7. Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Vorbemerkungen: ko vs. kontravariante Ableitungen

Skalarfeld $\phi(x) = \phi(x^\mu)$

$$\phi(x') = \phi(x) \Rightarrow \phi(x'^\mu) = \phi(x^\mu)$$

inv. LT

Ableitungen

$$\frac{\partial \phi(x'^\mu)}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial \phi(x^\mu)}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial \phi(x^\mu)}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} = \bar{\Lambda}^\nu{}_\lambda \frac{\partial \phi(x^\mu)}{\partial x^\nu}$$

wg: $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu$, $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu$

$\frac{\partial \phi}{\partial x^\lambda}$ transformiert sich wie kovarianter Vektor

$$\rightarrow \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{kovariante Abl.}$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad \text{kontravariante Abl.}$$

!

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \text{Lorentzskalar}$$

explizit: $x^\mu = (ct, \vec{r})$, $x_\mu = (ct, -\vec{r})$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \vec{\nabla}\right), \quad \partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\vec{\nabla}\right)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c}\partial_t^2 - \nabla^2 =: \Box$$

Ausgangspunkt MG

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{B} \quad (4)$$

$\vec{A}$ und ϕ als Potentiale

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{A} - \nabla\phi$$

Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$$

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \quad \rightarrow \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

falls $j^\mu = (c\varrho, \vec{j}) =$ Viererstromdichte

Lorentz-skalare Gleichung

Potentialgleichungen der ED (aus ME)

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2\right)\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2\right)\phi = 4\pi\varrho = \frac{4\pi}{c}c\varrho$$

(*) Lorentz-Eichung schon benutzt!

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2 = \partial_\mu\partial^\mu = \Box$$

$$\Rightarrow \boxed{\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu}$$

$A^\mu := (\phi, \vec{A}) =$ Viererpotential

Lorentz-Eichung

$$\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi = 0$$

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0}$$

Feldstärketensor:

$$\Box A^\mu = \partial_\nu\partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \qquad (A)$$

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \Rightarrow \partial^\mu\partial_\nu A^\nu = \partial_\nu\partial^\mu A^\nu = 0 \qquad (B)$$

Subtrahiere (B) von (A)

$$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu - \partial_\nu\partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$\partial_\nu \underbrace{\left[\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu\right]}_{\text{kontravarianter Tensor } F^{\nu\mu}} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \quad \leftarrow$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

= elektromagnet. Feldstärke Tensor

$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu}$$

Eigenschaften von $F^{\nu\mu}$

1) $\text{diag } F^{\nu\mu} = (0, 0, 0, 0)$ antisymmetrisch

$\text{Sp } F^{\nu\mu} = 0$

2) $F^{\nu\mu} = - F^{\mu\nu}$ für einzelne Komponenten

3) $F^{\nu\mu}$ invariant unter Eichtransformation

$A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu \varphi$, φ : skalare Fkt

$$\tilde{F}^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \cancel{\partial^\nu \partial^\mu \varphi} - \partial^\mu A^\nu + \cancel{\partial^\nu \partial^\mu \varphi} = F^{\nu\mu}$$

Levi-Civitá Tensor: $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 1$ falls $\mu\nu\rho\sigma$ gerade Permutation von 0 1 2 3

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -1$ falls $\mu\nu\rho\sigma$ ungerade Permutation von 0 1 2 3

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ sonst

total antisymmetrischer Tensor

Produkt:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = - \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta & \delta^\mu_\gamma & \delta^\mu_\delta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \delta^\sigma_\alpha & \delta^\sigma_\beta & \delta^\sigma_\gamma & \delta^\sigma_\delta \end{vmatrix} \leftarrow \sigma - \text{Reihe}$$

$\uparrow$ γ - Spalte

Verjüngung $\delta = \sigma$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} = - \begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta & \delta^\mu_\gamma \\ \delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta & \delta^\nu_\gamma \\ \delta^\rho_\alpha & \delta^\rho_\beta & \delta^\rho_\gamma \end{vmatrix}$$

weitere Verjüngung: $\delta = \sigma, \gamma = \rho$

$\uparrow$ γ - Spalte

Verjüngung $\delta = \sigma$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} = -\begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta & \delta^\mu_\gamma \\ \delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta & \delta^\nu_\gamma \\ \delta^\rho_\alpha & \delta^\rho_\beta & \delta^\rho_\gamma \end{vmatrix}$$

weitere Verjüngung: $\delta = \sigma,\ \gamma = \rho$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2\begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta \\ \delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta \end{vmatrix}$$

noch weitere Verjüngung $\delta = \sigma,\ \gamma = \rho,\ \nu = \beta$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} = -6\,\delta^\mu_\alpha$$

letzte Verjüngung $\delta = \sigma,\ \gamma = \rho,\ \nu = \beta,\ \mu = \alpha$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 24$$

$F^{\nu\mu}$: kontravarianter Feldstärke Tensor (2fach kontrav.)

kovariante Version von $F^{\nu\mu}$

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\nu}\, g_{\beta\mu}\, F^{\nu\mu}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

vgl zu $F^{\nu\mu}$:

Vorzeichen von $\vec{E}$-Komponente invertiert

Vorzeichen von $\vec{B}$-Komponente gleich

duale Feldstärke Tensor:

$$\mathcal{F}^{\nu\mu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\nu\mu\lambda\rho}\, F_{\lambda\rho} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

$F^{\nu\mu} \longrightarrow \mathcal{F}^{\nu\mu}$ durch Ersetzen

$$\left.\begin{matrix} \vec{B} \text{ für } \vec{E} \\ -\vec{E} \text{ für } \vec{B} \end{matrix}\right\} \text{ in } F^{\nu\mu}$$

es gilt: $\partial_\mu \overline{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = 0$

äquivalent $\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0$ (Jacobi Identität)

entsprechen homogenen Maxwell-Gleichungen.

Nachweis
$$\left.\begin{aligned} \partial^\mu F^{\nu\lambda} &= \partial^\mu\partial^\nu A^\lambda - \partial^\mu\partial^\lambda A^\nu \\ \partial^\nu F^{\lambda\mu} &= \partial^\nu\partial^\lambda A^\mu - \partial^\nu\partial^\mu A^\lambda \\ \partial^\lambda F^{\mu\nu} &= \partial^\lambda\partial^\mu A^\nu - \partial^\lambda\partial^\nu A^\mu \end{aligned}\right\} \text{addieren} \Rightarrow 0$$

insgesamt ED Grundgleichungen:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \qquad \leftarrow \text{inhomogene MG}$$

$$\varepsilon^{\varkappa\lambda\nu\mu}\, \partial_\lambda F_{\nu\mu} = 0 \qquad \leftarrow \text{homogene MG}$$

Transformationsverhalten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$

$F^{\mu\nu}$ Lorentz Tensor

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_{\ \lambda}\, \Lambda^\nu_{\ \rho}\, F^{\lambda\rho}$$

$\Sigma \to \Sigma'$ nur in x-Richtung, d.h. $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$

$\leadsto$

$$E_x' = E_x \qquad\qquad B_x' = B_x$$

$$E_y' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(E_y - \beta B_z\right) \qquad\qquad B_y' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(B_y + \beta E_z\right)$$

$$E_z' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(E_z + \beta B_y\right) \qquad\qquad B_z' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(B_z - \beta E_y\right)$$

Feldstärke Tensor $F^{\mu\nu}$ und nicht getrennte Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ liefern konsequente relativ. Beschreibung von elektromagn. Feld

allgemeiner: $\vec{v}$ in beliebige Richtung zeigend

$$\vec{B}' = \gamma\vec{B} - \frac{\gamma-1}{v^2}(\vec{B}\cdot\vec{v})\vec{v} - \frac{\gamma}{c}(\vec{v}\times\vec{E})$$

$$\vec{E}' = \gamma \vec{E} - \frac{\gamma - 1}{v^2}(\vec{E}\cdot\vec{v})\,\vec{v} + \frac{\gamma}{c}(\vec{v}\times\vec{B})$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

In IS Σ mit reinem magnet. Feld $\vec{B}$, $\vec{E} = 0$

Übergang zu IS Σ', das sich mit $\vec{v}$ relativ zu Σ bewegt:

→ zusätzliche elektrische Feldkomponenten treten in Σ' auf!

in Σ reine $\vec{E}$ oder $\vec{B}$-Feld

⇒ in Σ' Kombination von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Feldern !

$$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel \qquad\qquad \parallel, \perp \text{ zu } \vec{v}$$

$$\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel$$

$$\vec{E}'_\perp = \gamma\left(\vec{E}_\perp + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{B}'_\perp = \gamma\left(\vec{B}_\perp + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}\right)$$

Lorentz-Kraft:

$$F^\mu = \frac{q}{c}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} u_\nu A^\nu + \frac{d}{d\tau} A^\mu\right)$$

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} u^\nu$$

$$F^\mu = \frac{q}{c}\underbrace{\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)}_{F^{\mu\nu}} u_\nu$$

$$F^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

Lorentzkraftgleichung:

$$\boxed{m \frac{d}{d\tau} u^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu}$$

Formulierung von Lorentzkraft mit Hilfe Feldstärketensor

Exkurs: relativistische Hydrodynamik (ideal)

p = Druck, μ: Energiedichte von Fluid

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\mu + p)\, u^\mu u^\nu - p\, g^{\mu\nu}$$

$$\mu = \rho c^2 + \varepsilon$$

μ, ρ, ε Skalar

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = f^\mu$$

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (f^\mu = 0)$$

Lorentz-Invarianten des elektromagnet. Feldes

Kombination von Lorentz-Skalaren aus Feldstärke Tensor mittels Kontraktion / Verjüngung

T : Lorentztensor

$$\left.\begin{array}{l} T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \\ T_{\mu\nu} T^{\nu}{}_{\gamma} T^{\gamma\mu} \\ T_{\mu\nu} T^{\nu\gamma} T_{\gamma\varepsilon} T^{\varepsilon\mu} \end{array}\right\} \text{Lorentz-Skalare}$$

$T \to F$, $T^{\mu\nu} \to F^{\mu\nu}$ Feldstärketensor

1) $F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} = 2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) = I_1$

2) $F_{\mu\nu} F^{\nu}{}_{\gamma} F^{\gamma\mu} = 0$

3) $F_{\mu\nu} F^{\nu\gamma} F_{\gamma\varepsilon} F^{\varepsilon\mu} = 2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + 4(\vec{E}\cdot\vec{B})^2 = I_2$

$\Rightarrow$ $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ = invariant unter LT

$\vec{E}\cdot\vec{B}$ = invariant unter LT

Folgerungen für $\vec{E}, \vec{B}$-Feld

1) IS mit $\vec{E} \perp \vec{B}$ $\Rightarrow$ in allen IS $\vec{E} \perp \vec{B}$

falls $I_1 > 0$: $\exists$ IS mit $\vec{B} = 0$

falls $I_1 < 0$: $\exists$ IS mit $\vec{E} = 0$

2) Falls in einem IS $\vec{E} = 0$ oder $\vec{B} = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{E} \perp \vec{B}$ in allen anderen IS

3) Gibt es IS mit $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ $\Rightarrow$ $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ in allen IS

3) Gibt es IS mit $|\vec{E}| = |\vec{B}| \Rightarrow |\vec{E}| = |\vec{B}|$ in allen IS

Doppler Effekt, relativistisch

Lösungen der MG → monochromatische ebene Welle im ladungsfreien Raum:

$2\pi\nu$: Kreisfrequenz

Wellenzahlvektor

$$\Box A^\mu = 0$$

$$A^\mu(x) = A_0^\mu \, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}$$

↑ Konstanter Vierervektor

$\vec{k}$ in Propagationsrichtung von Welle

$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ = Wellenlänge

$\phi = \omega t - \vec{k}\vec{x}$ als Phase

ϕ invariant unter Lorentz Transformation $\Sigma \to \Sigma'$

$$\phi = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} = \omega' t' - \vec{k}'\cdot\vec{x}'$$

Vierervektor:

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$

$$x^\mu = ct, \vec{x}$$

$$k^\mu x_\mu = \phi$$

Dispersionsrelation

Lösungsbedingung: $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \vec{k}^2 = 0$ Lorentzinvariant

relativ. Doppler Effekt

Lorentz Transf. von Wellenzahlvektoren

Σ' relativ zu Σ in positive x^1 Richtung

$$\Sigma: \quad k^\mu = (1, \cos\theta, \sin\theta, 0) \quad \to \quad \frac{\omega}{c} = k$$

$$\Sigma': \quad k'^\mu = (1, \cos\theta', \sin\theta', 0) \quad \to \quad \frac{\omega'}{c} = k'$$

$$k'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, k^\nu$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zeitliche Komp. von k^μ $\longrightarrow$ $k'^0 = \frac{\omega'}{c}$

$$\Rightarrow \quad \omega' = \omega \, \frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

andere Komp. $\quad \cos\theta' = \dfrac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta}$

$$\sin\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\,\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}$$

Abberationsformeln für Licht bei Übergang von $\Sigma \to \Sigma'$

Longitudinaler Doppler Effekt

$\vec{k}$ in $\vec{v}$-Richtung $\Rightarrow$ $\theta = \theta' = 0$

$$\Rightarrow \quad \omega' = \omega \cdot \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \simeq \omega\,(1-\beta) + \mathcal{O}(\beta^2)$$

linear in v

$\rightarrow$ Rot/Blau Verschiebung

transversaler Doppler Effekt

$\vec{k} \perp \vec{v}$-Richtung $\Rightarrow$ $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq \omega\,\left(1+\tfrac{1}{2}\beta^2\right) + \mathcal{O}(\beta^4)$$

quadratisch in v

$\longleftarrow$