4. Formalisierung der Lorentz-Transformation

Übergang IS $\Sigma \to$ IS Σ' via Lorentz Transf.

Frage: Gibt es Invariante unter dieser Transf.?

bei Galilei Transf. $K=0$ bleiben 3d Längen invariant.

formal 4d. Raumzeit $\{ct, \vec{x}\}$

4.1. Lorentz-Invariante

1+1 dim Raumzeit (ct, x)

LT:
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

inv. LT.
$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

erwünscht: Umparametrisierung der LT

Definiere Rapidität φ

$$\tanh\varphi = \frac{v}{c} = \beta$$

$v/c \in [-1, 1]$

hyperbol. Funktionen:

$$\left.\begin{aligned} \sinh\alpha &= \tfrac{1}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right) \\ \cosh\alpha &= \tfrac{1}{2}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right) \\ \tanh\alpha &= \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$$

$$\cosh^2\alpha = \frac{1}{1-\tanh^2\alpha}$$

$$\sinh^2\alpha = \frac{\tanh^2\alpha}{1-\tanh^2\alpha}$$

hier $\tanh\varphi = \beta$

$$\cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

$$\sinh\varphi = \frac{\beta}{\phantom{\sqrt{1-\beta^2}}} = \beta\gamma$$

$\sqrt{1-\beta^2}$

Lorentz Transf. mit ψ

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Transf. Matrix hat ähnliche Struktur wie Drehmatrix in 2D Raum (x,y) wobei aber statt hyp. Funktionen entsprechende trigonometr. Funktionen eingehen (vgl. Physik I)

$$\cosh \to \cos \qquad \sinh \to \sin \qquad \text{oder} \quad \alpha \to i\alpha$$

bei Drehungen im Raum bleibt Skalarprodukt, Längen, Abstände invariant.

ähnliches für LT?

Ansatz: $(ct)^2 - x^2 = ?$ Minuszeichen!

invariant unter LT?

$$\begin{aligned}
(ct')^2 - x'^2 &= (ct\cosh\psi - x\sinh\psi)^2 \\
&\quad - (ct\sinh\psi - x\cosh\psi)^2 \\
&= c^2t^2\cosh^2\psi - \cancel{2\,ctx\sinh\psi\cosh\psi} \\
&\quad + x^2\sinh^2\psi \\
&\quad - c^2t^2\sinh^2\psi + \cancel{2\,ctx\sinh\psi\cosh\psi} \\
&\quad - x^2\sinh^2\psi \\
&= c^2t^2(\cosh^2\psi - \sinh^2\psi) \\
&\quad - x^2(\cosh^2\psi - \sinh^2\psi) \\
&= (ct)^2 - x^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad (ct)^2 - x^2 = \text{const}$ unter LT

"Lorentz-Invariante"

Verallgemeinerung auf 3+1 D Raumzeit

$$ct' = \gamma(ct - \vec{\beta}\,\vec{x}_{\parallel}) \qquad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

$$\vec{x}_{\parallel}' = \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{\beta}\,ct)$$

$$\vec{x}_{\perp}' = \vec{x}_{\perp}$$

$$x'_\perp = \vec{x}'_\perp$$

$$(ct')^2 - \vec{x}'^2 = (ct)^2 - \vec{x}^2 = \text{const.}$$

Definition: $s^2 = c^2t^2 - \vec{x}^2$ = Quadrat des Invarianten "Abstands"

Bem: Abstand nicht wirklich nehmen
$s>0,\ s=0,\ s<0$ möglich

2 Ereignisse: $E_1 = (ct_1, \vec{x}_1)$, $E_2 = (ct_2, \vec{x}_2)$

invariante Abstand

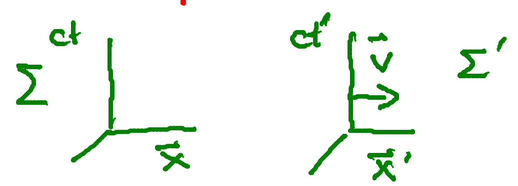
$$s_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (\vec{x}_1-\vec{x}_2)^2$$

infinitesimale Abstand

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$$

invariant unter LT

3.2. Interpretation der LT



$\vec{v}$ Geschw. von Σ' relativ zu Σ

oder

2 Beobachter, einer ruhend in Σ, einer ruhend in Σ'
Beobachter in Σ' bewegt sich relativ zu Beobachter in Σ
mit $\vec{v}$ = konst

Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit: Lichtblitz

3.3. Makroskop. Kausalität

Rolle von Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c?
größte Geschwindigkeit mit der ein Signal übertragen werden kann.

1D-Raum + 1D-Zeit

$E_1 = (ct_1, x_1)$ mit $t_1 \le t_2$
$E_2 = (ct_2, x_2)$

Kausalität: E_2 als Resultat von E_1

Ursache → Wirkung

$$\Rightarrow \quad t_2 - t_1 \geq 0$$

LT bzgl. Zeit:

$$t' = \gamma \left(t + \frac{v}{c^2} x \right)$$

Zeitdifferenz zweier Ereignisse in gegenüber Σ mit $-v$ bewegten IS Σ'

$$t_2' - t_1' = \gamma \left[t_2 - t_1 + \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \right]$$

$$= \gamma (t_2 - t_1) \left[1 + \frac{v}{c^2} \underbrace{\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}_{= v_W} \right]$$

$$v_W = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

= Geschwindigkeit mit der sich in IS Σ „Wirkung" von x_1 nach x_2 ausbreitet

= Signalgeschwindigkeit

$$\curvearrowright \quad t_2' - t_1' = \gamma (t_2 - t_1) \left[1 + \frac{v\, v_W}{c^2} \right]$$

Zeitordnung zwischen Ereignissen (früher → später) unabhängig vom Inertialsystem (Makroskop. Kausalität)

$$t_2 - t_1 > 0 \text{ in } \Sigma \quad \Rightarrow \quad t_2' - t_1' > 0 \text{ in } \Sigma'$$

dazu explizit zu zeigen, dass

$$\left(1 + \frac{v\, v_W}{c^2} \right) > 0 \quad !$$

→ Übungen!

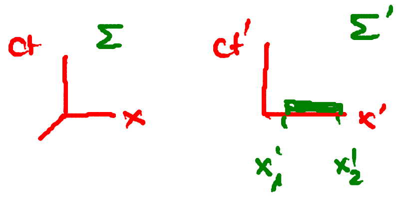
3.4. Relativität der Gleichzeitigkeit

Ereignisse, die in Σ gleichzeitig sind, sind in IS Σ' (mit $\vec{v}$ gegenüber Σ) nicht mehr gleichzeitig. → Übungsaufgabe

3.5 Längenkontraktion & Zeitdilatation

(vgl. Relativ. Mechanik in Physik I)

a) Längenkontraktion



Stab der Länge l

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma': & l_0 = x_2' - x_1' \\ \Sigma': & l = x_2 - x_1 \end{array}\right\} \text{ bei fester Zeit } t$$

$$\rightarrow \quad l = f(l_0) \quad ?$$

b) Zeitdilatation

Uhr ruht in Σ' bei x'

Σ' bewegt sich mit $\vec{v}$

2 Ereignisse mit t_1' und t_2'

Zeitintervall in Σ' $\quad \Delta t' = t_2' - t_1'$

Beobachter in Σ stellt Ereignisse zu Zeiten

$$t_2 = \gamma\left(t_2' - \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$t_1 = \gamma\left(t_1' - \frac{v}{c^2}x'\right)$$

bei $x_2' = x_1' = x'$ fest in Σ'

Zeitdifferenz:

$$t_2 - t_1 = \gamma\,(t_2' - t_1')$$

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\Delta t'$$

im System Σ gemessenes Zeitintervall Δt ist um Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ länger als $\Delta t'$ in Σ'

"Bewegte Uhren gehen nach"

messen längeres Zeitintervall.