1. GRUNDLEGENDES ZUR STRUKTUR VON RAUM UND ZEIT

Grundlegendes Konzept der Physik: Raum und Zeit

"Bühne, auf der Physik stattfindet"

prärelativistisch ("Newton")

Raum: 3d Kontinuum von Punkten → 3d Euklid. Raum

"Euklidische Metrik"

Zeit: reelle Größe (meßbar), die fließt → 1d Raum

1.1. Dimensionalität der Raum Zeit

Frage: Wäre Universum mit mehr als 3 Raumdimensionen und mehr als 1 Zeitdimension möglich?

Ja, aber sehr bizarr!

a) Warum Raum 3d?

$n<3$: zu einfach, vgl. Übungsaufgaben Physik I, III

$n>3$: betrachte 2-Körperproblem in $n>3$

Kraftlinie

$$F(r) \sim \frac{1}{O_n(r)}$$

$F(r)$ umgekehrt proportional zu Kugeloberfläche $O_n(r)$

$n=3$: $O_3(r) = 4\pi r^2$

$F_3(r) \sim \frac{1}{r^2}$ — Newton, Coulomb

n allg: $O_n(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) r^{n-1}}$ — $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\Rightarrow \quad F_n(r) \sim \frac{1}{r^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad E_{pot}(r) \sim \frac{1}{r^{n-2}}$$

Keplerproblem: m Planetenmasse, $\dot\varphi$: Bahngeschwindigkeit

p Impuls von Planet

r_{min}, r_{max} min/max Bahnradius

Energieerhaltung

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m r^2 \dot\varphi^2 = \frac{M}{2mr^2}$$

$$V = -\frac{C}{r^{n-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{2m r_{min}^2} - \frac{C}{r_{min}^{n-2}} = \frac{M}{2m r_{max}^2} - \frac{C}{r_{max}^{n-2}} = E = T+V$$

$n \geq 4$: $r_{min}^2 = r_{max}^2$!

nur Kreisbahnen in (n Dim) möglich

Kreisbahnen instabil bei kleinen Störungen

Kreisbahnen instabil bei kleinen Störungen

b) warum ist Zeit 1d ?

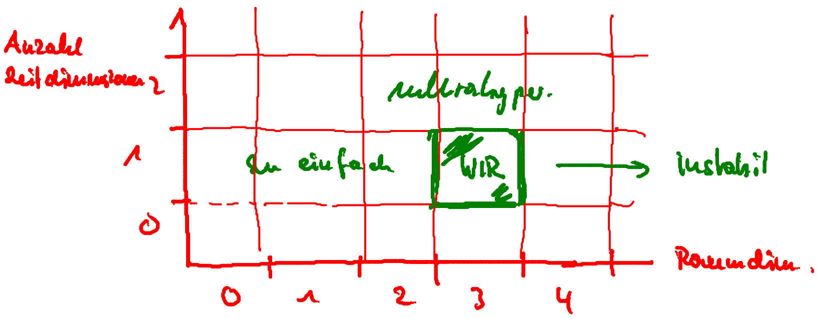
Physik formuliert in Form von PDGLn!

Laplace, Poisson, Diffusionsgl (Fourier), Wellengleichung

$\nabla^2\phi = \varrho(\vec r)$ $\qquad \partial_t \phi = D\nabla^2\phi \qquad \partial_t^2\phi = k\nabla^2\phi$

PDGL.
- elliptisch
- hyperbolisch } harmlos | bei kleinen Änderung von RB, AB
- ultrahyperbolisch } "sprunghaft"

dim Zeit ≥ 2 → PDGL der Physik ultrahyperbolisch.



Lesch, Gaßner: Physik J. 6 (4) 31 (2007) "light version"

Tegmark: Class. Quantum Grav 14, L69 (1997)

Fazit: Raum 3d / Zeit 1d

1.2. Formales der RaumZeit

Physik läuft in Raum und Zeit ab ← implizit Faktorisierung in Zeitachse T, 3d Raum A^3

RaumZeit: Menge $A^4 = T \times A^3$

$a \in A^4$ Weltpunkt, Ereignis

$a = (\tau, \vec a)$

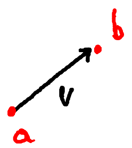
zeitl. Komponente (τ), räuml. Komponente ($\vec a$)

Struktur: A^4, T, A^3 affine Räume

Was ist affiner Raum:

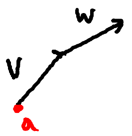
1) Menge (A) mit Elementen/Punkten
2) Vektorraum V
3) Verknüpfung $+ : A \times V \to A$

mit Eigenschaften:



a) zwei Punkte $a, b \in A$. Dann gibt es genau ein Vektor $v \in V$ mit

$$a + v = b \quad \Rightarrow \quad v = b - a$$



b) $a \in A$ und $v, w \in V$

$$(a+v)+w = a + (v+w)$$

$O \in A$ als Referenzpunkt wählen ⇒

Vektorraum V identisch affiner Raum A

$a = O + v$ mit $v \in V$

Konsequenz aus affiner Struktur von Raumzeit

Exkurs: Newton-Mechanik

$$a = (\tau_a, \vec{a})$$
$$b = (\tau_b, \vec{b})$$

Zeitdifferenz: $t = \tau_a - \tau_b \in \mathbb{R}$

Gleichzeitigkeit: $\tau_a = \tau_b \Rightarrow t = 0$

Raum als Euklidischer Raum, Abstandsdefinition

$$d(\vec{a},\vec{b}) = \sqrt{\langle \vec{a}-\vec{b} \,|\, \vec{a}-\vec{b} \rangle}, \quad \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$$

Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{R}^3$

Galilei-Raumzeit

4d affiner Raum mit Abstandsdefinition

$$d(a,b) = \begin{cases} |\tau_a - \tau_b| & \text{falls } \tau_a \neq \tau_b \\ \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2} & \text{falls } \tau_a = \tau_b \end{cases}$$

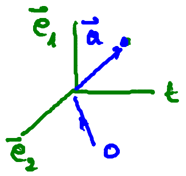
Bei Gleichzeitigkeit euklid. räuml. Abstand meßbar

Koordinatensysteme:

a) $O \in A^4 \longrightarrow$ Vektorraum

b) 3d Vektorraum $\mathbb{R}^3 \longrightarrow$ orthonorm. Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

c) Zeit formal über 4. Einheitsvektor einführen, $\vec{e}_0$



$$a = O + t\vec{e}_0 + \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i$$

Koordinatenvektor $(t, x_1, x_2, x_3)^T = (t, \vec{x})^T$

repräsentiert RZ Punkt a

$t \to ct = x_0 \quad \dim[c] = \frac{m}{s} \mathrel{\hat{=}}$ Geschw.

$$a \leftrightarrow (x_0, x_1, x_2, x_3)^T = (x_0, \vec{x})^T$$

Spezielle Koordinatensysteme sind Inertialsysteme (IS)

Massenpunkt ohne Kraftwirkung bewegt sich in IS gradlinig gleichförmig

maximale Menge von Transformationen, d.h. "affine" Abbildungen, die Struktur des Raumes invariant läßt:

$$g: A^4 \to A^4$$
$$a \to g(a) = a' = (s, \vec{a}')$$

genau in Übung.

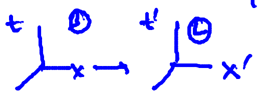
2. EINSTEINSCHES RELATIVITÄTSPRINZIP

2 EINSTEINSCHES RELATIVITÄTSPRINZIP

aufgeben von Konzept der universellen Zeit / absolute Zeit

Inertialsystem IS $\Sigma = \{ct, \vec{x}\}$

$$\Sigma \to \Sigma' = \{ct', \vec{x}'\}$$



Einsteinsche Relativitätsprinzip

physikalische Gesetze in allen IS gleich.

3. ABLEITUNG DER LORENTZ-TRANSFORMATION

formal: 3 Postulate

① Es gilt Relativitätsprinzip: Alle IS gleichberechtigt!

② Raum Zeit ist homogen, kein Punkt ausgezeichnet

③ Raum ist isotrop, keine Richtung im Raum ausgezeichnet