II Elementare relativistische Mechanik

Dienstag, 11. Januar 2011
14:33

Mechanik à la Newton:
keine Schranke für Geschwindigkeiten, $v \to \infty$ möglich
Lichtgeschwindigkeit c geht nirgendwo ein.

1. Lichtgeschwindigkeit / Fakten

Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum fundamentale Naturkonstante

$$c = 2{,}99793 \cdot 10^{8} \, \frac{m}{s} \simeq 300\,000 \; km/s$$

Erde / Mond in 1 Sekunde

an allen Orten $\vec{r}$
und zu jeder Zeit t } konstanter Wert

2. Probleme mit Newton Mechanik falls $v \lesssim \Theta(c)$

Inertialsystem: Bezugssystem, in dem $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ gilt

Newton Mechanik
Zwei Inertialsysteme Σ, Σ'
Σ' bewegt sich relativ zu Σ mit konstanter Geschwindigkeit
$\vec{v} = \text{const}$, wobei Ursprünge von Σ, Σ' zur Zeit $t = 0$

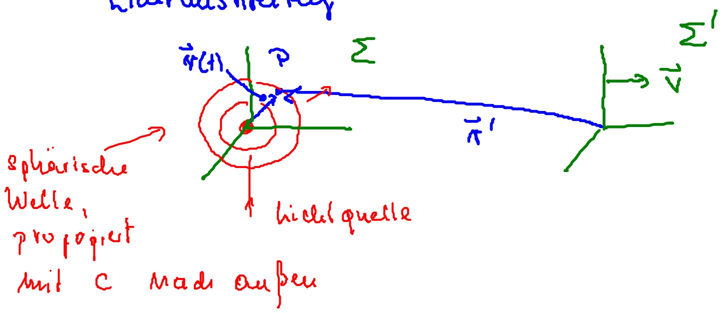
$\Sigma \to \Sigma'$ via Galilei Transformation in 1d ($\vec{v} = v\vec{e}_x$)

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

absolute Zeit

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}\,' + \vec{v}t \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{r}}\,' + \vec{v} \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}\,' \end{aligned}\right\} \quad \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}\,' = \vec{F}$$

Lichtausbreitung



$\vec{r}(t)$ = Punkt auf Wellenfront

$$\dot{\vec{r}} = c\,\vec{e}_r \qquad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Propagationsgeschwindigkeit gesehen aus Σ' bei

~~Propagationsgeschwindigkeit gesehen aus Σ' bei~~
~~Annahme einer Galilei Transformation zw Σ und Σ'~~

$$\cancel{\vec{\pi}' = c\,\vec{e}_r - \vec{v}}$$

$$\cancel{|\vec{\pi}'|^2 = (c\vec{e}_r - \vec{v})^2 = (c^2 + v^2 - 2c\vec{v}\cdot\vec{e}_r) \neq c^2}$$

~~$\vec{\pi}$ richtungsabhängig wegen $\vec{v}$ (anisotrop)~~
~~$\Rightarrow$ Deformation der sphärischen Welle~~

~~absoluter Raum definierbar: Σ mit $\vec{v} = 0$~~
~~und $\vec{\pi} = c\,\vec{e}_r$~~

Michelson Morley-Experiment $\rightarrow$

fundamentale Aussage: Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum

- in allen Richtungen gleich
- unabhängig von relativer geradlinig gleichförmiger Bewegung eines Beobachters in Σ'

Problem mit Galilei-Transformation, muß modifiziert werden!

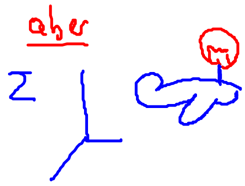
Additionsgesetz für Geschwindigkeiten

Σ  Flugzeug mit v_A
Rakete mit v_R bzgl Flugzeug

Geschwindigkeit von Rakete bzgl Σ

$$v = v_A + v_R$$

aber

Σ  Flugzeug mit v_A
Aussenden von Lichtwelle (Lichtstrahl)

Geschwindigkeit von Lichtstrahl c bzgl Σ

$$\cancel{v = v_A + c} \qquad v = c$$

Wie passt das alles zusammen?

3. Axiome der speziellen Relativitätstheorie

1. Axiom (Relativitätsprinzip)

Alle physikalischen Gesetze (und damit auch Resultate von Experimenten) sind in allen Inertialsystemen (d.h. gl. grad. zueinander bewegten Systemen) gleich, d.h. haben gleiche Form.

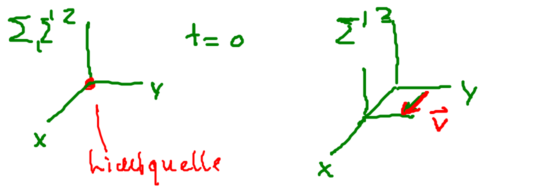
2. Axiom (Universalität von c)

2. Axiom (Universalität von c)

Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum ist eine universelle Konstante (konst $\forall \vec{r}, t$), gleich für jeden Beobachter, unabhängig von Bewegung der Lichtquelle

Raum, Zeit, Gleichzeitigkeit etc.
Verknüpfung von Raum und Zeit

4. Lorentz-Transformation



Σ' relativ bewegt zu Σ mit $\vec{v} = v\vec{e}_x$

$t=0$ → sphärische Wellenfront

in Σ: $\quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad$ Koord. in Σ: x, y, z, t

in Σ': $\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (*) \qquad$ Koord in Σ': x', y', z', t'

2. Axiom

Galilei-Transf.

$$x' = x - vt$$
$$y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

in $(*)$

$$\Rightarrow (x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \left[t^2 \underbrace{- \frac{v^2}{c^2} t^2 + 2x \frac{v}{c^2} t}_{\text{Zusatzterme nur für } v \to 0} \right]$$

$[\ldots] \to 1$

Limes $v/c \to 0$ Galilei Transf. okay

gesucht: Verallgem. Transformation $\Sigma \rightleftarrows \Sigma'$, die für $v/c \to 0$ in Galilei Transf. mündet.

allgem. Ansatz:

- Mittransformieren der Zeit t
  Aufgabe des Konzepts der absoluten Zeit, $\Sigma \to \Sigma' \Rightarrow t \to t'$
- Anforderung: Transformation muß linear sein

d.h.

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x + \varepsilon t \\ y' &= y \end{aligned}\right\} \quad \alpha, \varepsilon, \delta, \gamma$$

$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \delta x + \eta t$$

$\alpha, \varepsilon, \delta, \eta$

nur von v und c abhängig, konstant

betrachte zunächst Spezialfälle von Galilei-Trafo

$$x' = 0 \Rightarrow x = vt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v$$

$$x = 0 \Rightarrow x' = -vt \Rightarrow \frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{dt'} = -v$$

verallg. Transformation

$$x' = 0 \Rightarrow \alpha x + \varepsilon t = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\alpha} = v$$

$$x = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x' = \varepsilon t \\ t' = \eta t \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{\eta\, dt} = \frac{\varepsilon}{\eta} = -v$$

$$\Rightarrow \alpha = \eta$$

Einsetzen in $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$

$$\Rightarrow (\alpha x + \varepsilon t)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (\delta x + \alpha t)^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 x^2 + 2\alpha\varepsilon xt + \varepsilon^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2(\delta^2 x^2 + 2\delta\alpha xt + \alpha^2 t^2)$$

$$\Rightarrow \underline{(\alpha^2 - c^2\delta^2)}\, x^2 + \underline{(2\alpha\varepsilon - 2\delta\alpha c^2)}\, xt + y^2 + z^2$$
$$= \underline{(c^2\alpha^2 - \varepsilon^2)}\, t^2$$

muß übereinstimmen mit $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$

Koeffizientenvergleich führt auf Bedingungen

$$\alpha^2 - c^2\delta^2 \stackrel{!}{=} 1 \qquad (A)$$
$$\cancel{\alpha}\varepsilon - \delta\cancel{\alpha} c^2 \stackrel{!}{=} 0 \qquad (B)$$
$$c^2\alpha^2 - \varepsilon^2 \stackrel{!}{=} c^2 \qquad (C)$$

wegen $\frac{\varepsilon}{\alpha} = -v$ bzw. $\varepsilon = -\alpha v$

folgt aus (C)

$$c^2\alpha^2 - \alpha^2 v^2 = c^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\varepsilon = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

(B) ausnutzen $\varepsilon - \delta c^2 = 0$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{c^2} = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

wegen $\alpha = \eta$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

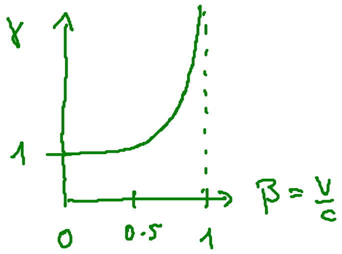
Bedingung (A) als Konsistenz check benutzbar.

Standard-Abkürzungen

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \beta \in [0,1] \text{, dim. los}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\gamma \geq 1$$



Lorentz-Transformation $\Sigma \to \Sigma'$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - \beta c t) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\,\left(t - \frac{\beta}{c}\,x\right) \end{aligned}$$

inverse Lorentz-Transformation $\Sigma' \to \Sigma$

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(x' + \beta c t') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\,\left(t' + \frac{\beta}{c}\,x'\right) \end{aligned}$$

Limes $v/c \to 0$

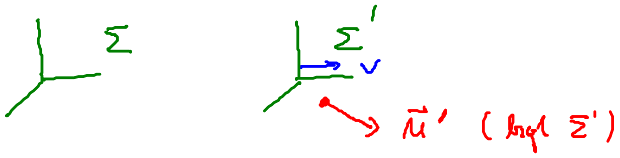
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \underset{\text{Taylor}}{=} 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \text{h.o.t}$$

$\gamma \to 1$ in Lorentz Transformation

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - \frac{v}{\cancel{c}}\cancel{c}t = x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t - \underbrace{\cancel{\frac{v}{c^2}x}}_{0} \end{aligned}\right\}$$ im Limes $v/c \to 0$ Galilei-Transf.

5. Additionsgesetz für Geschwindigkeiten

- Σ' mit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ relativ zu Σ bewegt, $v = \text{const}$
- Teilchen bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ relativ zu Σ'



- Welche Geschwindigkeit $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ hat Teilchen bezogen auf Σ?

inverse Lorentz Trafo für x und t

$$x = \gamma(x' + \beta c t')$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)$$

$u_x = ?$
$u_y = ?$
$u_z = ?$

$$dx = \gamma(dx' + \beta c\, dt')$$
$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{\beta}{c}dx'\right)$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + \beta c\, dt'}{dt' + \frac{\beta}{c}dx'} \overset{dt' \text{ ausklammern}}{=} \frac{u'_x + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c}u'_x}$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

mit $\beta = v/c$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x \cdot v/c^2}$$

Folgerungen:

1) Newton Limes $v/c \to 0$ $\Rightarrow$ $u_x = u'_x + v$
simple Geschw. Addition

2) i. Allg. zusätzlicher Faktor $\dfrac{1}{1 + u'_x \cdot v/c^2}$

3) Extremfall: $u'_x = c$

$$u_x = \frac{c+v}{1 + cv/c^2} = \frac{c+v}{1 + v/c} = \underline{\underline{c}}$$

vgl. Problem Flugzeug + Rakete oder Lichtquelle

Universalität von c

analog für u_y und u_z mit $y' = y$ und $z' = z$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dy'}{dt' + \frac{\beta}{c} dx'} = \frac{1}{\gamma} \frac{u_y'}{1 + u_x' \cdot v / c^2}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \; \dots \; = \frac{1}{\gamma} \frac{u_z'}{1 + u_x' v / c^2}$$

Newton Limes $v/c \to 0$, $\gamma \to 1$ $\quad u_y = u_y'$, $u_z = u_z'$

inverse Transformationen, wenn $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ in Σ vorgegeben.

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}, \quad u_y' = \frac{1}{\gamma} \frac{u_y}{1 - u_x v / c^2}, \dots$$

6. Zeitdilatation

- Σ' mit $\vec{v} = v \vec{e}_x$ relativ zu Σ bewegt, $v = $ const
- in Σ wird Zeitintervall

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

gemessen

Δt: Eigenzeitintervall in Σ

- Was ergibt sich für Zeitintervall in Σ'?

Lorentz Transformation für t_1 und t_2

$$t_2' = \gamma \left(t_2 - \frac{\beta}{c} x_2\right)$$
$$t_1' = \gamma \left(t_1 - \frac{\beta}{c} x_1\right)$$

Zeitintervall in Σ'

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma \left(t_2 - \frac{\beta}{c} x_2\right) - \gamma \left(t_1 - \frac{\beta}{c} x_1\right)$$

Uhr am Messung ruhe in Σ

$$x_1 = x_2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t' = \gamma (t_2 - t_1) = \gamma \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta t$$

Folgerungen:

1) $v^2/c^2 < 1$, d.h. $\gamma > 1$ $\quad \Rightarrow \quad \Delta t' > \Delta t$ falls $v \neq 0$

im mit v bewegten Bezugssystem wird Zeit gestreckt

2) 2 Inertialsysteme Σ, Σ'

in jedem System ruht jeweils ein Beobachter
zwei Ereignisse, die in Σ am festen Ort im zeitl. Abstand Δt (bzgl Σ) auftreten, werden vom Beobachter in Σ' im Zeitabstand $\Delta t' = \gamma \Delta t$ gesehen.

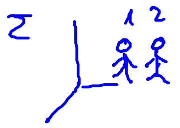
Umgekehrt: zwei Ereignisse, die in Σ' am festen Ort im zeitlichen Abstand $\Delta t'$ auftreten, werden vom Beobachter in Σ im Zeitabstand $\Delta t = \gamma \Delta t'$ gesehen

anschaulich paradox, kontraintuitiv
im Hafele Keating Experiment ~ 1970 bestätigt!

Newtonsche Limes $v/c \to 0$, $\gamma \to 1$

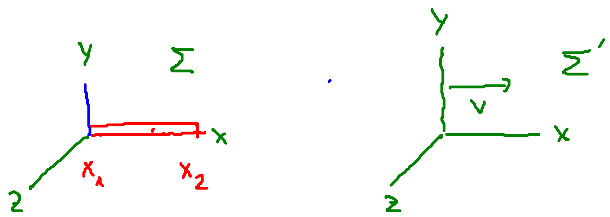
$$\Rightarrow \Delta t' = \Delta t$$

Zwillingsparadoxon:



1 bleibt in Σ
2 befindet sich in Σ' (mit v)

7. Längenkontraktion



$l_0 = x_2 - x_1$ = Stablänge

Stab entlang x-Achse ruht in Σ

Messung von Stablänge aus System Σ'
feste Zeit t'
inverse Lorentz-Transformation

$$x_1 = \gamma (x_1' + v t_1')$$
$$x_2 = \gamma (x_2' + v t_2')$$

$$t_1' = t_2' = t$$

$$x_2 - x_1 = l_0$$

$$= \gamma (x_2' - x_1') + \gamma v \underbrace{(t_2' - t_1')}_{=0}$$
$$= \gamma (x_2' - x_1')$$

$$l_0 =: \gamma\, l'$$

$l' = x_2' - x_1'$ = Abstand der transf. Endpunkte vom Stab gemessen in Σ'

$$l' = \frac{1}{\gamma} l_0 \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$\gamma \geq 1 \rightarrow$ vom bewegten System Σ' aus ist gemessene Länge des Stabes <u>kürzer</u> als in Σ

Längenkontraktion

später Terrell-Effekt berücksichtigen

8. Lorentz-invarianter „Abstand" / Minkowski RaumZeit

Newton-Mechanik: räumliche Intervalle, Zeitintervalle } invariant bei Übergang von $\Sigma \rightarrow \Sigma'$

– wg Galilei Transf.

relativist. Mechanik: räuml. Intervalle gequetscht, Zeitintervalle gedehnt } bei Übergang von $\Sigma \rightarrow \Sigma'$

– wg Lorentz Transf

grobe Analogie: Ballon

gequetscht

gedehnt

legt nahe, dass Raum und Zeit in relativ. Physik verkoppelt sind

Newton Mechanik (3dim. Raum)

Abstand zwischen Punkten $\vec{r}_A$ und $\vec{r}_B$ invariant unter Galilei Transf.

$$d(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \sqrt{(\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2} \qquad \text{räuml. Abstand}$$

Gibt es in relativ. Physik ähnliche Größe, die invariant unter Lorentz-Transformation ist?

Dimensionsgleichheit:

Multipl. Zeit t mit Lichtgeschwindigkeit c $\rightarrow ct$

und hat Dimension von Länge

ct hat Dimension von Länge

Ereignis $\quad \underline{\tau} = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z)$

2 Ereignisse $\quad \underline{\tau}_A = (ct_A, \vec{r}_A)$

$\underline{\tau}_B = (ct_B, \vec{r}_B)$

$d(\tau_A, \tau_B)$ so, dass Lorentz-invariant

betrachte in Σ

Vorzeichen

$$\Delta s^2 = d^2(\underline{\tau}_A, \tau_B) = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2$$

$$\Delta t = t_B - t_A$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

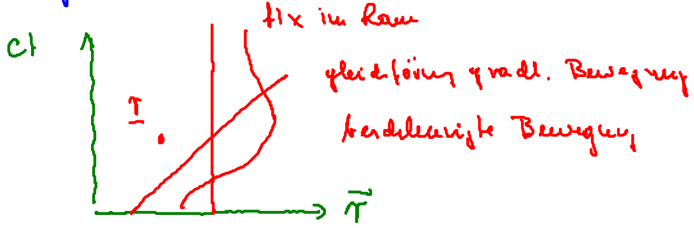
$$\Sigma \to \Sigma' \Rightarrow \boxed{\Delta s'^2 = \Delta s^2}$$

Nachweis in Übungen.

Lorentz-Transformation mit $t \to ct$ sehr symmetrisch

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned}\right\} \quad x \Leftrightarrow ct \text{ verbunden}$$

Weltpunkt $\underline{\tau} = (ct, \vec{r})$
Koordinaten von Etwas, was bei Zeit t im Punkt $\vec{r}$ passiert
(Ereignis)



Vierdimensionaler Vektorraum $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
mit Elementen / Weltpunkten $\underline{\tau} = (ct, \vec{r})$ und
"Abstandsfunktion" / Metrik für zwei beliebige

$\underline{\tau}_A = (ct_A, \vec{r}_A)$ und $\vec{\tau}_B = (ct_B, \vec{r}_B)$

$$d^2(\underline{\tau}_A, \underline{\tau}_B) = \Delta s^2 = c^2 \underbrace{(t_B - t_A)^2}_{\Delta t^2} - \underbrace{(\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2}_{\Delta r^2}$$

heißt der MINKOWSKI-RAUM.

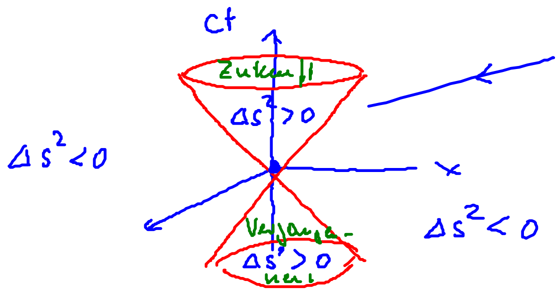
heißt der MINKOWSKI-RAUM. Δt^2 Δr^2

Bem: 1) Δs^2 nicht euklidisch / "pseudo euklidisch"

2) $\Delta s^2 \gtreqless 0$

$\Delta s^2 > 0$ zeitartiger Abstand
$\Delta s^2 < 0$ raumartiger Abstand
$\Delta s^2 = 0$ lichtartiger Abstand
} zwischen 2 Ereignissen

$\Delta s^2 < 0$: z.B. $t_A = t_B$ & $\vec{r}_A \neq \vec{r}_B$



9. relativistischer Impuls

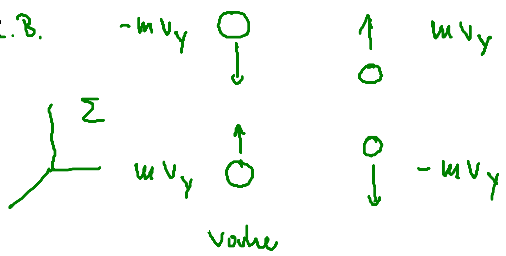
Verallgemeinerung von Impuls

Newton $\vec{p} = m\vec{v}$, m Ruhemasse / träge Masse

Impulssatz bei Stoßprozessen mit beliebiger Teilchengeschwindigkeit in allen Bezugssystem Σ' gültig

$\vec{p} = m\vec{v}$ bei Lorentz Transf. $\Sigma \to \Sigma'$ läßt Impulssatz bei Stoß nicht invariant

z.B.



$P_{ges.} = 0$

Nachweis mit Geschwindigkeitadditionsgesetz wenn in Σ' betrachtet.

vernünftige Verallgemeinerung von Impuls, der Impulssatz bei elast. Stößen in allen Σ gewährleistet

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$|\vec{p}| = p = \gamma m c \beta$$

10. relativistische Energie

kinet. Energie als Energie, die ein anfänglich in Ruhe befindl. Teilchen hat, wenn an ihm die Arbeit W verrichtet wurde.

Newton Gl: mit relativ. Impuls

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\gamma m\vec{v} = \vec{F}$$

t und $\vec{F}$ bezogen auf Inertialsystem in dem $\vec{p}$ gemessen wird

Kraft in x-Richtung $\qquad \vec{F} = F\,\vec{e}_x$

verrichtete Arbeit:

$$W = \int F \cdot dx = \int \frac{d}{dt}(\gamma m v)\, dx$$

$$= \int \frac{d}{dt}(\gamma m v)\, \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

$\frac{dx}{dt} = v$

$$= \int \frac{d}{dt}(\gamma m v)\, v\, dt$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

$$= \int \left[\gamma m v \frac{dv}{dt} + \gamma^3 m v^3/c^2 \frac{dv}{dt}\right] \cdot dt$$

$$= \int \gamma m v \underbrace{\left(1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right)}_{=\gamma^2} \frac{dv}{dt} \cdot dt$$

$$= \int \gamma^3 m v \frac{dv}{dt} \cdot dt$$

$$= \int \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}^{\,3}} \frac{dv}{dt} \cdot dt$$

$$= \int \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \cdot dt$$

$$= \int \frac{d}{dt}(\gamma m c^2)\, dt$$

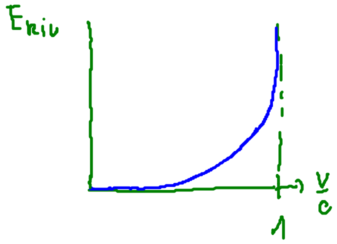
Integrationsgrenzen $\qquad t = 0,\ v(0) = 0$
$\qquad t,\ v = v(t)$

$\curvearrowright$

$$W = \gamma m c^2 - m c^2$$

$$= m c^2 (\gamma - 1)$$

$$\equiv E_{kin} = T$$



nicht verschieden von Newton-Fall

$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ aus!

$E_{kin}(v=0) = 0$

$E_{kin}(v \to c) \to \infty$

betrachte Grenzfall $|v/c| \ll 1$, $v/c \to 0$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor}}}{=} 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots$$

$$\gamma - 1 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

$$E_{kin} = mc^2(\gamma - 1) \xrightarrow[|v/c| \ll 1]{} \frac{1}{2} m v^2$$

→ Gesamte Energie ?

formal:

$$p = mc\beta\gamma$$

$$p^2 = m^2 c^2 \beta^2 \gamma^2$$

außerdem gilt:

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

da $\frac{1}{1-v^2/c^2} - \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} = 1$

ist Lorentz-Invariante, da exakt $= 1$

Multiplikation mit weiterer Lorentz-Invariante m^2c^4

$$\Rightarrow \quad m^2c^4(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2) = m^2c^4$$

$$\Rightarrow \quad \gamma^2 m^2 c^4 - p^2c^2 = m^2c^4$$

Noch immer Lorentzinvariante.

relativ. Gesamtenergie für freies Teilchen

$$E = \gamma m c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \text{(Einstein-Formel)}$$

$v = 0 \quad \Rightarrow \quad E(v=0) \mathrel{\hat{=}} mc^2$

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \qquad \text{(Einstein's Energie-Impuls Relation)}$$

ist Lorentz-invariant

$\Sigma \to \Sigma' \quad \to \quad E \to E', \quad p \to p'$

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = E'^2 - p'^2c^2$$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

Limiten:

1) $pc \ll mc^2$

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2c^2}{m^2c^4}} \overset{\text{Taylor}}{=} mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2c^2}{m^2c^4} + \dots \right)$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \dots$$

nicht rel. Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$

2) $pc \gg mc^2$

$E = pc$ $\quad \to$ Hochenergiephysik, Photonen mit $m = 0$

insgesamt:

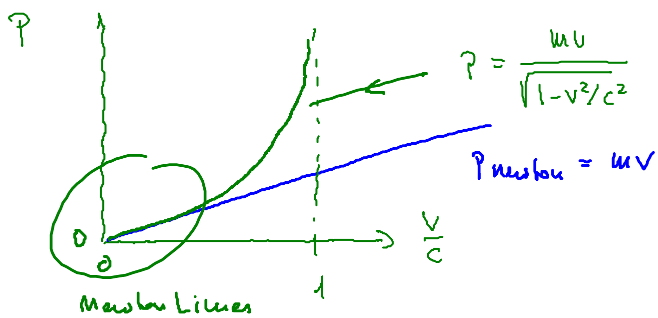
$$E = \gamma m c^2$$

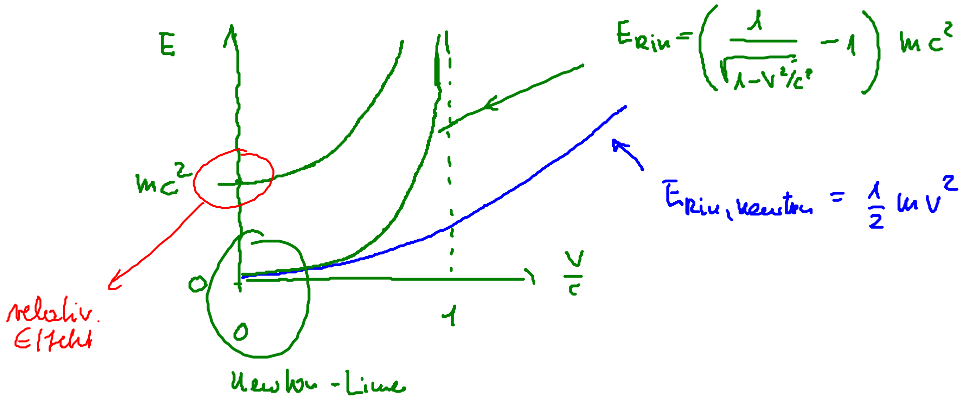
$$E = mc^2 + E_{kin} = mc^2 + mc^2(\gamma - 1)$$

$$E_0 = E(v=0) = mc^2 \quad \text{(Ruheenergie)}$$

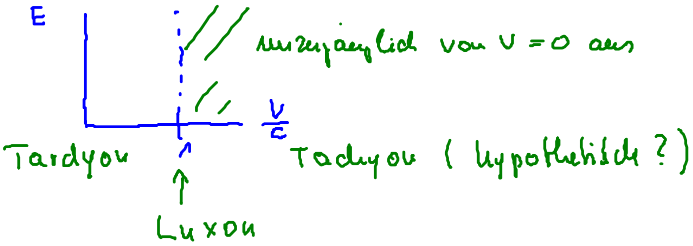
Äquivalenz von Masse und Energie

Vergleich Newton Mechanik / relativist. Mechanik





Teilchen mit Masse $m \neq 0$ kann nicht auf Geschwindigkeiten $v \geq c$ gebracht werden, dazu ∞ viel Energie nötig



Teilchen mit Masse $m = 0$ (Photonen) haben Energie $E = pc$

Wieso $p \neq 0$ möglich: $p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \xrightarrow[v \to c]{m \to 0}$ „ $p = \frac{0}{0}$ "

Transformation von Impuls und Energie $\Sigma \to \Sigma'$

$$
\begin{aligned}
p_x' &= \gamma \left(p_x - \frac{\beta}{c} E \right) \\
p_y' &= p_y \\
p_z' &= p_z \\
E' &= \gamma \left(E - p_x c \beta \right)
\end{aligned}
$$

mehr dazu in Ergänzungen zur Physik $\underline{\mathrm{III}}$