Dienstag, 8. November 2011
13:23

5. Geometrie der Raum-Zeit

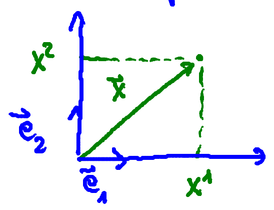
formale Zusammenfügung von Raum + Zeit $\rightarrow$ Minkowski (1903)

5.0. Kovariante vs. kontravariante Darstellung

noch keine SRT, zunächst Spielerei

Einfachheit: 2D-Raum

rechtwinklige Koordinatensysteme

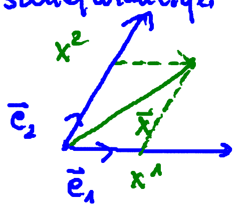


$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$: Einheitsvektoren

x^1, x^2, Koordinaten

schiefwinklige Koordinatensysteme

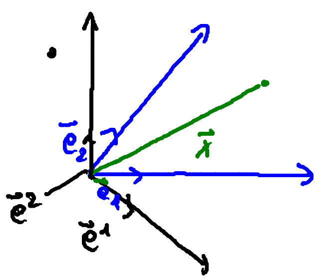


$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2$ (kontravariant)

andere Möglichkeit

$\vec{e}_1 \perp \vec{e}^2$

$\vec{e}_2 \perp \vec{e}^1$



$$\Rightarrow \vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$\vec{x} = x_1 \vec{e}^1 + x_2 \vec{e}^2$ (kovariant)

im Prinzip 1 Koordinatensystem ausreichend

praktischer simultan mit beiden rechnen,

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x_i \vec{e}^i$$

Einsteinsche Summenkonvention

$$A^i B_i = \sum_{i=1}^{2} A^i B_i \qquad \text{(Kontraktion)}$$

Ko und kontravariante Basisvektoren ineinander überführbar

$$\vec{e}^i = \ldots(\vec{e}_j) = g^{ij} \vec{e}_j$$

$$\vec{e}_j = g_{ji} \vec{e}^i$$

metrischer Tensor

g_{ij}: reelle Matrix

5.1. Metrischer Tensor in der SRT

$$s^2 = (ct)^2 - \vec{x}^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

invariant unter LT

invariant unter LT

Zwei Ereignisse:

$$E_1 = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$$
$$E_2 = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$$

Abstand zwischen E_1 und E_2

$$s_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2$$

invariant unter LT

Definiere formal Vierervektor $\quad \mu = 0,1,2,3$

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

fasse s^2 als Skalarprodukt auf

$$\cancel{s^2 = \sum_\mu x^\mu x^\mu = (ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$ nicht vorzeichenrichtig

Verallgemeinerung:

- kontravariante Vektoren: $x^\mu = (ct, x, y, z)$ index oben
- kovariante Vektoren: $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$ index unten

kontra $\longrightarrow$ ko $\quad (x,y,z) \longrightarrow -(x,y,z)$

Skalarprodukt zw. $x^\mu x_\mu$

$$s^2 = \sum_\mu x_\mu x^\mu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

paßt $\rightarrow$ Lorentzinv. Abstand

$$s^2 = x_\mu x^\mu = x^\mu x_\mu$$

Einsteinsche Summenkonvention:

bei doppelt auftretenden Indices in Produkten, wobei jeweils einer oben und einer unten stehen muß, wird automatisch die Summe $\sum_{\mu=0}^{3} \ldots$ ausgeführt.

Mischung von x^μ und x_μ unnötig

Einführen von Metrik (metrischer Tensor)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

4 x 4 Matrix

4 x 4 Matrix

$$(g_{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^T$$

Was tut $g_{\mu\nu}$?

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$
$$= c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$s^2 = x_\mu x^\mu = x_\nu x^\nu$$

$$x_\nu = \sum_{\mu=0}^{3} g_{\nu\mu} x^\mu$$

$$\Rightarrow \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{oder} \quad x_\nu = g_{\nu\mu} x^\mu \quad \begin{pmatrix} \nu \to \mu \\ \mu \to \nu \end{pmatrix}$$

mit $g_{\mu\nu}$ können Indices hoch und heruntergezogen werden.

5.2 Minkowski Raum M

Minkowski Raum M = 4 dim. Vektorraum $\mathbb{R}^4$, wobei ein Punkt $E \in M$ Ereignis / Weltpunkt genannt wird, und der durch die Metrik g eine pseudo-euklidische Struktur besitzt.

Kanon. Basis:

$$\left.\begin{aligned} e_0 &= (1,0,0,0) \\ e_1 &= (0,1,0,0) \\ e_2 &= (0,0,1,0) \\ e_3 &= (0,0,0,1) \end{aligned}\right\} \quad x = x^\mu e_\mu$$

Koordinate von Ereignis:

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}) \quad \in M$$

$$x = x^\mu e_\mu$$

$$\text{"} \underset{x^\mu}{\downarrow} \text{"}$$

allgemeine Lorentztransformation

Σ : Ereignis : x^μ

Σ' mit $\vec{v}$ rel. zu Σ : Ereignis : $x^{\mu'}$

$$x^{\mu'} = \ldots (x^\mu)$$

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu + b^\mu$$

boost = Schubs

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu (\vec{v})$$

$b = 0$ homogene LT

$b \neq 0$ inhomogene LT

$b \neq 0$ inhomogene LT

im folgenden i. Allg. nur homogene LT

Wie sieht Lorentz Transf. Matrix aus?

z.B. (nur in x-Richtung)

$$\left.\begin{aligned} x'^0 &= \gamma\left(x^0 - \frac{v}{c} x^1\right) \\ x'^1 &= \gamma\left(x^1 - \frac{v}{c} x^0\right) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}\right\} \text{LT}$$

$$\curvearrowright \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{LT}$$

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu$$

$$x^\mu = \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu x^{\nu'} + \bar{b}^\mu$$

$$\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{inverse LT}$$

allgemeinster Fall (noch homogen)

i, j von 1..3
nur räumliche Komponenten

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v_x}{c} & -\gamma\frac{v_y}{c} & -\gamma\frac{v_z}{c} \\ -\gamma\frac{v_x}{c} & & & \\ -\gamma\frac{v_y}{c} & & \delta_{ij} + (\gamma-1)\frac{v_i v_j}{v^2} & \\ -\gamma\frac{v_z}{c} & & & \end{pmatrix} \qquad \text{LT}$$

$$\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v_x}{c} & \gamma\frac{v_y}{c} & \gamma\frac{v_z}{c} \\ \gamma\frac{v_x}{c} & & & \\ \gamma\frac{v_y}{c} & & \delta_{ij} + (\gamma-1)\frac{v_i v_j}{v^2} & \\ \gamma\frac{v_z}{c} & & & \end{pmatrix} \qquad \text{inverse LT}$$

$$\left.\begin{aligned} dx^{\mu'} &= \Lambda^\mu{}_\nu \, dx^\nu && \text{Hin Trafo} \\ dx^\mu &= \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu \, dx^{\nu'} && \text{Rück Trafo} \end{aligned}\right| \text{ für Koordinaten-differentiale}$$

Kronecker Delta

$$\delta^\mu{}_\rho \, dx^{\rho'} = dx^{\mu'} \quad \longleftarrow \quad dx^\nu = \bar{\Lambda}^\nu{}_\rho \, dx^{\rho'}$$

$$= \Lambda^\mu{}_\nu \, dx^{\nu}$$
$$= \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu \, \bar{\Lambda}^\nu{}_\varrho}_{=\delta^\mu_\varrho} \, dx^{\varrho\prime}$$

$$\delta^\mu_\varrho \, dx^\varrho = dx^\mu \qquad dx^{\nu\prime} = \Lambda^\nu{}_\varrho \, dx^\varrho$$
$$= \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu \, dx^{\nu\prime}$$
$$= \underbrace{\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu \, \Lambda^\nu{}_\varrho}_{=\delta^\mu_\varrho} \, dx^\varrho$$

Hin + Rück LT bzw. Rück + Hin LT
Nach einander ausgeführt → alten Ergebnis

Vektorbegriff in SRT

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$
$$x^\mu + dx^\mu = (x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$$
$$dx^\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$$

essentiell: Transformationsverhalten unter LT

Jedes Quadrupel von reellen Zahlen
$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$$
und das in jedem IS definiert ist
und sich wie das Differential vom Ortsvektor transformiert
ist ein kontravarianter Vektor

$$A^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu \, A^\nu$$
$$A^\mu = \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu \, A^{\nu\prime}$$

Skalar oder Skalarfeld, d.h. Funktion
$$\varphi(x) = \varphi(x^0, x^1, x^2, x^3),$$
die sich unter LT nicht ändert, Wert bleibt gleich.
d.h. $\varphi'(x') = \varphi'(x^{0\prime}, x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime})$
$$\equiv \varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$$
$$= \varphi(x)$$

beachte: Komponente von Vektor kein Skalar

Änderung bei Wechsel von Koordinatensystem (LT)

Gradient von Skalarfeld $\quad \varphi = \varphi'$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\nu}} \underbrace{\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\nu}} \cdot \bar{\Lambda}^{\nu}{}_{\mu}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x^{\nu'}} \cdot \Lambda^{\nu}{}_{\mu}$$

analog für kovariante Vektoren

$$A'_{\mu} = A_{\nu} \bar{\Lambda}^{\nu}{}_{\mu}$$

$$A_{\mu} = A'_{\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\mu}$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}$$

komplizierte Größe

2 Vektoren $\quad A^{\mu}, B^{\nu}$

$$\left.\begin{matrix} A^{\mu} B_{\nu} \\ A^{\mu} B^{\nu} \end{matrix}\right\} \text{ 16 komp. Größen}$$

erzeugt durch Multiplikation von Vektoren

$$A^{\mu'} B^{\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\varrho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} A^{\varrho} B^{\sigma}$$

$$A'_{\mu} B^{\nu'} = \bar{\Lambda}^{\varrho}{}_{\mu} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} A_{\varrho} B^{\sigma}$$

Tensoren: Größen $T^{\varkappa\lambda\mu\dots}_{\varrho\sigma\tau\dots}$, in allen IS definiert und sich gemäß

$$T'^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots} = \Lambda^{\alpha}{}_{\varkappa} \Lambda^{\beta}{}_{\lambda} \dots \bar{\Lambda}^{\varrho}{}_{\gamma} \bar{\Lambda}^{\sigma}{}_{\delta} \dots T^{\varkappa\lambda\dots}_{\varrho\sigma\dots}$$

transformieren, heißen Tensoren

mit $\quad \varrho\sigma$ – kovariant

$\qquad \varkappa\lambda$ – kontravariant

Skalar: Tensor 0. Stufe, kein Index

Vektor: Tensor 1. Stufe, nur <u>ein</u> Index

Kronecker-Delta: $\quad \delta^{\mu}{}_{\nu} \quad$ Tensor oder nicht?

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} \to \delta'^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \, \delta^{\alpha}{}_{\beta} \, \bar{\Lambda}^{\beta}{}_{\nu}$$

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \bar{\Lambda}^{\alpha}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

$\delta^\mu{}_\nu$ ist Tensor, gleich in jedem IS.

Addition von Tensoren (gleichen Rang)

Multiplikation

- mit Skalar
- äußere Multiplikation

Vektoren

→ höherrangige Tensoren: $x_\mu B_\nu C^\rho$

Tensoren kann man Verjüngen / Kontraktion

Formale Gymnastik mit Hoch und Herunterziehen

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$x_\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$$

metr. Tensor:

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ 1 & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \mu = \nu = 1 \text{ oder } 2 \text{ oder } 3 \end{cases}$$

$$x_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\nu\rho}} x^\rho$$

$$\rightarrow g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\rho = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu = \rho \\ 0 & \mu \neq \rho \end{cases}$$

$g^{\mu\nu}$ inverse Matrix zu $g_{\mu\nu}$ $\quad (g g^{-1} = I)$

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \qquad (g = g^{-1})$$

außerdem $\quad g_{\mu\nu} = g^T_{\mu\nu} \qquad (g = g^T)$

$$g = g^{-1} = g^T$$

als nächstes:

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu$$

$$= x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu$$

$$= x^\mu g^T_{\mu\nu} y^\nu$$

$$= g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = y_\mu x^\mu$$

$$x\cdot x = x^\mu x_\mu = x_\mu \cdot x^\mu$$

5.3. Gymnastik im Minkowski Raum

IS $\Sigma \to \Sigma'$

$$V^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu$$

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$$

$$V_\mu' = g_{\mu\nu} V^{\nu'} = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\varrho V^\varrho$$

$$= \underbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\varrho g^{\varrho\sigma}} V_\sigma$$

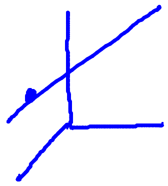
$$V_\mu' = \bar\Lambda^\sigma{}_\mu V_\sigma$$

(Vorsicht $\bar\Lambda$ als inv. LT, $\bar\Lambda^\sigma{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\sigma$)

$$\begin{tikzcd}
V^\alpha \arrow[r, shift left, "\Lambda"] \arrow[d, "g"'] & V^{\alpha'} \arrow[l, shift left, "\bar\Lambda"] \arrow[d, "g"] \\
V_\alpha \arrow[r, shift left, "\bar\Lambda"] & V_\alpha' \arrow[l, shift left, "\Lambda"]
\end{tikzcd}$$

5.4. Eigenzeit

Weltlinie = Bahn von materiellen Teilchen im Minkowski-Raum



≙ Menge aller Ereignisse $x^\mu = (ct, x, y, z)$, die im Laufe der Zeit durchlaufen werden. zwischen 2 Ereignissen

differentielle Änderung

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$$
$$= \text{Lorentzskalar}$$

$$(d\tau)^2 = \frac{(ds)^2}{c^2} = \text{Lorentzskalar}$$

$d\tau$ hat Dim. Zeit

c Lorentz-invariant, hat gleichen Wert in allen IS

zweckmäßiges Bezugssystem Σ'

mitbewegtes IS, in dem Teilchen im Ursprung ruht

$$dx^{\mu'} = (c\,dt', 0, 0, 0)$$

$$(d\tau)^2 = \frac{1}{c^2} dx^{\mu'} dx'_{\mu} = (dt')^2$$

$d\tau$ entspricht Zeitintervall auf mitbewegter Uhr,
Eigenzeit, Lorentz-invariant.

$$c^2 (d\tau)^2 = dx^\mu dx_\mu = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

$$= c^2(dt)^2 \left[1 - \frac{(dx)^2}{c^2(dt)^2} - \frac{(dy)^2}{c^2(dt)^2} - \frac{(dz)^2}{c^2(dt)^2}\right]$$

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{c^2} = \frac{v_x^2}{c^2}$$

$$= c^2(dt)^2 \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]$$

$$= c^2 (dt)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq d\tau$$

Eigenzeit geht stets nach!

Verallgemeinerung auf nicht-inertiale Systeme.

$$\vec{v} = \vec{v}(t)$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}(t)}{c}$$

lokal in der Zeit betrachten

zur Zeit t: Inertialsystem mit $\vec{v}(t)$

zur Zeit $t + dt$: Inertialsystem mit $\vec{v}(t+dt)$

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2(t)}\, dt$$

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt$$

$$= \text{Eigenzeit}$$

5.5. Vierergeschwindigkeit

dx^μ Lorentz-Vektor

$d\tau$ Lorentz-Skalar

c Lorentz-Skalar

ds Lorentz-Skalar

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$d\tau$

$x^\mu = (ct, x, y, z)$

kontravarianter Lorentz Vektor

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dx^\mu}{dt}$$

$$u^\mu = \gamma(\vec{v})\,(c, v_x, v_y, v_z)$$

$$= \gamma(\vec{v})\,(c, \vec{v})$$

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - v^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^{\,2}}\,(c^2 - v^2)$$

$$\boxed{u^\mu u_\mu = c^2}$$