Donnerstag, 1. Dezember 2011
13:56

6. Relativistische Mechanik

Newton Gleichung nur korrekt im Limes $v/c \to 0$

Newton Gleichung nicht Lorentzinvariant

Verallgemeinerung notwendig auf SRT $|v| \leq c$,
die auch Lorentzinvariant ist.

formal:
$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = f^\mu \qquad \text{(Minkowski-Gleichung)}$$

Eigenzeit Viererimpuls Viererkraft

6.1. Minkowski Gleichung

Ausgangspunkt:

1) Newton Gl. $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$ gültig für $v/c \to 0$
2) Betrachte IS Σ', in dem Teilchen zu Zeitpunkt t ruht, momentan gilt

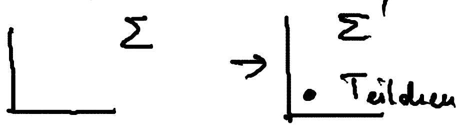
$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{F} \qquad [\text{in } \Sigma'] \qquad (1)$$

die Masse ("Ruhemasse")

Masse ist Lorentzskalar

Strategie:

a) Stelle Lorentzvektorgleichung auf, die sich bei Übergang zu Σ' auf (1) reduziert.



zur Zeit t_0 ruhe Teilchen in Σ' → Newton Gl. gültig

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \quad (i=1,2,3) \longrightarrow u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(ct, \vec{x}) = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)$$
$$= \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right)$$
$$= \frac{dt}{d\tau}(c, \vec{v}), \quad \text{mit } \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$= \frac{dt}{d\tau}(c, \vec{v}) \quad , \text{ mit } \vec{v} = \frac{dx}{dt}$$

$\frac{dt}{d\tau}$ berechnen $\longrightarrow$

$$d\tau^2 = (1-\beta^2)\, dt^2$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma$$

$$\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$$

$$dt = \gamma\, d\tau$$

u^μ transformiert sich unter LT wie x^μ

homogene LT

$$u^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu$$

$$= (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

Ansatz $\quad m \frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu$

Forminvarianz (1 Axiom der SRT)

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu \xrightarrow{\Lambda} m \frac{du^{\mu'}}{d\tau} = f^{\mu'} \qquad (*)$$

b) Bestimmung von f^μ

Limes $v/c \to 0$ betrachten $\quad (*) \longrightarrow$ Newton Gl.

$\Sigma \to \Sigma'$, Σ' bewegt sich mit $\vec{v}$ relativ zu Σ

$$u^{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{d\tau}$$

$$d\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt'$$

<u>$v \ll c$</u>, $v > 0$

$$d\tau = dt'$$

$$u^{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{dt'} = \frac{d}{dt'}(ct', x', y', z')$$

$$= (c, \vec{v}')$$

"*" $\quad m\,\frac{du^{\mu'}}{d\tau} = m\,\frac{du^{\mu'}}{dt'} = \underbrace{m\left(0, \frac{d\vec{v}'}{dt'}\right)}_{\text{lhs von Newton Gl. } m\frac{d\vec{v}'}{dt'}}$

rhs von Ansatz

$$f^{\mu'} = \left(f^{0'}, \vec{f}'\right) \xrightarrow{v/c \to 0} \underbrace{\left(0, \vec{F}\right)}_{\text{rhs von Newton Gl. } \vec{F}}$$

Zurückgehen auf Σ: Rücktransformation mit $-\vec{v}$

$$f^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(-\vec{v})\, f^{\nu'}$$

betrachte zunächst Spezialfall $\vec{v} = v^1 \vec{e}_1$

$$\Rightarrow \quad \Lambda^0{}_0 = \Lambda^1{}_1 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Lambda^0{}_1 = \Lambda^1{}_0 = -\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \beta\gamma$$

mit $-\vec{v}$ sieht f^μ explizit so aus:

$$\begin{pmatrix} f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v^1}{c} & 0 & 0 \\ \gamma\frac{v^1}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{0'} = 0 \\ f^{1'} = F^1 \\ f^{2'} = F^2 \\ f^{3'} = F^3 \end{pmatrix}$$

ausmultiplizieren:

$$f^0 = \gamma\,\frac{v^1}{c}\,F^1 \quad !$$

$$f^1 = \gamma\, F^1 \quad !$$

$$f^2 = F^2$$

$$f^3 = F^3$$

allgemeiner Fall: $\vec{v}$ in beliebige Raumrichtung

$$\boxed{\begin{aligned} f^0 &= \gamma\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{c}, \quad \vec{F} = \vec{F}_{\text{Newton}} \\ \vec{f} &= \vec{F} + (\gamma-1)\,\vec{v}\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{v^2} \\ m\,\frac{du^\mu}{d\tau} &= f^\mu \qquad (*) \\ f^\mu &= \left(f^0, \vec{f}\right) \end{aligned}}$$

Minkowski-Gleichung

relativistische Verallgemeinerung der Newton Gleichung
per Konstruktion transformiert wie Lorentzvektorgleichung

Viererimpuls:

$$p^\mu = m u^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Viererbeschleunigung

$$\frac{d}{d\tau} u^2 = \frac{d}{d\tau} \underbrace{u_\mu u^\mu}_{= c^2} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} u^2 = \frac{d}{d\tau} u_\mu u^\mu = \left(\frac{d}{d\tau} u_\mu\right) u^\mu + u_\mu \left(\frac{d}{d\tau} u^\mu\right)$$

$$= 2 \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu$$

$$\Rightarrow \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du^\mu}{d\tau} \text{ orthogonal zu } u_\mu$$

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \text{Viererbeschleunigung, ist Lorentzvektor}$$

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu$$

$$= \frac{du^\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{du^\mu}{dt}$$

$$= \gamma \frac{d}{dt}\left[\gamma \cdot (c, \vec{v})\right]$$

$$= \gamma \left(\frac{d}{dt}\gamma\right) \cdot (c, \vec{v}) + \gamma^2 \frac{d}{dt}(c, \vec{v})$$

$$\frac{d}{dt}\gamma = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \gamma^3$$

$$\vdots$$

$$= \gamma^2 (0, \vec{a}) + \gamma^4 \frac{va}{c^2} (c, \vec{v})$$

Newtonscher Limes: $v/c \to 0$, $\beta \ll 1$, $\gamma \to 1$

$$a^\mu \longrightarrow (0, \dot{\vec{v}} = \vec{a}) \qquad \text{H.A. } a^\mu \to \mu^\mu (v/c \to 0) \,!$$

allgemein:

$$p^\mu = m u^\mu$$

$$f^\mu = m a^\mu$$

$$p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2$$

$$p^\mu F_\mu = m u_\mu \cdot m a^\mu = m^2 \left(u_\mu \frac{d}{d\tau} u^\mu \right) \equiv 0$$

p^μ und F^μ (als Vierervektoren genommen) orthogonal!

6.2. Äquivalenz von Masse und Energie

nullte Komponente von Minkowski Gl.

$$m \frac{d}{d\tau} u^0 = f^0$$

$$\left.\begin{aligned} u^0 &= \gamma c \\ f^0 &= \gamma \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F} \end{aligned}\right\} \text{ von vorher, 6.1.}$$

$$\curvearrowright \quad m \frac{d}{d\tau} \gamma c = \gamma \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F}$$

m Skalar, in allen IS gleich

$$\gamma \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt}$$

c Skalar, in allen IS gleich

$$\curvearrowright \quad m \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\tau} (\gamma c^2) = \vec{v} \cdot \vec{F}$$

$$m \frac{d}{dt} (\gamma c^2) = \vec{v} \cdot \vec{F}$$

ausschreiben

$$\frac{d}{dt} \Big(\underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{} \Big) = \vec{v} \cdot \vec{F}$$

Analogie zu Newton

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = \vec{F}$$

$$m \vec{v} \frac{d}{dt} \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{F}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m \vec{v}^2) = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad \hat{=} \quad \text{Leistung bzw. Energieänderung}$$

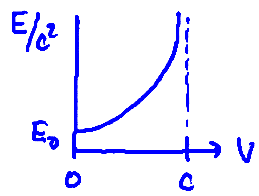
$\frac{mc^2}{(1-v^2/c^2)}$ hat Dim. von Energie

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \gamma m c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \qquad \text{(Einstein-Formel)}$$

als relativistische Form der Energie, d.h. Energieinhalt für Teilchen der Masse m, das sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt.; E keine lorentzinvariante Größe / Lorentzskalar

Teilchen ohne zusätzliches Potential V

Verallgem.: $E = \gamma m c^2 + V$



Bemerkungen:

1) Masse m mit Energie $E = \gamma m c^2$ verbunden und umgekehrt

2) Kernfusion, Kernspaltung, Paarerzeugung, Paarvernichtung: $e^- + e^+ \rightarrow$ Strahlung

Äquivalenz von Masse und Energie: Körper ΔE zu/abführen

$\Rightarrow$ Erhöhung / Erniedrigung der Masse um $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$

3) "Ruheenergie"

$$E(v=0) = E_0 = mc^2$$

kein Freiheit mehr bei Wahl von Energienullpunkt

Minimalwert der mögl. Energie von Teilchen mit Masse m

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \geq 1$$

4) Entwicklung für kleine v/c:

$$E = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right)$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \ldots$$

zusätzliche relativist. Korrekturen

"Ruheenergie" E_0 relativist. Effekt

"klass. kinet. Energie für kleine v

Viererimpuls $p^\mu = mu^\mu = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$

räuml. Komponenten: $p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (nur für $v/c \to 0$ ident. mit p^i_{Newton})

Nullte Komponente von p^μ:

$$p^0 = \gamma mc = \gamma m \frac{c^2}{c} = \frac{E}{c}$$

Energie kein Skalar sondern Komponente von Vierervektor

Viererimpuls alternativ: Energie-Impuls-Vektor

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad \text{mit} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \neq \vec{p}_{\text{Newton}}$$

Zusammenhang zwischen Energie und Impuls

Inertialsystem IS, in dem Massenpunkt ruht

Lorentz-Skalar

$$p^\mu p_\mu = m^2 u_\mu u^\mu = m^2c^2$$

$$p^\mu p_\mu = \underbrace{\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)}_{=p^\mu}\underbrace{\left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right)}_{=p_\mu} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2$$

$\curvearrowright$ $\boxed{E^2 = m^2c^4 + p^2c^2}$ (Einstein's Energie-Impuls-Relation)

brauchbar für Teilchen mit $m \neq 0$ $\rightarrow$ $E = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}}$ $\quad m \neq 0$

Teilchen mit $m = 0$ $\quad E = pc \quad m = 0$

elementare hypothetische Konsequenz: Tachyonen

$E = \gamma m c^2$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ | reell für $v \leq c$; imaginär für $v > c$

E: Meßgröße → E reell → $\gamma m c^2$ reell ⇒ γm reell

falls Reellität von m aufgegeben → m imaginär erlaubt

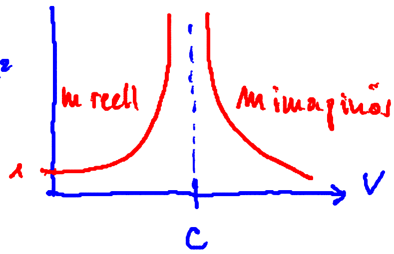
→ Teilchen mit Überlichtgeschwindigkeit möglich.

$m \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow v < c$ Tardyon ←

$m = 0 \Rightarrow v = c$ Luxon

$m \in \mathbb{I} \Rightarrow v > c$ Tachyon

$$\frac{E}{c^2} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$



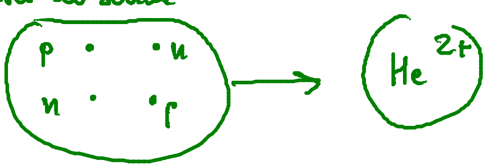
γm reell

bisher keine experimentelle Evidenz dafür

Bsp für Anwendung der Einstein-Formel

Massenverlust bei der Sonne

Kernfusion



$$2p + 2n \rightarrow He^{2+}$$

$$m_{He^{2+}} < 2(m_p + m_n)$$

Fusion erzeugt Massendefekt

$$\Delta m = 2(m_p - m_n) - m_{He^{2+}} \approx 5 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$$

$$\Delta m \rightarrow \Delta E = \Delta m\, c^2$$

ΔE wird frei → meist γ-Strahlung

allgemeiner: Materie / Atome stabil?

Körper aus N Teilchen der Masse m_i $(i = 1, \ldots N)$

Körper hat Masse M und sei in Ruhe, $\vec{v} = 0$

$$E = M c^2$$

$$Mc^2 \neq \sum_{i=1}^{N} m_i c^2$$

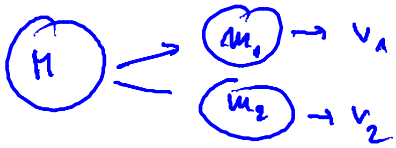
$$M \neq \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Massendefekt $\Delta M = M - \sum_{i=1}^{N} m_i$

Bindungsenergie $\Delta E_B = \Delta M \, c^2$

$N=2$, m_1 und m_2

Körper zerfällt in 2 Teile



$$Mc^2 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}$$

Falls $M > m_1 + m_2 \Rightarrow E_B > 0$

Nur dann spontaner Zerfall möglich

Falls $E_B < 0$, d.h. $M < m_1 + m_2$

Teilchensystem stabil, Spaltung erfordert Energiezufuhr.

6.3. Finale Form der Minkowski Gl. + Folgerungen

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = f^\mu$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \text{Energie Impuls Vektor}$$

1) $v/c \to 0$ $\quad p^\mu \to (mc, m\vec{v})$ $\leftarrow \vec{v}_{Newton}$

$$f^0 \to 0, \quad \text{da } f^0 = \gamma \, \frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{c}$$

$$\vec{f} = \vec{F} + (\gamma - 1)\vec{v}\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{v^2} \xrightarrow{\gamma \to 1} \vec{F} = \vec{F}_{Newton}$$

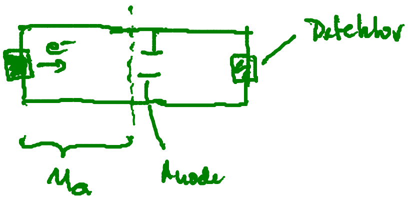
2) abgeschlossenes System, keine äußeren Kräfte $\vec{F} = 0$

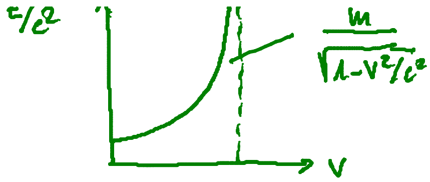
$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad p^\mu = \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E}{c} = \text{const}, \quad E = \gamma m c^2 = \text{const}$$

3) Menge exp. Bestätigung $E = \gamma m c^2$:

Grenzgeschwindigkeitsexperiment von Bertozzi (1964)





4) Newton Mechanik:

$$\frac{d\vec v}{dt} \sim \vec F \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec v}{dt} \parallel \vec F$$

Kraft erzeugt Beschleunigung in Kraft-Richtung

relativistische Mechanik: gilt nicht mehr allgemein!

$$\frac{d\vec v}{dt} \text{ i.a. nicht } \parallel \vec f, \vec F$$

$\boxed{\text{Kraft kann Beschleunigung in andere Richtung verursachen.}}$

$$d\tau = \frac{1}{\gamma}\, dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$$

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu$$

$$m\gamma \frac{d}{dt} u^\mu = f^\mu \qquad f^0 = \gamma \frac{\vec v \cdot \vec F}{c}$$

$$m \frac{d}{dt} u^\mu = \frac{1}{\gamma} f^\mu \qquad \vec f = \vec F + (\gamma - 1)\vec v \, \frac{\vec v \cdot \vec F}{v^2}$$

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec v)$$

1,2,3 Komponenten davon

$$\frac{d}{dt} m\gamma \vec v = \frac{1}{\gamma} \vec f$$

$$\Rightarrow m\gamma \frac{d\vec v}{dt} + m\vec v \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\gamma} \vec f$$

$$\frac{d}{dt} \vec v = \frac{1}{m} \vec f - \underbrace{\frac{1}{m\gamma} \vec v \cdot \frac{d}{dt}(\gamma m)}_{\text{Zusatzterm falls } \vec v \neq \text{const}}$$

$$v/c \to 0 \Rightarrow \gamma \to 1, \ \vec f \to \vec F \qquad \frac{d}{dt}(\gamma m) \to 0$$

i. Allg. Zusatzterm:

$$-\frac{1}{m\gamma} \vec v \cdot \frac{d}{dt}(\gamma m) \quad \text{in } \vec v\text{-Richtung!}$$

6.4 Photonen (im Vorgriff)

Licht / em Wellen → bestehen aus Energiepaketen („Photonen"), die sich mit $v = c$ bewegen.

die sich mit $v = c$ bewegen.

$$E = \gamma m c^2 \qquad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \qquad \Bigg| \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \xrightarrow{v = c} \gamma \to \infty$$

$E, \vec{p} \to \infty$ falls nicht $m = 0$

$\Rightarrow m = 0$, da $E, \vec{p} = \frac{0}{0}$ nichtssagend

Energie Impuls Relation $\Rightarrow$ $E^2 = p^2 c^2$ für $m = 0$

$$E = \pm\sqrt{p^2 c^2} = \pm pc$$

$E_{photon} = p_{photon} \cdot c$ hier nur $+$ betrachten

Energie von Photon $E_{photon} = h\nu$

ν Frequenz Lichtwelle

h Plancksches Wirkungsquantum $h = 6.625 \cdot 10^{-34}$ Js

$$p_{photon} = \frac{E_{photon}}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

λ Lichtwellenlänge

Energie-Impuls-Vektor

$$p^{\mu}_{photon} = \left(\frac{E_{photon}}{c}, \vec{p}\right)$$

nur in x-Richtung bewegend

$$= \left(\frac{E_{photon}}{c}, p_x, 0, 0\right) = \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c}, 0, 0\right)$$

$$p^{\mu}_{photon} \, p_{\mu, photon} = 0$$

Randbem: $E = h\nu = mc^2 \longrightarrow m_{photon} = \frac{h\nu}{c^2}$ "Photonenmasse"

Bsp: Emission von Photon

ruhendes Atom mit Masse m strahlt Photon ab

vorher: m, $\vec{v} = 0$ nachher: $\tilde{m}$, $-v$; ν $\longrightarrow x$

Erhaltung von Energie-Impuls-Vektor benutzen, $\frac{d}{dt} p^{\mu} = 0$, da $f^{\mu} = 0$

0. Komponente: $E = \underbrace{mc^2}_{\text{vorher}} = \underbrace{\gamma \tilde{m} c^2 + h\nu}_{\text{nachher}}$

1. Komponente: $\vec{p} = $ const, $\vec{p}_{vorher} = 0$ $\qquad \vec{p}_{vorher} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0$, $\vec{v} = 0$

$$\underbrace{0}_{\text{vorher}} = \underbrace{-\gamma \tilde{m} v + \frac{h\nu}{c}}_{\text{nachher}}$$

vorher nachher

Frage: $\tilde{m}$ und v ?

$$\tilde{m} = \frac{h\nu}{\gamma v c} \qquad \text{in } E \text{ einsetzen}$$

$$mc^2 = \frac{h\nu}{v} + \frac{h\nu}{c}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{c}{\frac{mc^2}{h\nu} - 1}$$

v wächst monoton mit ν

$$v < c \quad \Rightarrow \quad h\nu < \frac{mc^2}{2}$$

$\tilde{m}$ aus $0 = -\gamma \tilde{m} v + \frac{h\nu}{c}$

$$\tilde{m} = \frac{h\nu}{c^2}\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}$$

$$= \sqrt{m^2 - 2m\frac{h\nu}{c^2}}$$

Grenzfälle

1) $\nu \to 0$: $\quad v \to 0, \quad \tilde{m} \to m$

2) $\nu \to \frac{mc^2}{2h}$: $\quad v \to c, \quad \tilde{m} \to 0$

6.5. Bewegung von Teilchen in Kraftfeldern / Lorentzkraft

geladene Teilchen in elektromagnet. Feldern:

MG in SI

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}$$

Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Umskalierung auf cgs-Version

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \qquad \text{(vgl. Wellengl.)}$$

$$\vec{B} \to \frac{4\pi}{\sqrt{\mu_0}}\vec{B}$$

$$\rho \to \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\rho$$

$$\vec{E} \to \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\vec{E}$$

MG in cgs

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\varrho$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$
$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}$$

Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)$$

MG: $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder $\longrightarrow$ Potentiale ϕ, $\vec{A}$

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t\vec{A} - \nabla\phi\\ \vec{B} &= \operatorname{rot}\vec{A} = \nabla\times\vec{A}\end{aligned}\right\}\ \text{analog zu Physik III}$$

$$\Rightarrow\quad \nabla^2\phi + \frac{1}{c}\partial_t(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -4\pi\varrho$$
$$\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{A} - \nabla\underbrace{\left(\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi\right)}_{\doteq\, 0} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Lorentz Eichung ... $\doteq 0$ weg Eichfreiheit bei $\vec{A}$ und ϕ

$$\Rightarrow\quad \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi = -4\pi\varrho = \Box\phi$$
$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} = \Box\vec{A}$$

Lorentz Kraft: $\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)$

Bewegung von Teilchen mit Masse m und Ladung q in elektromagnet Feld $\{\vec{E},\vec{B}\}$

$\vec{v}$: momentane Geschwindigkeit von Teilchen

$\vec{B} = 0$: $\vec{F}_L \parallel \vec{E}$

$\vec{B} \neq 0$: $F_L \sim \vec{v}\times\vec{B}$ $\quad(\vec{E} = 0)$

Ziel: kovariante Form der Lorentzgleichung finden

Viererkraft durch Viererpotential ausdrücken

Viererpotential?

Ansatz: $\quad A^\mu = (\phi, \vec{A})$

im folgenden zeigen, dass A^μ geeignet ist!

$$\vec{F}_L = q\left[-\frac{1}{c}\partial_t\vec{A} - \nabla\phi + \vec{v}\times\nabla\times\vec{A}\right]$$

benutze $\quad \nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} + \vec{a}\times(\nabla\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a})$

$\vec{a} = \vec{v}$, nicht explizit $\vec{r}$-abhängig

$\vec{a} = \vec{v}$, nicht explizit $\vec{r}$-abhängig
$\vec{b} = \vec{A}$

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$$

$$\curvearrowright \vec{F}_L = -q\nabla\phi - \frac{q}{c}\partial_t \vec{A} + \frac{q}{c}\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{q}{c}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \partial_t \vec{A} + \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\frac{dx_i}{dt}}_{=v_i} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} = \partial_t \vec{A} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$$

$$\curvearrowright \vec{F}_L = -q\nabla\phi - \frac{q}{c}\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{q}{c}\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) \qquad (\alpha)$$

Kovariante Form:

$$F^\mu = \frac{q}{c}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} u_\nu A^\nu - \frac{d}{d\tau} A^\mu\right)$$

Eigenzeit

da:

1) u^μ, A^μ } Vierervektoren

$\frac{d}{d\tau}$ Ableitung nach Eigenzeit

2) $u_\nu A^\nu$ Lorentz invariante

3) $\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\nabla\right)$ da $x_\mu = (ct, -\vec{r})$

↗ kontravariant

4) $u_\mu A^\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} A^\mu$

$$\frac{dx_0}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} ct = \gamma c$$

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} x_i = -\gamma \frac{d\vec{x}}{dt} \qquad i = 1,2,3$$

$$= -\gamma \vec{v}$$

$$\frac{dx_0}{d\tau} A^0 = \gamma c \phi$$

$$\frac{dx_i}{d\tau} A^i = -\gamma \vec{v}\cdot\vec{A}$$

$$\Rightarrow u_\mu A^\mu = \gamma(c\phi - \vec{v}\cdot\vec{A})$$

in F^μ einsetzen:

1–3 Komponente

$$\vec F = \frac{q}{c}\left(-\nabla\,\gamma\,(c\phi - \vec v\cdot\vec A) - \gamma\,\frac{d}{d\tau}\vec A\right)$$

$$\vec F = \gamma\left(-q\nabla\phi + \frac{q}{c}\nabla\cdot(\vec v\cdot\vec A) - \frac{q}{c}\frac{d}{dt}\vec A\right)$$

fast identisch mit alter Lorentz-Kraft (*)

einziger Unterschied: Vorzahl γ

$v/c \to 0:\ \gamma \to 1 \qquad \vec F = \vec F_L$

0 Komponente

$$F^0 = \frac{q}{c}\left[\frac{\partial}{\partial(ct)}\left((\gamma c\phi - \vec v\cdot\vec A) - \gamma\frac{d}{d\tau}\phi\right)\right]$$

umformen auf $\quad \frac{d}{dt}\phi = \partial_t\phi + (\vec v\cdot\nabla)\phi$

$$\leadsto\ F^0 = \gamma\,\frac{q}{c}\left[-\vec v\cdot\nabla\phi - \frac{1}{c}\vec v\cdot\partial_t\vec A\right]$$

Nachweis: HA.

Minkowski Gl.: $\quad \frac{d}{d\tau}p^\mu = f^\mu$

$$f^0 = \frac{\gamma}{c}\vec v\cdot\vec F$$

$$\vec v\cdot\vec F = \frac{d}{dt}\gamma mc^2 = \frac{d}{dt}E$$

Energie

$$f^0 = \frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau}$$

Identifiziere $\quad \vec E = -\frac{1}{c}\partial_t\vec A - \nabla\phi$

$$\Rightarrow\quad \frac{dE}{dt} = q\,\vec v\cdot\vec E \qquad (\text{„Ohmsches Gesetz"})$$

elektr. Feld gibt Leistung ab, wenn ruhende Teilchen beschleunigt wird

$\vec B$ leistet keine Arbeit, da Kraft $\sim \vec v\times\vec B$ steht $\perp \vec v$

Fazit: Lorentz-Gleichung

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}p^\mu = f^\mu = F^\mu\\ \text{mit}\quad &F^\mu = \frac{q}{c}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\nu A^\nu - \frac{d}{d\tau}A^\mu\right)\end{aligned}}$$

Nicht relativist. Limes: $v/c \to 0$, $\gamma \to 1$

$\vec{B}$ - Feld Term in Lorentzkraft $\to 0$

Kopplung von $\vec{B}$-Feld in Lorentzkraft schon ein (versteckter) relativist. Effekt.

6.6 Raumzeit Diagramme / Minkowski-Diagramme

„Längenquadrat" Lorentzinvariant

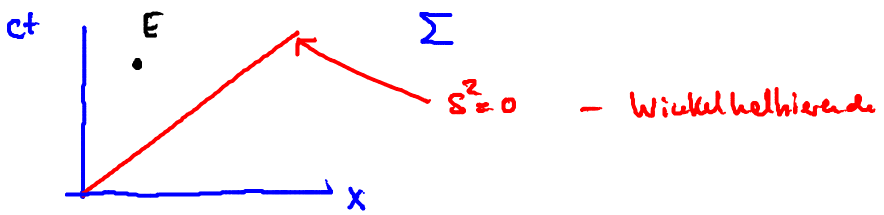
$$s^2 = c^2t^2 - \vec{r}^{\,2} = x_\mu x^\mu$$

Invariant unter LT

$$x^\mu = (ct, \vec{r})$$

Raum   Zeit

Im folgenden zur Vereinfachung 1 + 1 Dimensionen



$$s^2 = 0 \Rightarrow c^2t^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (ct)^2 = x^2 \Rightarrow \frac{x}{t} = c$$

Ereignis $E = (ct, x)$

Σ Raum & Zeitachsen senkrecht

Σ' ? , bewegt sich mit v bzgl. Σ

$t = t' = 0$

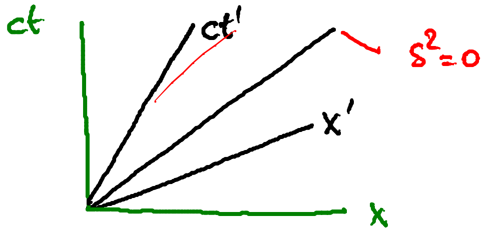
Ursprung Σ, Σ' identisch

Zeitachse in Σ': $x' = \gamma(x - vt) = 0$

$$\Rightarrow x = vt$$

$$\Rightarrow ct = \frac{1}{\beta} x = \frac{c}{v} x$$

Σ' Zeitachse bezogen auf Σ: Gerade mit Steigung $\frac{1}{\beta} > 1$



Σ' Raumachse bezgl. auf Σ

Σ' Raumachse bezg auf Σ

$$t' = 0 = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

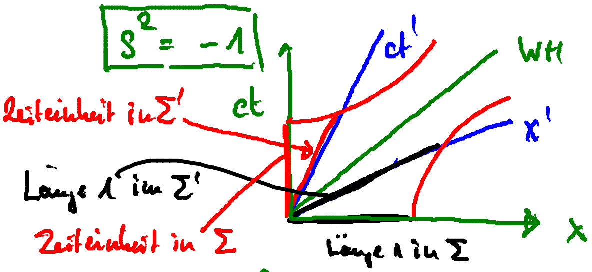
$$\Rightarrow ct = \beta x$$

Σ' Raumachse: Gerade mit Steigung $\beta < 1$

Lorentz Transformation $\Sigma \to \Sigma'$

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$$

$$\boxed{s^2 = -1}$$



Orte, die $s^2 = -1$ erfüllen

$$-1 = c^2t^2 - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = c^2t^2 + 1 \quad \rightarrow \text{Hyperbel-Gleichung}$$

$$\boxed{s^2 = +1}$$

Orte, die $s^2 = +1$ erfüllen

$$+1 = c^2t^2 - x^2$$

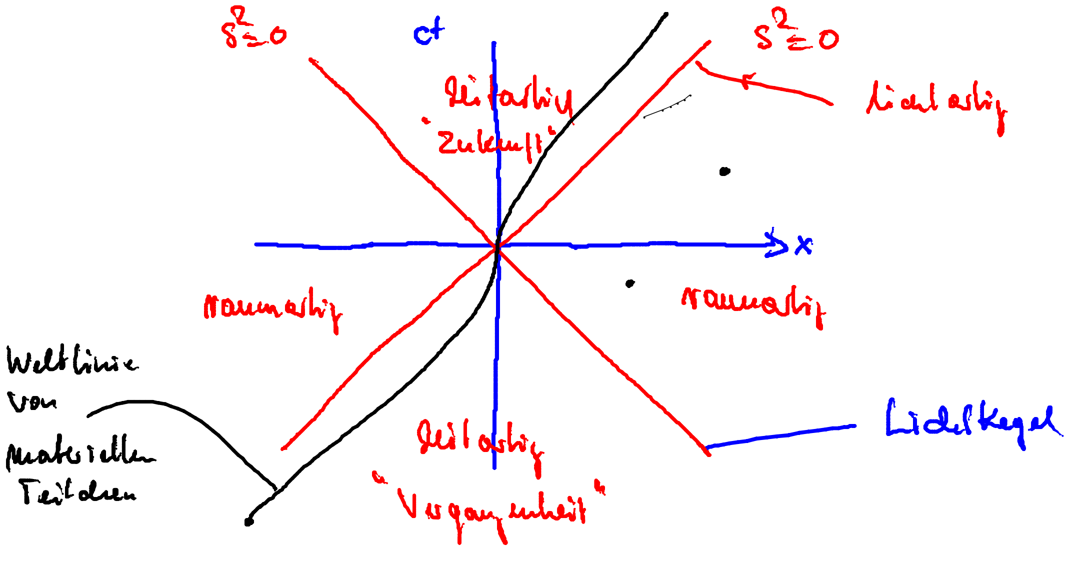
$$c^2t^2 = x^2 + 1 \quad \rightarrow \text{Hyperbel-Gleichung}$$

„Längenquadrat" $s^2 = c^2t^2 - x^2$

$s^2 > 0$ zeitartig

$s^2 = 0$ lichtartig

$s^2 < 0$ raumartig



raumartige Vektoren außerhalb von Lichtkegel

s^2 Lorentzinvariant $\rightarrow$ bleiben raumartig

analog zeitartige Vektoren bleiben zeitartig

2 Ereignisse $\quad E_A = (ct_A, x_A) \qquad t_A > t_B$

$\qquad E_B = (ct_B, x_B) \qquad x_A > x_B$

$$s_{AB}^2 = c^2 (t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2$$

raumartig $\quad s_{AB}^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x_A - x_B}{t_A - t_B} > c$

keine kausale Verbindung möglich

zeitartig $\quad s_{AB}^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x_A - x_B}{t_A - t_B} < c \qquad$!

durch Lichtsignal verbindbare Ereignisse
kausale Korrelation möglich