_I}$$

$$\beta = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{v_1}{v_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \alpha(\Theta_I) = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\Theta_T}}{\cos\Theta_I} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\sin\Theta_I\right)^2}}{\cos\Theta_I}$$

$\Theta_I = 0^\circ \Rightarrow \alpha = 1$

$\Theta_I = 90^\circ \Rightarrow \alpha \to \infty$



$\Rightarrow$ Totalreflexion

für spezielle Winkel verschwindet E_{0R}, d.h.

$$\Rightarrow \quad E_{0R} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta$$

spezieller Winkel : θ_B

$$\Rightarrow \quad \sin^2 \theta_B = \frac{1-\beta^2}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \beta^2}$$

meist: $\underline{\mu_1 \simeq \mu_2}$ $\quad \Rightarrow \quad \beta \simeq \frac{n_2}{n_1}$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 \theta_B = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \tan \theta_B \simeq \frac{n_2}{n_1}$$

(Brewster-Winkel)