8. Ausgewählte Effekte der SRT

a) beschleunigte Bezugssysteme

b) relativist. Raumfahrt

c) Terrell-Effekt

8.1. beschleunigte Bezugssysteme

IS Σ: $\quad m \frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu = f^\mu$

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

$$x^\mu = x^\mu(x'^\mu)$$

Kettenregel $\quad \frac{d}{d\tau} x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{d\tau}$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x^\alpha = m \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{dx'^\mu}{d\tau} \frac{dx'^\nu}{d\tau} + \frac{dx^\alpha}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{d^2 x'^\mu}{d\tau^2} \right) = f^\mu$$

mit $\frac{dx'^\lambda}{dx^\alpha}$ multiplizieren

und beachten, dass $\quad \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\mu} = \delta^\lambda_\mu$

Def: $\quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}$

$\quad f'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} f^\alpha \qquad$ transf. Kraft

$$\Rightarrow \quad m \left(\frac{d^2}{d\tau^2} x'^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx'^\mu}{d\tau} \frac{dx'^\nu}{d\tau} \right) = f'^\lambda$$

Christoffel Symbol

ART: $\quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$

in SRT

$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \longrightarrow$ ART: $\quad g_{\mu\nu}(x)$

8.2. Relativistische Raumfahrt

Universum $\sim 10^{10}$ Ly

Kann man mit Raumschiff Grenze von Universum innerhalb eines Lebensalters $\sim 70\,y$ erreichen

Beschleunigung mit konst $g \simeq 10\,\frac{m}{s^2}$

Klassisch Newton: $v = gt \to$ nicht gut! c berücksichtigen!!

Zusammenhang zwischen

Σ System Erde

Σ' System Rakete

Transformation von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

$$\left.\begin{aligned} d\vec{r}\,' &= d\vec{r} + \vec{v}\left[(\gamma-1)\frac{\vec{v}\cdot d\vec{r}}{v^2} - \gamma\, dt\right] \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{\vec{v}\cdot d\vec{r}}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \text{LT}$$

$\vec{u} \to \vec{u}\,'$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{u}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'}$$

$\vec{u}\,'$ explizit:

$$\vec{u}\,' = \frac{\vec{u} - \vec{v}\left[\gamma\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2}\right) + \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2}\right]}{\gamma\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)}$$

$$\vec{u}\,' = \text{-----} \quad \{\vec{u} \leftrightarrow \vec{u}\,',\ \vec{v} \to -\vec{v}\}$$

$\frac{d\vec{u}\,'}{dt'}$ explizit:

$$\frac{d\vec{u}\,'}{dt'} = \frac{\frac{d\vec{u}}{dt} + (\gamma-1)\left(\frac{\vec{v}}{v}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}\right)\frac{\vec{v}}{v}}{\gamma^2\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)^2} + \left(\frac{\vec{u}}{c^2}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}\right)\cdot\frac{\vec{u}\,'}{\gamma\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)}$$

noch durch $\vec{u}$ ersetzen

Momentanes Ruhesystem: $\vec{u} = \vec{v}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}\,'}{dt'} = \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\vec{u}}{dt}$$

Annahme $\vec{u} \parallel \frac{d\vec{u}}{dt}$

konst. Beschleunigung mit g

$$\frac{d\vec{u}\,'}{dt'} = g \quad \text{im Ruhesystem von Raumfahrer}$$

Integration
$$qt = \int_0^u \frac{dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}^{\,3}} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\wedge \quad u = \frac{qt}{\sqrt{1+\frac{q^2t^2}{c^2}}}$$

$$t = 1y \longrightarrow u = 0.75\,c$$
$$t = 2y \longrightarrow u = 0.95\,c$$

Zurückgelegte Strecke x
$$x = \int_0^t u(\alpha)\,d\alpha = g\int_0^t \frac{\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1+\frac{g^2\alpha^2}{c^2}}}$$
$$x(t) = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+g^2t^2/c^2} - 1\right)$$

Eigenzeit τ im Raumschiff
$$\tau = \int_0^t \sqrt{1-\frac{u^2(\alpha)}{c^2}}\,d\alpha$$

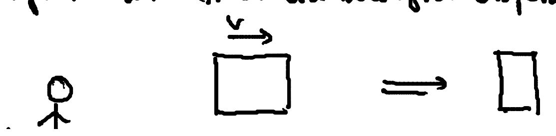
$$\tau = \frac{c}{g}\ln\left(\frac{gt}{c} + \sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}\right)$$
$$x = \frac{c^2}{g}\left[\cosh^2\left(\frac{g\tau}{c}\right) - 1\right]$$

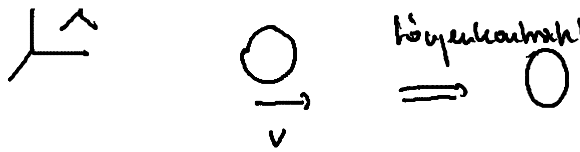
Einsetzen von Zahlen $x \sim 10^{10}$ Ly
$$\Rightarrow \quad \tau \sim 25\,y$$
$$\Rightarrow \quad t = 10^{10}\,y$$

Frage / Problem: Antrieb?
Photonenmotor?

8.3. Terrell-Effekt

Frage: Wie sieht ein bewegtes Objekt eigentlich aus, wenn $v/c < 1$?

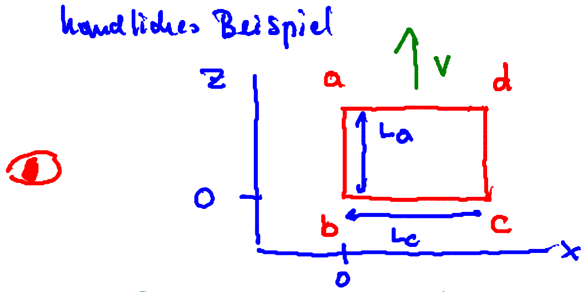




Längenkontraktion (nur in Bewegungsrichtung)

Nicht inkorporiert bisher: Tatsache, dass Licht von weiter entfernten Punkten länger braucht, um das Auge des Beobachters zu erreichen.

handliches Beispiel



1) Rechteck a, b, c, d bewegt sich mit v in z-Richtung

2) Beobachter weit genug entfernt, so dass Lichtstrahlen als parallel angenommen werden können

Ruhesystem von Rechteck Σ' (mit v bewegt)

$$a'^\mu = (a'^0, 0, 0, L_a)$$
$$b'^\mu = (b'^0, 0, 0, 0)$$
$$c'^\mu = (c'^0, L_c, 0, 0)$$
$$d'^\mu = (d'^0, L_c, 0, L_a)$$

LT auf Ruhesystem Σ von Beobachter

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt:

$$a^\mu = (\gamma a'^0 + \beta\gamma L_a, 0, 0, \gamma L_a + \beta\gamma a'^0)$$
$$b^\mu = (\gamma b'^0, 0, 0, \beta\gamma b'^0)$$
$$c^\mu = (\gamma c'^0, L_c, 0, \beta\gamma c'^0)$$
$$d^\mu = (\gamma d'^0 + \beta\gamma L_a, L_c, 0, \gamma L_a + \beta\gamma d'^0)$$

Punkte a und b: gleicher Abstand vom Beobachter

ausgehende Lichtstrahlen kommen gleichzeitig an, wenn gleichzeitig ausgesandt

$$\Rightarrow \quad a^0 = b^0$$

Punkte c und d sind um Strecke L_a weiter

Punkte c und d sind um Strecke L_c weiter entfernt von Beobachter $\Rightarrow$
Licht muß früher, d.h. $\Delta t = \frac{L_c}{c}$ früher ausgesandt worden sein, damit es gleichzeitig mit Licht von a und b bei Beobachter ankommt.

$$c^0 = d^0 = a^0 - L_c$$

in LT transformierte Formeln

$$b'^0 = 0$$

$$\Rightarrow b^0 = a^0 = 0$$

$$c^0 = d^0 = a^0 - L_c = -L_c$$

$$\Rightarrow \gamma c'^0 = -L_c$$

$$\gamma d'^0 = -L_c - \gamma\beta L_a$$

$$\gamma a'^0 = -\beta\gamma L_a$$

außerdem:

$$a^3 = \gamma L_a - \beta\gamma a'^0 = \frac{1}{\gamma} L_a$$

$$d^3 = \gamma L_a + \beta\gamma d'^0 = -\beta L_c + \frac{L_a}{\gamma}$$

$$a^\mu = (0, 0, 0, \frac{L_a}{\gamma})$$

$$b^\mu = (0, 0, 0, 0)$$

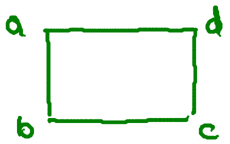
$$c^\mu = (-L_c, L_c, 0, -\beta L_c)$$

$$d^\mu = (-L_c, L_c, 0, \frac{L_a}{\gamma} - \beta L_c)$$

$x^3 = z$

a^3: L_a/γ
d^3: $L_a/\gamma - \beta L_c$
b^3: 0
c^3: $-\beta L_c$

auf Auge von Beobachter werden x^3-Koordinate so projiziert



$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \beta L_c : \quad \beta L_c \xrightarrow[\beta \to 0]{} 0 \Rightarrow a^3 \leftarrow d^3$$

Faktor $1/\gamma$ als Winkel α parametrisieren:

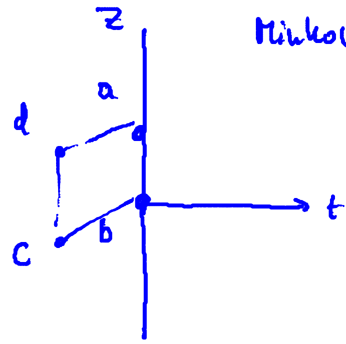
$\cos\alpha = \frac{1}{\gamma}$ definiert α

$\sin\alpha = \beta$ aus $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

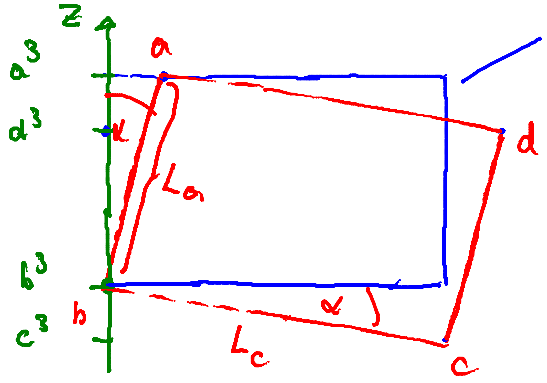
$\beta = \frac{v}{c}$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Beobachter erscheint Rechteck gedreht um Winkel α

Minkowski:



vom Standpunkt vom Beobachter im Euklid. Raum



$\beta = 0$ or $\gamma = 1$
bzw $\beta \ll 1$

J. Terrell: Invisibility of the Lorentz contraction
Phys. Rev. 116, 1041 (1959)

8.4 Maßstab / Garagenparadoxon

Stab

$\vec{\beta} = v/c$

$\beta = \sqrt{3}/2$

$\Rightarrow \gamma = 2$

Bezugssystem Garage: → Länge vom Stab → $\tilde{L} = \frac{L}{2}$ ✓

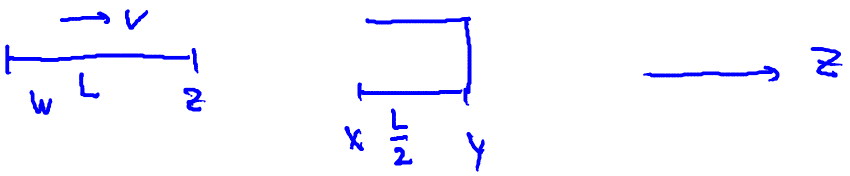
Bezugssystem Stab: → Länge von Garage → $\tilde{L}_G = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{L}{2} = \frac{L}{4}$?

Problem (?)

„Garagenwand ausstoßen"

„Schließen von Tür", wenn Ende von Stab durch Garageneingang geht, nicht in allen IS gleichzeitig

Nur in Garagensystem gleichzeitig



Σ' Ruhesystem von Stab (mit v bewegt)

Σ Ruhesystem von Garage

$$\left.\begin{aligned} w' &= (w'^0, 0, 0, 0) \\ z' &= (z'^0, 0, 0, L) \end{aligned}\right\} \text{Stab}$$

$$\left.\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, 0, 0, x^3) \\ y^\mu &= (y^0, 0, 0, x^3 + \tfrac{L}{2}) \end{aligned}\right\} \text{Garage}$$

Stangenkoordinate im Bezugsystem von Garage

$$\left.\begin{aligned} a^0 &= \gamma a'^0 + \beta\gamma a'^3 \\ a^3 &= \gamma a'^3 + \beta\gamma a'^0 \end{aligned}\right\} \text{LT in z-R.} \quad \text{mit } \gamma = 2, \ \beta = \sqrt{3}/2$$

$$\Rightarrow \quad w^\mu = (2w'^0, 0, 0, \sqrt{3}\, w'^0)$$

$$z^\mu = (2z'^0 + \sqrt{3} L, 0, 0, 2L + \sqrt{3}\, z'^0)$$

Stange stößt an Garagenwand

$$z^0 = y^0 \quad \& \quad z^3 = y^3 \qquad \text{Ereignis A}$$

Stange paßt gerade in Garage / Tür zu

$$x^0 = y^0 \quad \text{bei } x^3 \qquad \text{Ereignis B}$$

$$\left.\begin{aligned} z^0 = y^0 &\Rightarrow 2z'^0 + \sqrt{3} L = y^0 \\ z^3 = y^3 &\Rightarrow 2L + \sqrt{3}\, z'^0 = x^3 + \tfrac{L}{2} \end{aligned}\right\} \text{aus A}$$

$$\Rightarrow \quad z'^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} x^3 - \frac{\sqrt{3}}{2} L$$

$$y^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} x^3$$

$$x^0 = y^0 \text{ bei } x^3 \quad \Rightarrow \quad y^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} x^3 = x^0$$

$$\Rightarrow \quad x^\mu \ ? \qquad x'^\mu \ ?$$

$\ddot{y}^{\mu} \quad \Big\} \quad \ddot{y}'^{\mu} \quad \Big\} \Rightarrow$ Garagenlänge.