3. ABLEITUNG DER LORENTZTRANSFORMATION

formale Ableitung der Lorentz Transformation
ohne Forderung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum!

Einstein 1905
Frank + Rothe 1911
Berzi + Gorini 1969

3.1. 3 Postulate

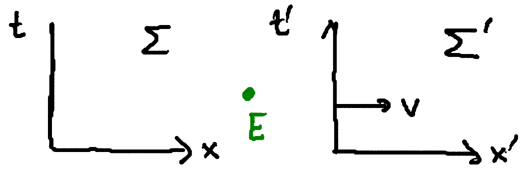
1. Es gilt das Relativitätsprinzip
   alle Inertialsysteme gleichberechtigt
   Naturgesetze forminvariant bei Übergang von IS $\Sigma \rightarrow$ IS Σ'

2. Raum Zeit homogen:
   kein Punkt im Raumzeit $(\vec{r},t)$ ausgezeichnet

3. Raum ist isotrop:
   keine Richtung im Raum ausgezeichnet

im folgenden 1 Raum + 1 Zeit dimension
Verallgemeinerung später

3.2. Ableitung in 1+1 Dimensionen



E: Ereignis
Punkt im (x,t)-Raum

Σ' - Geschwindigkeit bzgl Σ : v

Ereignis E festlegen durch Koordinaten in

$$\Sigma: \quad \xi = (x,t)$$
$$\Sigma': \quad \xi' = (x',t')$$

gesucht: Abbildung / Transformation von $\xi \rightarrow \xi'$
unter Berücksichtigung der Postulate 1 – 3

$$\xi \rightarrow \xi' = f(\xi)$$
$$f = ?$$

A. Homogenität / Postulat 2
$\xi' = f(\xi)$ invariant unter Verschiebung

$$\xi \to \xi + \alpha$$

$$\curvearrowright \quad f(\xi+\alpha) = \xi' + \alpha' = f(\xi) + \alpha' \qquad (*)$$

α' zu bestimmen / wird dadurch definiert

α' Fkt von f, α aber nicht von ξ

Spezialfall $\xi = 0$

$$f(\alpha) = f(0) + \alpha'$$

$$\alpha' = f(\alpha) - f(0)$$

$$(*) \Rightarrow \quad f(\xi+\alpha) = f(\xi) + f(\alpha) - f(0) \qquad (**)$$

$$g(\xi) := f(\xi) - f(0)$$

$$(**) \qquad f(\xi+\alpha) - f(0) = f(\xi) - f(0) + f(\alpha) - f(0)$$

$$\curvearrowright \quad g(\xi+\alpha) = g(\xi) + g(\alpha) \qquad \forall\, \xi, \alpha$$

$f(\xi)$ stetig im Ursprung $\to$ $g(\xi)$ stetig

$\Rightarrow$ $g(\xi)$ genügt Skalenrelation

$$g(k\xi) = k\, g(\xi) \quad , \quad k \text{ beliebig}$$

Nachweis: $g(\xi+\alpha) = \frac{1}{k} k\, g(\xi+\alpha)$

Skalenrel $\qquad = \frac{1}{k} g\big(k(\xi+\alpha)\big)$

Linearität $\qquad = \frac{1}{k} g(k\xi) + \frac{1}{k} g(k\alpha)$

$$= \frac{1}{k}\left[k\, g(\xi) + k\, g(\alpha)\right]$$

$$= g(\xi) + g(\alpha) \qquad \square$$

$\curvearrowright$ $\left.\begin{array}{l} g(\xi) \\ f(\xi) \end{array}\right\}$ lineare Funktionen (homogen)

o.B.d.A. $f(\xi = 0) = 0 \Rightarrow f = g$

d.h. zu Zeit $t = 0$ KO Ursprünge von Σ und Σ' identisch.

Form der Abbildung f

$$\left.\begin{aligned} x' &= a(v)\, x + b(v)\, t \\ t' &= c(v)\, x + d(v)\, t \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$t' = c(v)\, x + d(v)\, t$$

(B) Reziprozität / Relativitätsprinzip

Geschwindigkeit v von Σ' bzgl. Σ durch a und b ausdrücken

Ursprung von Σ':

$$x' = 0 = a(v)\, x + b(v)\, t$$

$$x = -\frac{b(v)}{a(v)}\, t$$

direkte Geschwindigkeit

$$\frac{x}{t} = -\frac{b(v)}{a(v)} = v$$

Raumachsen von x' und x in gleiche Richtung

Zeit fließt in t und t' in gleichem Sinne

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= a(v) > 0 \\ \frac{\partial t'}{\partial t} &= d(v) > 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Geschwindigkeit w vom Ursprung von Σ gemessen bzgl. Σ'

$$x = 0$$

$$x' = b(v)\, t$$

$$t' = d(v)\, t$$

$$x' = \frac{b(v)}{d(v)}\, t'$$

reziproke Geschwindigkeit

$$\frac{x'}{t'} = \frac{b(v)}{d(v)} = w = \varphi(v)$$

insgesamt:

$$w = \varphi(v)$$

$$v = \varphi(w)$$

$$\varphi(\varphi(v)) = v$$

(C) Isotropie – Bestimmung von φ

Isotropie: Keine Auszeichnung von Raumrichtung

Spiegelung der Ortachsen in Σ & Σ'

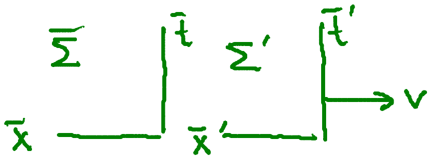
→ neue IS $\bar{\Sigma}$ und $\bar{\Sigma}'$

Transformation muß gleich bleiben

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= -x \\ \bar{t} &= t \\ \bar{x}' &= -x' \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(3)

$$\bar{x}' = -x'$$
$$\bar{t}' = t'$$



$$\left.\begin{aligned} \bar{x}' &= a(\bar{v})\bar{x} + b(\bar{v})\bar{t} \\ \bar{t}' &= c(\bar{v})\bar{x} + b(\bar{v})\bar{t} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$\bar{v}$ = Geschwindigkeit von $\bar{\Sigma}'$ in $\bar{\Sigma}$

andererseits (3) in (1) direkt einsetzen

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}' &= a(v)\,\bar{x} - b(v)\bar{t} \\ \bar{t}' &= -c(v)\,\bar{x} + d(v)\,\bar{t} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Bestimmung von $\bar{v}$ formal

$$x' = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{b(v)}{a(v)}\bar{t}$$

$$\bar{v} = \frac{\bar{x}}{\bar{t}} = \frac{b(v)}{a(v)} = -v$$

Vergleich von (4) mit (1) oder (5) unter Berücksichtigung von $\bar{v} = -v$

Symmetrierelationen:

$$\left.\begin{aligned} a(v) &= a(-v) && \text{symm.} \\ b(v) &= -b(-v) && \\ c(v) &= -c(-v) && \text{antisymm.} \\ d(v) &= d(-v) && \text{symm.} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

(1) $\quad \varphi(v) = \dfrac{b(v)}{d(v)} = -\varphi(-v)$ antisymm.

insgesamt (1) – (3) schränkt funktionale Form von $\varphi(v)$ folgendermaßen ein:

1) $\varphi(v) = -\varphi(-v)$

2) $\varphi(\varphi(v)) = v$

3) φ reell & stetig ($v \to 0 \Rightarrow \Sigma \to \Sigma'$)

Zwei Möglichkeiten:

1) $\varphi(v) = v$

2) $\varphi(v) = -v$

[andere Möglichkeit $\varphi(v) = \pm \dfrac{1}{v}$ divergent für $v \to 0$]

Relativistik $\varphi(v) = v$

Betrachte $\varphi(v) = v$

$$\frac{b(v)}{d(v)} = -\frac{b(v)}{a(v)}$$

$$\Rightarrow \quad d(v) = -a(v) \quad \rightarrow \text{ Widerspruch.}$$

andere Möglichkeit $\varphi(v) = -v$

$$d(v) = a(v)$$
$$b(v) = -v\,a(v)$$

Transformation bisher:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a(v)\,x - v\,a(v)\,t \\ t' &= c(v)\,x + a(v)\,t \end{aligned}\right\} \quad (***)$$

(D) Bestimmung von $c(v)$

betrachte inverse Transformation

$$x = x(x', t')$$
$$t = t(x', t')$$

$$\Delta(v) := a(v)\left[a(v) + v\,c(v)\right]$$

(***) nach x, t auflösen

$$\left.\begin{aligned} x &= \Delta^{-1}(v)\left[a(v)\,x' + v\,a(v)\,t'\right] \\ t &= \Delta^{-1}(v)\left[-c(v)\,x' + a(v)\,t'\right] \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

andererseits mit $w = v$

$$\left.\begin{aligned} x &= a(-v)\,x' + v\,a(-v)\,t' \\ t' &= c(-v)\,x' + a(-v)\,t' \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Symmetrien:

$$a(-v) = a(v)$$
$$c(-v) = -c(v)$$

(7) + (8) vergleichen:

$$a(v) = \frac{1}{a(v) + v\,c(v)}$$

$$c(v) = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{a(v)} - a(v)\right)$$

Diagonalelemente identisch

insgesamt bisher:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a(v)\,x - v\,a(v)\,t \\ t' &= \left[\frac{1}{v}\left(\frac{1}{a(v)} - a(v)\right)\right] x + a(v)\,t \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$t' = \left[\frac{1}{v}\left(\frac{1}{a(v)} - a(v)\right)\right] x + a(v)\, t \quad \Big\} \quad (9)$$

Ⓔ Bestimmung von $a(v)$

Relativitätsprinzip: Transformation (9) haben Gruppeneigenschaft
2 Transf. mit Geschwindigkeit v und v' entsprechen neuer Transf. mit v''

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a(v) & -v\,a(v) \\ \frac{1}{v}[\dots] & a(v) \end{pmatrix}}_{M(v)} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$$M(v)\, M(v') = M(v'') = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

explizit:

$$\begin{pmatrix} a(v) & -v\,a(v) \\ \frac{1}{v}\left(\frac{1}{a(v)} - a(v)\right) & a(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(v') & -v'a(v') \\ \frac{1}{v'}\left(\frac{1}{a(v')} - a(v')\right) & a(v') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v'') & -v''a(v'') \\ \frac{1}{v''}\left(\frac{1}{a(v'')} - a(v'')\right) & a(v'') \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= a(v)\,a(v') - \frac{v}{v'}\, a(v)\left(\frac{1}{a(v')} - a(v')\right) \\ M_{12} &= -(v+v')\, a(v)\, a(v') \\ M_{21} &= \frac{a(v')}{v}\left(\frac{1}{a(v)} - a(v)\right) + \frac{a(v)}{v'}\left(\frac{1}{a(v')} - a(v')\right) \\ M_{22} &= a(v)\,a(v') - \frac{v'}{v}\, a(v')\left(\frac{1}{a(v)} - a(v)\right) \end{aligned}\right\} \quad X$$

$M(v'')$ muß vom Typ (9) sein

$$\Rightarrow \quad M_{11} = M_{22}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{v^2}\left[1 - \left(\frac{1}{a(v)}\right)^2\right]} = \underbrace{\frac{1}{v'^2}\left[1 - \left(\frac{1}{a(v')}\right)^2\right]} \qquad \forall\, v, v'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v^2}\left[1 - \left(\frac{1}{a(v)}\right)^2\right] = K = \text{const unab. von } v\,!$$

$$[K] = \frac{1}{\text{Geschwindigkeit}^2}$$

$$a(v) > 0$$

$$\Rightarrow \quad a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}}$$

$\sqrt{1-Kv^2}$

noch offen: Rolle von Konstante K !

3 Fälle: $K \in \mathbb{R}$: $K<0$, $K=0$, $K>0$

1) $K>0$
$c = \sqrt{\frac{1}{K}}$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - vt) \\ ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \end{aligned}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = v/c$$

Lorentz Transformation

2) $K=0$
$c \to \infty$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned}}$$

Galilei Transformation

3) $K<0$ führt zum Widerspruch (später)

3.2. Additionstheorem für Geschwindigkeiten

betrachte ⊗ $\Rightarrow$ $v'' = -\frac{M_{12}}{M_{11}}$

$$= \frac{(v+v')\ a(v)\,a(v')}{a(v)\,a(v')\left[1 - \frac{v}{v'}\left(\frac{1}{a(v')^2} - 1\right)\right]}$$

$$= \frac{v+v'}{1+Kvv'}$$

$K>0$ & $c = \sqrt{\frac{1}{K}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{v'' = \frac{v+v'}{1+\frac{v}{c}\frac{v'}{c}}}$ $\longrightarrow$ Einstein's Geschwindigkeits-addition

$K=0$, $c \to \infty$ $\Rightarrow$ $\boxed{v'' = v+v'}$ $\longrightarrow$ Newton's Geschwindigkeits-addition

$K<0$? v und v' nach positiver x-Achse
v'' in negativer x-Achse möglich
physikalisch ausgeschlossen.

3.4. Identifikation von K

bisher K als universelle Konstante

$c = \infty$ Galilei-Transf.

$0 < c < \infty$ Lorentz-Transf.

$0 < c < \infty$ Lorentz-Transf.

K muß für unsere Welt bestimmt werden

empirisch $\rightarrow$ $c \simeq 3 \cdot 10^8\ m/s$

3.5. Resultat + Bemerkungen

Theorem: (Berzi + Gorini 1969, verallg. Frank + Rothe 1911)

Annahmen: 1) Einsteinsche Relativitätsprinzip
2) Homogenität der Raum-Zeit
3) Isotropie des Raumes

$\Rightarrow$ Umrechnung von einem IS Σ in anderes IS Σ'

$\Sigma = \{\vec{x}, t\}$, $\Sigma' = \{\vec{x}', t'\}$, $\vec{v} = v\vec{e}_x$ Geschw. $\Sigma' \rightarrow \Sigma$

via Transformation

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[x - vt \right]$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[\left(-\frac{v}{c}\right) x + t \right]$$

$c \geq 0$ beliebig, empirisch zu bestimmen

2 Möglichkeiten:

$c = \infty$ $\rightarrow$ Galilei-Transf.

$c =$ Lichtgeschw. $\rightarrow$ Lorentz-Transf.

Bemerkungen:

1) nur zwei Optionen $K = 0$ oder $K > 0$ wobei $c = \sqrt{\frac{1}{K}}$

2) alle IS äquivalent, kein IS ausgezeichnet, kein absolut ruhendes System, nur Relativbewegung zwischen IS relevant

3) Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &v \rightarrow c \\ &x' \longrightarrow \infty \\ &t' \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

3.5. Verallgemeinerung auf 3 Raumdimensionen

$\vec{v} = v\vec{e}_x$ Geschwindigkeit von Σ' bzgl. Σ

Ansatz für LT

$$x' = \gamma(x - \beta c t)$$
$$y' = \alpha_y\, y$$
$$z' = \alpha_z\, z$$
$$t' = \gamma(ct - \beta x)$$

$\alpha_y = \alpha_z = \alpha$ wg. Isotropie: y, z Richtung gleichberechtigt
t' ohne y, z, Abhängigkeit
analog zu vorher

$\alpha(v) = \alpha(-v)$ gerade
$\alpha^2 = 1$ Reziprozität
$\alpha = 1$ Stetigkeit bei $v = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

nächste Schritt: $\vec{v}$ beliebig
$\vec{x}$ und $\vec{x}'$ in Anteile parallel zu $\vec{v}$ und senkrecht zu $\vec{v}$ zerlegen

$$\vec{x}_\parallel = \frac{1}{v^2}(\vec{x}\cdot\vec{v})\,\vec{v}$$

Normierung   Projektion auf $\vec{v}$

$$\vec{x}_\perp = \vec{x} - \vec{x}_\parallel = \vec{x} - \frac{1}{v^2}(\vec{x}\cdot\vec{v})\,\vec{v}$$

analog

$$\vec{x}\,'_\parallel = \frac{1}{v^2}(\vec{x}\,'\cdot\vec{v})\,\vec{v}$$
$$\vec{x}\,'_\perp = \vec{x}\,' - \vec{x}\,'_\parallel = \vec{x}\,' - \frac{1}{v^2}(\vec{x}\,'\cdot\vec{v})\,\vec{v}$$

↝ (spezielle) Lorentz-Transformation

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x}\,'_\parallel &= \gamma(\vec{x}_\parallel - \vec{\beta} c t) \\ \vec{x}\,'_\perp &= \vec{x}_\perp \\ ct' &= \gamma(ct - \vec{\beta}\,\vec{x}_\parallel) \\ \vec{\beta} &= \vec{v}/c \end{aligned}}$$